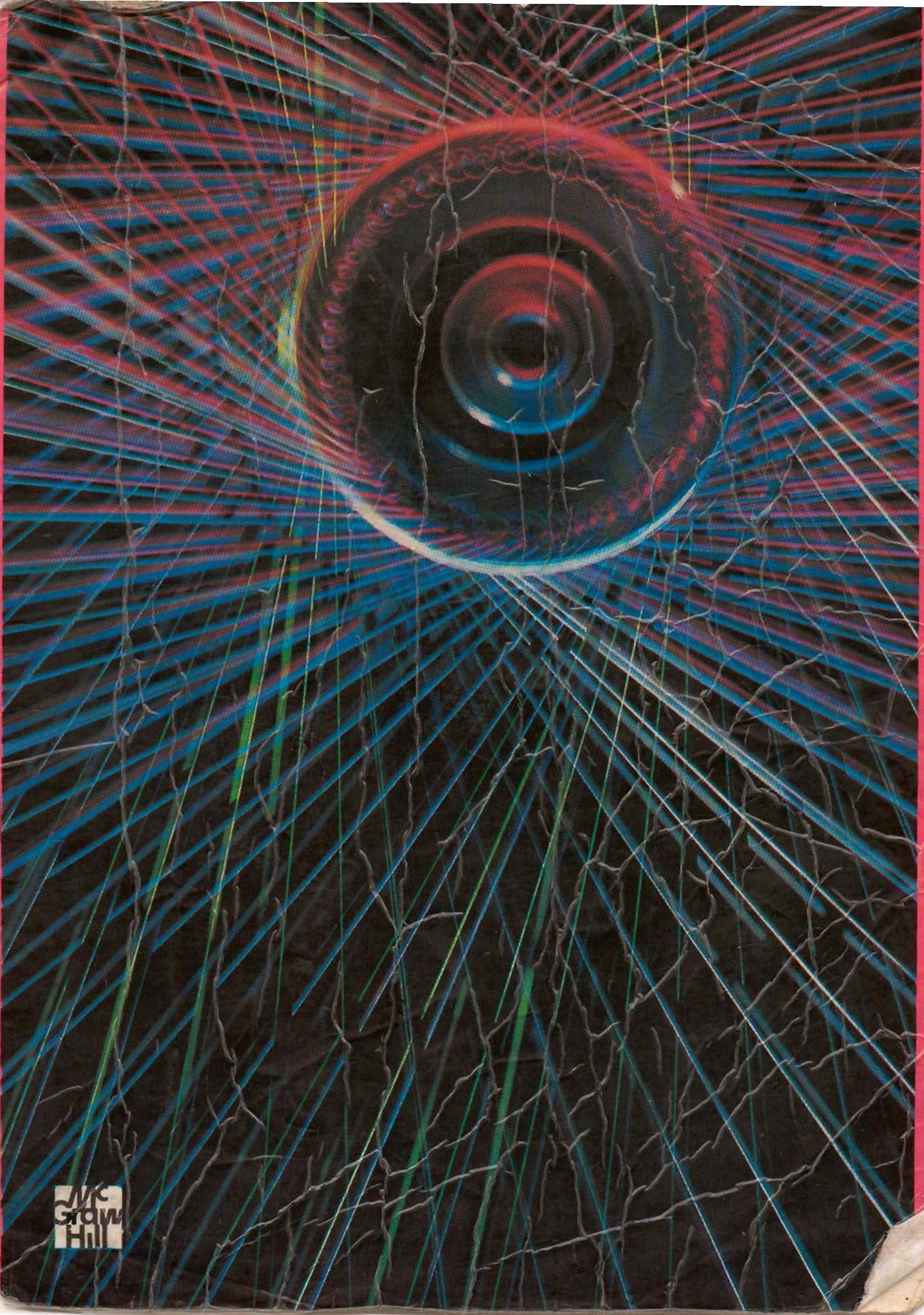


Álgebra y Trigonometría, Segunda Edición
Dennis G. Zill
Jacqueline M. Dewar



Wiley
Graw
Hill

Principios fundamentales del derecho

1.1. Definición de derecho

1.2. Fuentes del derecho

1.3. Clasificación del derecho

1.4. Características del derecho

1.5. Estructura del derecho

1.6. Función del derecho

1.7. Metodología del derecho

1.8. Importancia del derecho

1.9. Evolución del derecho

1.10. Conclusión



1.1 Sistema de números reales

TEORIA DE CONJUNTOS

La **teoría de conjuntos** nos permite describir en forma precisa conjuntos de números que comparten una propiedad común. Esto puede ser de gran utilidad al establecer las soluciones de cierto tipo de problemas.

Sin duda, usted ya está familiarizado con los siguientes conceptos de la teoría básica de conjuntos. **Conjunto** es una agrupación de objetos distintos. Un objeto en un conjunto se llama **elemento** de un conjunto; generalmente, nombramos un conjunto con una letra mayúscula como A o B y un elemento de un conjunto se lo denomina con una letra minúscula como x . Para indicar que x es un elemento del conjunto A escribimos

$$x \in A$$

Un conjunto puede especificarse de dos formas: haciendo una lista de los elementos del conjunto o estableciendo la propiedad que determina los elementos del conjunto. En ambos casos se utilizan corchetes $\{ \}$; por ejemplo, el conjunto que consta de los números 5, 10 y 15 puede denotarse por:

$$\{5, 10, 15\} \text{ o } \{x \mid x = 5n, n = 1, 2, 3\}$$

El último se lee "conjunto de todos los números x tal que $x = 5n$, en donde $n = 1, 2, 3$ ".

Si cada elemento de un conjunto B es también un elemento del conjunto A , decimos que B es un **subconjunto** de A y escribimos

$$B \subset A$$

Se sigue que cada conjunto es subconjunto de sí mismo.

El conjunto que no contiene elementos se llama **conjunto vacío** y se denota con el símbolo \emptyset .

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a por lo menos uno de los conjuntos A o B . En la notación de conjuntos escribimos

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos comunes tanto de A como de B y se expresa

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Si A y B no tienen elementos comunes, es decir, si $A \cap B = \emptyset$, entonces se dice que los conjuntos son conjuntos **disjuntos**.

EJEMPLO 1

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, entonces

$$B \subset A$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap C = \{2, 4\}$$

y

$$B \cap C = \emptyset$$

NUMEROS: ENTEROS, RACIONALES E IRRACIONALES

Recordemos que el conjunto de **números naturales**, o **enteros positivos**, se compone de

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

N es un subconjunto del conjunto de los **enteros**:

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

El conjunto Z incluye tanto los enteros positivos como los negativos y el número cero, el cual no es ni negativo ni positivo. A su vez, el conjunto de enteros es un subconjunto del conjunto de **números racionales**:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \text{ y } q \text{ son enteros, } q \neq 0 \right\}$$

El conjunto Q está compuesto de todos los cocientes de dos enteros, siempre que el denominador no sea un cero; por ejemplo,

$$\frac{-1}{2}, \quad \frac{17}{5}, \quad \frac{10}{-2} = -5, \quad \frac{6}{1} = 6, \quad \frac{0}{8} = 0$$

Nota de advertencia: el cociente a/b es indefinido si $b = 0$. Por ejemplo, $8/0$ y $0/0$ son indefinidos.

El conjunto de números racionales no es suficiente para solucionar ciertos problemas elementales algebraicos y geométricos. Por ejemplo, no hay un número racional p/q para el que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

(Véase problema 89). Así, no podemos utilizar números racionales para describir la longitud de la diagonal de un cuadrado unitario (véase figura 1). Mediante el teorema de Pitágoras sabemos que la longitud de la diagonal d debe cumplir

$$\begin{aligned} d^2 &= (1)^2 + (1)^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Escribimos

$$d = \sqrt{2}$$

y llamamos d "la raíz cuadrada de 2". Como lo acabamos de indicar, $\sqrt{2}$ no es un número racional. Pertenece al conjunto de **números irracionales**, es decir, el conjunto de números que no pueden expresarse como cociente de dos enteros. Otros ejemplos de números irracionales son π , $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}/4$.

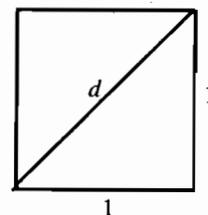


FIGURA 1

Si llamamos H al conjunto de números irracionales, entonces el conjunto de **números reales** R puede describirse como la unión de dos conjuntos disjuntos:

$$R = Q \cup H$$

También debemos anotar que el conjunto de números reales R puede describirse como la unión de 3 conjuntos disjuntos:

$$R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$$

donde R^- es el conjunto de números reales **negativos** y R^+ es el conjunto de números reales **positivos**. Los elementos del conjunto

$$\{0\} \cup R^+$$

se llaman números reales **no negativos**.

DECIMALES

Todo número real puede expresarse en **forma decimal**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= 0.25 \\ \frac{25}{7} &= 3.571428571428 \dots \\ \frac{7}{3} &= 2.3333 \dots \\ \pi &= 3.14159265 \dots \\ \sqrt{2} &= 1.41421356 \dots\end{aligned}$$

Se dice que números como 0.25 y 1.6 son **decimales finitos**, en tanto que números como

$$\begin{array}{ccc} \text{se repite} & & \text{se repite} \\ \overline{1.32} \overline{32} \overline{32} \dots & \text{y} & 3.\overline{571428} \overline{571428} \dots \end{array}$$

se llaman **decimales periódicos o recurrentes**. Un decimal periódico como 1.323232... con frecuencia se escribe $1.\overline{32}$, donde la barra indica el número o números que se repiten. Puede demostrarse que cada número racional posee una representación decimal o periódica o finita. Y viceversa, todo decimal periódico o finito es un número racional. También es un hecho básico que todo número decimal es un número real. Tenemos, entonces, que el conjunto de números irracionales está compuesto por todos los decimales que no son ni finitos ni periódicos. Así, π y $\sqrt{2}$ tienen representaciones decimales no periódicas y no finitas.

PORCENTAJE

Los fraccionarios o decimales algunas veces se expresan como **porcentajes**; por ejemplo, 8% quiere decir $8/100$ ó 0.08. En general, $b\%$ significa "b partes de 100", y es, simplemente, otra manera de escribir $b/100$. Por ejemplo, 42% significa $42/100$; entonces, $42\% = 0.42$. De igual manera, $0.005\% = 0.005/100 = 0.00005$.

Una forma simple de convertir un número decimal a porcentaje es multiplicar el decimal por 1 escrito en forma de 100%. Por ejemplo,

$$0.35 = 0.35 \times 1 = 0.35 \times 100\% = 35\%$$

De igual manera, $0.001 = 0.001 \times 100\% = 0.1\%$

Los porcentajes se utilizan con frecuencia para describir los incrementos o reducciones en cantidades como población, salarios y precios. Cuando una cantidad aumenta, el **porcentaje de incremento** se da por

$$\frac{\text{cantidad de aumento}}{\text{cantidad original}} \times 100\% \quad (1)$$

De igual forma, cuando una cantidad disminuye, el **porcentaje de decrecimiento** es dado por

$$\frac{\text{cantidad de decrecimiento}}{\text{cantidad original}} \times 100\% \quad (2)$$

EJEMPLO 2 _____

La población de un pequeño pueblo disminuyó de 1,750 a 1,700 habitantes. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento?

Solución. La cantidad de decrecimiento es $1,750 - 1,700 = 50$ y la cantidad original es 1,750. Utilizando el paso (2), encontramos que

$$\frac{50}{1750} \approx 0.0285714 = 0.0285714 \times 100\% \approx 2.86\%$$

Luego, el porcentaje de decrecimiento es de aproximadamente 2.86%

Notemos que en el ejemplo 2 utilizamos el símbolo \approx en lugar del signo igual para indicar que el número es sólo una aproximación.

EJEMPLO 3 _____

El salario por hora de trabajo de un estudiante se elevó de US\$5.25 dólares a US\$5.75. ¿Cuál es el porcentaje de incremento?

Solución. El monto del incremento es $US\$5.75 - US\$5.25 = US\$0.50$ y la cantidad original es de US\$5.25. A partir del paso (1) tenemos que el porcentaje de incremento es

$$\frac{US\$0.50}{US\$5.25} \approx 0.0952381 = 0.0952381 \times 100\% \approx 9.52\%$$

EJEMPLO 4 _____

¿Cuál es el precio de oferta de una balón de voleibol si el precio normal es de US\$28.60 y hay 25% de descuento?

Solución. Debido a que se ofrece 25% de descuento, el precio de oferta será de 75% del precio normal, o

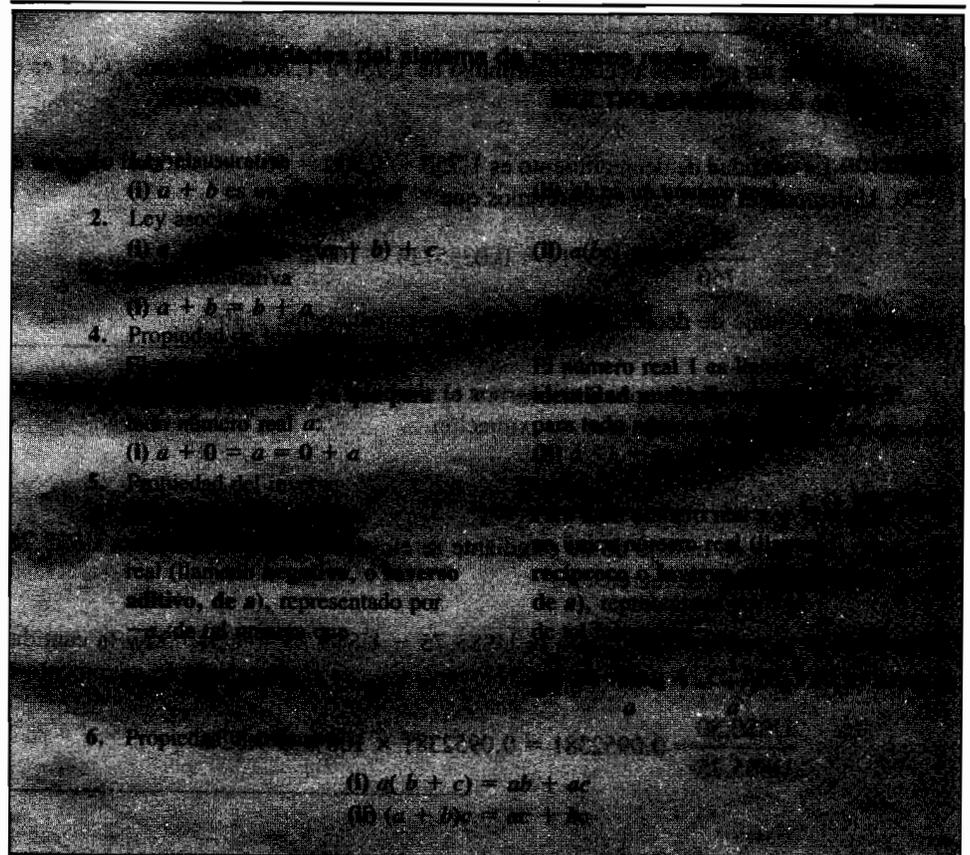
$$(0.75) (US\$28.60) = US\$21.45$$

De forma alternativa, podemos calcular 25% de descuento y restarlo al precio normal así:

$$\begin{aligned} US\$28.60 - (0.25) (US\$28.60) &= US\$28.60 - US\$7.15 \\ &= US\$21.45 \end{aligned}$$

SISTEMA DE NUMEROS REALES

El conjunto de números reales R junto con las operaciones de la adición y la multiplicación se llama **sistema de números reales**. Las reglas básicas del álgebra para este sistema nos permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para encontrar respuestas a preguntas matemáticas. Las propiedades básicas del sistema de números reales con respecto a las operaciones de la adición y la multiplicación están en una lista en el siguiente recuadro, donde a , b y c representan números reales.



EJEMPLO 5 _____

Formule una propiedad algebraica básica del sistema de números reales para justificar cada uno de los siguientes enunciados, donde x , y y z representan números reales.

- (a) $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$
- (b) $(6 + 8)y = y(6 + 8)$
- (c) $(x + 3)y + 2 = (xy + 3y) + 2$
- (d) $(x + y) - 1 = x + y$
- (e) $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$
- (f) $(y + z)[1/(y + z)] = 1$, si $y + z \neq 0$

Solución

- (a) Propiedad asociativa de la adición
- (b) Propiedad conmutativa de la multiplicación

- (c) Propiedad distributiva (ii)
- (d) Propiedad de identidad de la multiplicación
- (e) Propiedad del inverso de la adición
- (f) Propiedad del inverso de la multiplicación.

La ley distributiva puede extenderse para incluir más de dos números en la suma. Por ejemplo,

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

y
$$(a + b + c + d)e = ae + be + ce + de$$

Muchas propiedades adicionales de los números reales pueden derivarse de las propiedades básicas. Las siguientes propiedades también se utilizarán a lo largo de este texto.

7. Ley cancelativa o anulativa

- (i) Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$
- (ii) Si $ac = bc$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$

8. Ley de la multiplicación por cero

- (i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- (ii) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$ (o ambas)

Por ejemplo, si $x + y = 8 + y$, entonces podemos concluir a partir de la ley cancelativa (i) que $x = 8$. Y si $2x = 2y$, entonces, a partir de la ley cancelativa (ii) tenemos que $x = y$.

La propiedad de la multiplicación por cero (ii) es de extrema importancia en la solución de ecuaciones. Por ejemplo, si $x(x + 1) = 0$, entonces $x = 0$ ó $x + 1 = 0$.

Es posible definir las operaciones de la sustracción y la división en términos de la adición y de la multiplicación, respectivamente.

DEFINICION 1

Para los números reales a y b , la **diferencia**, $a - b$, se define como

$$a - b = a + (-b).$$

Si $b \neq 0$, entonces el **cociente**, $a \div b$ se define como

$$a \div b = a \left(\frac{1}{b} \right) = \frac{a}{b}$$

En el cociente a/b , a se llama **numerador** y b **denominador**. Con frecuencia, el cociente de dos números reales a/b se llama **fracción**. Nótese que $a \div b$ ó a/b no es definida para $b = 0$. Entonces, $a/0$ no es definida para ningún número real a . Como lo demuestra el siguiente ejemplo, no todas las propiedades que funcionan para la adición y la multiplicación son válidas para la sustracción y la división.

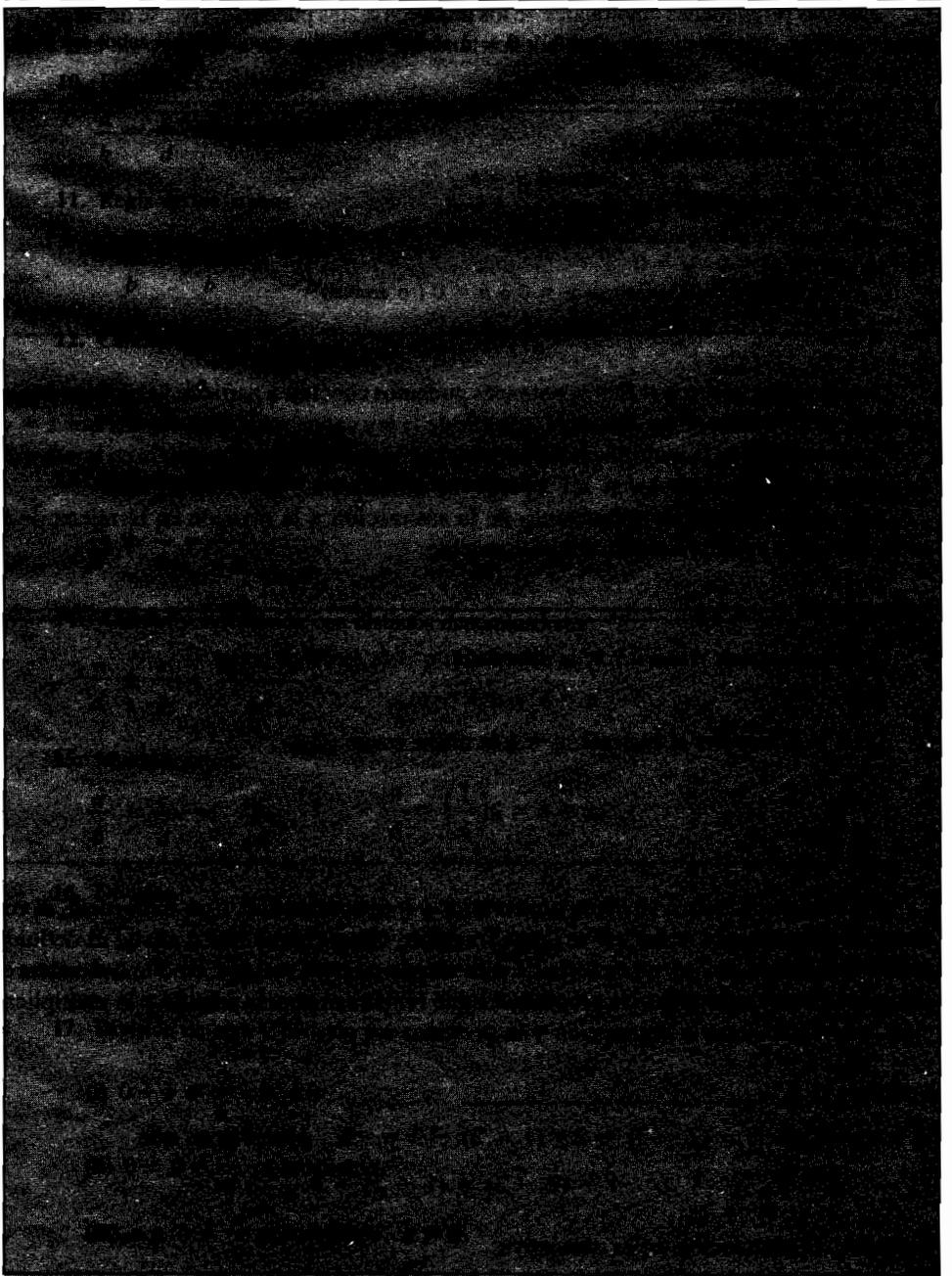
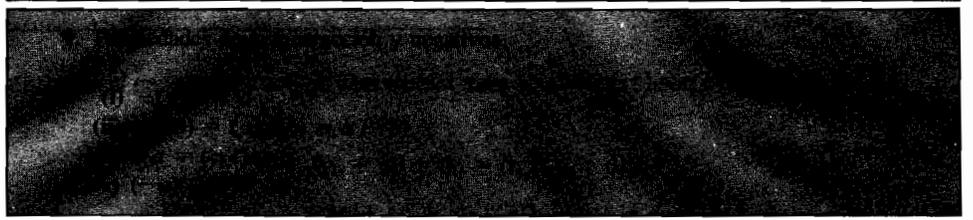
EJEMPLO 6

Si tenemos que $1 - (2 - 3) = 2$ y $(1 - 2) - 3 = -4$, observamos que

$$1 - (2 - 3) \neq (1 - 2) - 3$$

Entonces, la sustracción no es asociativa.

Ahora, hagamos una lista de las propiedades importantes de la sustracción, relacionadas con negativos y fraccionarios, con los cuales usted puede estar ya familiarizado.



EJEMPLO 7 _____

Evalúe cada una de las siguientes expresiones:

(a) $(-x)(-y)$

(b) $\frac{-(-a)}{-b}$

(c) $\frac{2(u+v)}{2v}$

(d) $\frac{y}{(1/4 + 3/5)}$

(e) $z \cdot \frac{0}{5}$

(f) $\frac{w}{2 - (5 - 3)}$

Solución

(a) $(-x)(-y) = xy$

(b) $\frac{-(-a)}{-b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

(c) $\frac{2(u+v)}{2v} = \frac{u+v}{v}$

(d) Para hallar el valor numérico de $y/(1/4 + 3/5)$, primero hallamos el denominador :

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{(1)(5) + (4)(3)}{(4)(5)} = \frac{17}{20}$$

Entonces, tenemos que

$$\frac{y}{(1/4 + 3/5)} = \frac{y}{17/20} = \frac{y}{1} \cdot \frac{20}{17} = \frac{20y}{17}$$

(e) $z \cdot \frac{0}{5} = z \cdot 0 = 0$

(f) La expresión $w/[2 - (5 - 3)]$ es indefinida, porque su denominador es cero:

$$2 - (5 - 3) = 2 - 2 = 0$$

Nota de advertencia: en la solución del ejemplo 7(c), un error común es cancelar las letras v en

$$\frac{u+v}{v}$$

No se puede realizar ninguna cancelación debido a que v no es factor tanto del numerador como del denominador como lo requiere la ley cancelativa (ii).

EJERCICIO 1.1

En los problemas 1 al 8, encuentre el conjunto indicado si $A = \{1, 4, 6, 8, 10, 15\}$, $B = \{3, 9, 11, 12, 14\}$ y $C = \{1, 2, 5, 7, 8, 13, 14\}$.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. $A \cup B$ | 2. $A \cup C$ |
| 3. $B \cup C$ | 4. $A \cap B$ |
| 5. $A \cap C$ | 6. $B \cap C$ |
| 7. $(A \cap B) \cup B$ | 8. $A \cup (B \cup C)$ |

En los problemas 9 al 12, haga la lista de los elementos del conjunto dado.

9. $\{r | r = p/q, p = 1, 2, q = -1, 1\}$
10. $\{t | t = 4 + z, z = -1, -3, -5\}$
11. $\{x | x = 2y, y = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$
12. $\{y | y - 5 = 2\}$

En los problemas 13 al 16 utilice la notación de conjuntos para expresar el conjunto dado.

13. El conjunto de los enteros negativos mayores que -3
14. El conjunto de los números reales cuyo cuadrado es 9
15. El conjunto de los enteros pares
16. El conjunto de los enteros impares

En los problemas 17 al 34, responda falso o verdadero.

17. $\frac{1}{3}$ es un elemento de Z . _____
18. $-\frac{1}{2}$ es un elemento de Q . _____
19. $\sqrt{3}$ es un elemento de R . _____
20. $\sqrt{2}$ es un número racional. _____
21. 0.1333... es un número irracional. _____
22. 1.5 es un número racional. _____
23. 0.121212... es un número racional. _____
24. $\frac{8}{8}$ es un elemento de Q . _____
25. -4 es un elemento de Z , pero -4 no es elemento de N . _____
26. π es un elemento de R , pero no es elemento de Q . _____
27. Todo número irracional es número real. _____
28. Todo número entero es número racional. _____
29. Todo número decimal es número real. _____
30. La intersección del conjunto de números racionales y el conjunto de números irracionales es el conjunto vacío. _____
31. Todo porcentaje puede expresarse como decimal. _____
32. Todo número racional puede expresarse como decimal. _____
33. Todo decimal puede expresarse como cociente de dos enteros. _____
34. Todo porcentaje es un número real. _____

En los problemas 35 al 38, escriba de nuevo el porcentaje en forma decimal.

- | | |
|----------|-------------|
| 35. 38% | 36. 6.2% |
| 37. 250% | 38. 0.0001% |

En los problemas 39 al 42, escriba de nuevo los decimales en forma de porcentaje.

- | | |
|-----------|-------------|
| 39. 0.85 | 40. 1.01 |
| 41. 0.234 | 42. 0.10203 |

43. El costo de un libro de matemáticas aumentó de US\$25 a US\$30. ¿Cuál es el porcentaje de incremento?
44. El costo de un microcomputador disminuyó de US\$1,000 a US\$850. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento?
45. Un auto originalmente costaba US\$12,000. Un año más tarde costaba US\$10,200. ¿Cuál es el porcentaje de depreciación?
46. El precio de lista de un auto es de US\$7,000. Después de haber sido reducido su costo en 3%, ¿cuál es el nuevo precio?
47. El salario de un profesor de universidad es de US\$35,000. Después de aumentarle 5%, ¿cuál es su nuevo salario?
48. En el problema 47, si al nuevo salario del profesor universitario se le reduce 5%, ¿su salario vuelve a ser US\$35,000?
49. ¿Cuál es el costo final de un artículo que está en lista a L dólares después de dar 5% de descuento y de aplicarles 6% de impuesto a las ventas? (Nótese que el precio de lista no aumenta en 1%).
50. Una tienda de audio anunciaba una unidad de disco compacto con 10% de descuento para un ahorro de US\$30.00. Más tarde se vendió la unidad a 30% del precio original. Halle el precio original, el precio de venta y el monto del descuento final.

Formule una propiedad básica del sistema de números reales para justificar cada uno de los enunciados dados en los problemas 51 al 66.

51. $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$
52. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
53. $(x + y) + 3 = (y + x) + 3$
54. $(a + 2) + \pi = \pi + (a + 2)$
55. $[(-2)(\frac{1}{2})]z = -2[(\frac{1}{2})z]$
56. $(1 + 2)(-3) = 1(-3) + 2(-3)$
57. $1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
58. $(3 + 4)(5 + 2) = (3 + 4)5 + (3 + 4)2$
59. $(\frac{1}{5})5 = 1$
60. $\frac{1}{4} + (-\frac{1}{4}) = 0$
61. $x(y + 0) + z = xy + z$
62. $\{3 + [(-5)(1)]\} + 4 = \{3 + (-5)\} + 4$
63. $[(w + 3)2]z = [2(w + 3)]z$
64. $(-13 + z)(2) + 7 = [z + (-13)](2) + 7$
65. $(a - b) + [-(a - b)] = 0$
66. $(x - y)\left(\frac{1}{x - y}\right) = 1, x \neq y$

Enuncie una de las propiedades derivadas (propiedades 7 a 17) del sistema de números reales para justificar cada uno de los enunciados dados en los problemas 67 al 76.

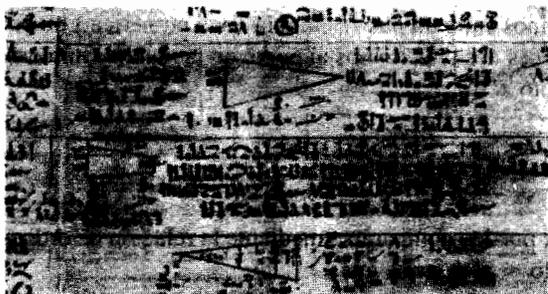
67. $(-5)(-x) = 5x$
68. $-(-17) = 17$
69. Si $x + 3 = y + 3$, entonces $x = y$.
70. Si $y + z = 5 + z$, entonces $y = 5$.
71. Si $(x + 2)(3) = 4(3)$, entonces $x + 2 = 4$.
72. Si $z^2 = 0$, entonces $z = 0$.
73. Si $(x + 1)(x - 2) = 0$, entonces $x + 1 = 0$ o $x - 2 = 0$.
74. $(a + b + c) \cdot 0 = 0$
75. $\frac{0}{a^2 + 1} = 0$

76. $\frac{2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 2$
77. Demuestre mediante un ejemplo que la sustracción en R (números reales) no es una operación conmutativa.
78. Demuestre mediante un ejemplo que la división en el conjunto de números reales diferentes de cero no es conmutativa.
79. Demuestre mediante un ejemplo que la división en el conjunto de números reales diferentes de cero no es asociativa.
80. Responda falso o verdadero:
- (a) Si $c \neq 0$, entonces $(a + b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$.
- (b) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $a + b \neq 0$, entonces $c \div (a + b) = (c \div a) + (c \div b)$

En los problemas 81 a 86 halle la expresión dada.

81. $-(-a)[2 - 3]$
82. $\frac{-(-b)}{-bc}$
83. $\frac{4(3 + c)}{4c}$
84. $[(4)(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})](-z) + z$
85. $\frac{[(14)(0)(x)]}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})}$
86. $(\pi - \pi)(x + y - 3)$

87. El papiro Rhind (alrededor de 1700 a. de C.) indica que los egipcios utilizaron $(\frac{25}{8})^2$ como valor de π .
- (a) ¿Es la aproximación mayor o menor que π ?
- (b) Demuestre que el error al utilizar esta aproximación es menor que 1% de π .



88. Utilizando el hecho de que la circunferencia de un círculo es π veces el diámetro, determine qué valor de π se implica a partir del siguiente pasaje bíblico: "Hizo el mar de fundición: tenía diez codos de borde a borde, del todo circular y cinco codos de

altura. Un cordón de treinta codos lo ceñía todo en derredor". (Tomado de II Crónicas 4:2 y I Reyes 7: 23, que datan del siglo X a. de C.).

89. Demuestre que $\sqrt{2}$ no puede expresarse como cociente de enteros.
[Sugerencia: suponga que hay un fraccionario (p/q) , reducido a su mínima expresión tal que $(p/q)^2 = 2$. Esto simplifica a $p^2 = 2q^2$, lo cual implica que p^2 , en consecuencia p , es un entero par, es decir $p = 2r$. Haga esta sustitución y considere que $(2r/q)^2 = 2$. Debe llegar a la contradicción del hecho de que p/q fue reducida a la mínima expresión].
90. ¿Es el producto de dos números irracionales necesariamente irracional? Explique.
91. ¿Es el cociente de dos números irracionales necesariamente irracional? Explique.
92. Algunas claves secretas funcionan desplazando o corriendo letras del alfabeto. La figura 2 muestra un desplazamiento en 2 de ellas. Cada letra del mensaje puede ser trasladada por una cantidad diferente. Este esquema de codificación puede representarse por los dígitos en un número decimal. Por ejemplo, el número decimal .12121212... codifica el mensaje ESTUDIE MATEMATICA en FUUWEKF OBVFOBVJEBU. Si utiliza 9/37 produce el mensaje codificado RMWCKRTEV XMYG, entonces, ¿cuál fue el mensaje original?

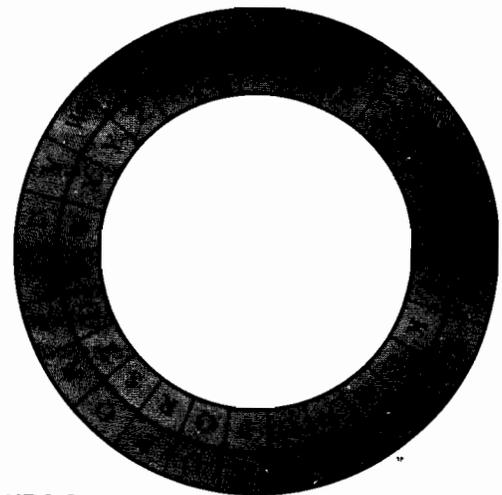


FIGURA 2

1.2 Recta de números reales

Para dos números reales distintos a y b , siempre hay un tercer número real entre ellos; por ejemplo, su promedio $(a + b)/2$ es el punto medio entre ellos. De igual manera, para dos puntos distintos A y B en una recta, hay siempre un tercer punto entre ellos; por ejemplo, el punto medio M del segmento de recta AB . Hay muchas similitudes como ésta entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos en una recta que indican el uso de una recta para "describir" el conjunto de los números reales. Esto puede hacerse como se explica a continuación.

RECTA DE NUMEROS REALES

Dada cualquier recta, escogemos un punto sobre ella para representar el número 0. Este punto, en particular, se llama **origen**. Si ahora seleccionamos un segmento de recta de longitud unitaria, como lo muestra la figura 3, cada número real positivo x puede representarse por un punto a una distancia x a la derecha del origen. De igual forma, cada número real negativo $-x$ puede representarse con un punto a una distancia x hacia la izquierda del origen. Esta asociación produce una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos en una recta, llamada **recta de números reales**, **recta numérica** o **recta coordenada**. Para cualquier punto P dado en la recta numérica, el número p , que corresponde a este punto se llama **coordenada** de P .

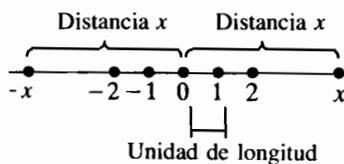


FIGURA 3

En general, no diferenciaremos entre un punto sobre la recta numérica y su coordenada. Así, por ejemplo, algunas veces nos referiremos al punto en la recta de números reales con coordenada 5 como "el punto 5".

MENOR QUE Y MAYOR QUE

Dos números reales a y b , $a \neq b$, pueden compararse mediante la relación de orden **menor que**, representada por el símbolo $<$. Decimos que

a es menor que b si y sólo si $b - a$ es positivo.

Si a es menor que b , escribimos $a < b$.

De forma equivalente, podemos decir que b es **mayor que** a y escribir $b > a$. Por ejemplo, $-7 < 5$, ya que $5 - (-7) = 12$ es positivo. Podemos escribir también $5 > -7$.

La recta de números reales es útil para demostrar la relación de orden menor que. Geométricamente, $a < b$ significa que el punto que corresponde a a en la recta numérica se halla a la izquierda del punto que corresponde a b (véase figura 4).

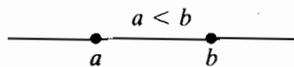


FIGURA 4

EJEMPLO 1

Utilizando la relación de orden mayor que, compare los números reales π y $\frac{22}{7}$.

Solución. De $\pi = 3.1415\dots$ y $\frac{22}{7} = 3.1428\dots$, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{22}{7} - \pi &= (3.1428 \dots) - (3.1415 \dots) \\ &= 0.001 \dots \end{aligned}$$

Debido a que la diferencia es positiva, concluimos que

$$\frac{22}{7} > \pi$$

Dos relaciones adicionales de orden son importantes:

1. a es menor o igual a b , dado por

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a < b \text{ o } a = b$$

2. a es mayor o igual a b , dado por

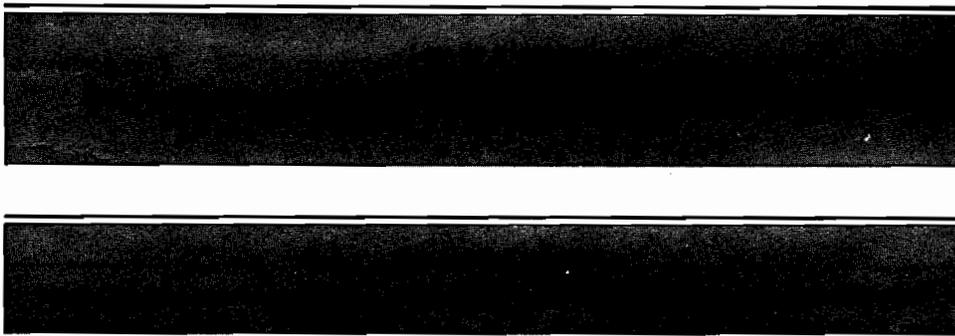
$$a \geq b \text{ si y sólo si } a > b \text{ o } a = b$$

Por ejemplo, ya que $2 = \sqrt{4}$, podemos escribir $2 \geq \sqrt{4}$ ó $2 \leq \sqrt{4}$. También podemos decir que $4 \leq 9$, ya que $4 < 9$.

DESIGUALDADES

Las relaciones $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, y $a \geq b$ se llaman **desigualdades** y los símbolos $<$, $>$, \leq y \geq son **símbolos de desigualdad**. Si $b \geq 0$, entonces b no es negativo; entonces, decimos que b es *no negativo*. De igual forma, si $b \leq 0$, decimos que b es **no positivo**.

La relación de orden menor que posee las siguientes propiedades:



Por ejemplo, si $x < 12$ y $12 < y$, concluimos de la propiedad transitiva que $x < y$.

VALOR ABSOLUTO

También podemos utilizar la recta de números reales para presentar la distancia.

Como lo muestra la figura 5, la distancia desde el punto 3 hasta el origen es de 3 unidades y la distancia desde el punto -3 hasta el origen es de 3, ó $-(-3)$, unidades. De nuestra discusión sobre la recta numérica resulta que, en general, la distancia de cualquier número al origen es el "valor sin signo" de ese número.

De forma más precisa, como lo muestra la figura 6, para cualquier número real positivo x , la distancia del punto x al origen es x , pero para cualquier número negativo y la distancia del punto y al origen es $-y$. Por supuesto, para $x = 0$ la distancia al origen es 0. El concepto de distancia de un punto en la recta numérica al origen es descrito por el **valor absoluto**.

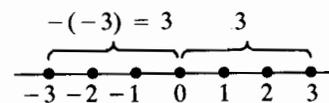


FIGURA 5

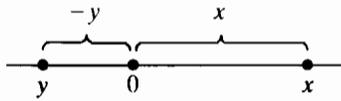


FIGURA 6

DEFINICION 2

Para cualquier número real a , el **valor absoluto** de a denotado por $|a|$ es

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 2

Siendo 3 y $\sqrt{2}$ números positivos,

$$|3| = 3 \quad \text{y} \quad |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

Pero debido a que $-|3|$ y $-|\sqrt{2}|$ son números negativos,

$$|-3| = -(-3) = 3 \quad \text{y} \quad |-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

EJEMPLO 3

(a) $|2 - 2| = |0| = 0$

(b) $|2 - 5| = |-3| = -(-3) = 3$

(c) $|2| - |-5| = 2 - [-(-5)] = 2 - 5 = -3$

EJEMPLO 4

Halle $|\sqrt{2} - 3|$.

Solución. Para hallar $|\sqrt{2} - 3|$, debemos primero determinar si $(\sqrt{2} - 3)$ es positivo o negativo. Ya que $\sqrt{2} \approx 1.4$, vemos que $(\sqrt{2} - 3)$ es un número negativo. Así,

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} - 3| &= -(\sqrt{2} - 3) = -\sqrt{2} + 3 \\ &= 3 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Nota de advertencia: es un error común pensar que $-y$ representa un número negativo porque el símbolo y va precedido de un signo menos. Enfatizamos que si y representa un número negativo, entonces $-y$ es un número positivo. En consecuencia, si y es negativo, entonces $|y| = -y$.

EJEMPLO 5

Halle $|x - 6|$ si (a) $x > 6$, (b) $x = 6$ y (c) $x < 6$

Solución

(a) Si $x < 6$, entonces $x - 6$ es positivo. Luego, de la definición de valor absoluto concluimos que $|x - 6| = x - 6$.

(b) Si $x = 6$, entonces $x - 6 = 0$; luego, $|x - 6| = |0| = 0$.

(c) Si $x > 6$, entonces $x - 6$ es negativo y tenemos que $|x - 6| = -(x - 6) = 6 - x$

Para cualquier número real x y su negativo, $-x$, la distancia al origen es la misma. Es decir $|x| = |-x|$. Esta es una de las propiedades especiales del valor absoluto, las cuales describimos en el siguiente cuadro.

Propiedades del valor absoluto

(i) $|x| \geq 0$
 (ii) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$
 (iii) $|x| = |-x|$
 (iv) $|xy| = |x| |y|$
 (v) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$

Definir estas propiedades con palabras es una forma de aumentar su comprensión de ellas. Por ejemplo, la propiedad (i) dice que el valor absoluto de una cantidad es siempre no negativa. La propiedad (iv) dice que el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los dos factores.

Otra propiedad importante del valor absoluto es la **desigualdad triangular**.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS

El concepto de valor absoluto no sólo describe la distancia de un punto al origen; también es útil para hallar la distancia entre dos puntos en la recta numérica. Debido a que deseamos describir la distancia como una cantidad positiva, restamos una coordenada de la otra y luego sacamos el valor absoluto de la diferencia.

DEFINICION 3

Si a y b son dos puntos en la recta numérica, la **distancia** de a a b es

$$d(a, b) = |b - a|$$

(Véase la figura 7).

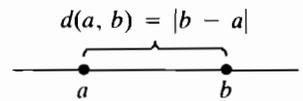


FIGURA 7

EJEMPLO 6

(a) La distancia de -5 a 2 es

$$d(-5, 2) = |2 - (-5)| = 7$$

(b) La distancia de 3 a $\sqrt{2}$ es

$$d(3, \sqrt{2}) = |\sqrt{2} - 3| = 3 - \sqrt{2}$$

Vemos que la distancia de a a b es la misma que la distancia de b a a , ya que mediante la propiedad (iii)

$$d(a, b) = |b - a| = |-(b - a)| = |a - b| = d(b, a)$$

Así,

$$d(a, b) = d(b, a)$$

COORDENADA DEL PUNTO MEDIO

La definición 3 puede utilizarse para hallar una expresión para el **punto medio** de un segmento de recta. (Véase problema 96).

El punto medio m de un segmento de recta que une a a y b es el promedio de los dos extremos:

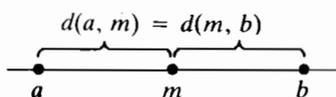


FIGURA 8

$$m = \frac{a + b}{2} \quad (3)$$

(Véase figura 8).

EJEMPLO 7

A partir de (3), el punto medio del segmento de recta que une los puntos 5 y -2 es

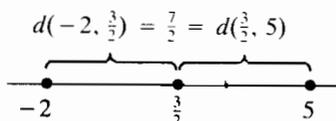


FIGURA 9

$$\frac{5 + (-2)}{2} = \frac{3}{2}$$

(Véase figura 9).

EJEMPLO 8

El segmento de recta que une a a y b tiene punto medio $m = 4$. Si la distancia de a a b es de 7, halle a y b .

Solución. Como observamos en la figura 10, ya que m es el punto medio,

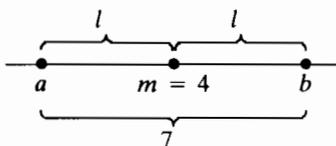


FIGURA 10

$$l = d(a, m) = d(m, b)$$

Entonces, $2l = 7$ ó $l = \frac{7}{2}$. Ahora tenemos que

$$a = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$$

y

EJERCICIO 1.2

1. Dibuje una recta numérica y localice en ella los siguientes puntos:

$$0, -\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2, \frac{3}{2}, 2.5$$

2. Dibuje una recta numérica y localice en ella los siguientes puntos:

$$0, 1, -1, \sqrt{2}, -3, -\sqrt{2} + 1$$

En los problemas 3 al 10, escriba la proposición como una desigualdad.

3. x es positivo
4. y es negativo
5. $x + y$ es no negativo

6. a es menor que -3
7. b es mayor o igual que 100
8. $c - 1$ es menor o igual que 5
9. $|t - 11|$ es menor que 50
10. $|s + 4|$ es mayor o igual que 7

En los problemas 11 al 16 compare las parejas de números utilizando la relación de orden "menor que".

- | | |
|-------------------------|------------------------------------|
| 11. 15, -3 | 12. $-9, 0$ |
| 13. $\frac{3}{4}, 1.33$ | 14. $-\frac{7}{15}, -\frac{1}{11}$ |
| 15. $\pi, 3.14$ | 16. $1.732, \sqrt{3}$ |

En los problemas 17 al 22, compare las parejas de números utilizando la relación de orden "mayor o igual que".

17. $-2, -7$ 18. $-\frac{1}{2}, -0.143$
 19. $2.5, \frac{5}{2}$ 20. $0.333, \frac{1}{3}$
 21. $\frac{133}{100}, 2.6$ 22. $\sqrt{2}, 1.414$

En los problemas 23 al 44, halle el valor absoluto.

23. $|7|$ 24. $|-7|$
 25. $|22|$ 26. $|\frac{22}{7}|$
 27. $|\frac{-22}{7}|$ 28. $|\sqrt{5}|$
 29. $|-\sqrt{5}|$ 30. $|0.13|$
 31. $|\pi - 4|$ 32. $|2 - 6|$
 33. $|6 - 2|$ 34. $||2| - |6||$
 35. $|-6| - |-2|$ 36. $|\sqrt{5} - 3|$
 37. $|3 - \sqrt{5}|$ 38. $|8 - \sqrt{7}|$
 39. $|\sqrt{7} - 8|$ 40. $|-(\sqrt{7} - 8)|$
 41. $|\sqrt{5} - 2.3|$ 42. $|\frac{\pi}{2} - 1.57|$
 43. $|6.28 - 2\pi|$ 44. $|\sqrt{17} - 4.123|$

En los problemas 45 al 56, escriba la expresión sin utilizar los símbolos del valor absoluto.

45. $|h|$, si h es negativo 46. $|-h|$, si h es negativo
 47. $|x - 2|$, si $x < 2$ 48. $|x - 2|$, si $x = 2$
 49. $|x - 2|$, si $x > 2$ 50. $|5 - x|$, si $x < 5$
 51. $|5 - x|$, si $x = 5$ 52. $|5 - x|$, si $x > 5$
 53. $|x - y| - |y - x|$ 54. $|\frac{x - y}{y - x}|$, $x \neq y$
 55. $|\frac{t}{|t|}$, $t \neq 0$ 56. $|\frac{z}{-|z|}$, $z \neq 0$
 57. ¿Para qué valores de x es verdad que $x \leq |x|$?
 58. ¿Para qué valores de x es verdad que $x = |x|$?
 59. Utilice la definición 2 para probar que $|xy| = |x||y|$ para cualquier número real x y y .
 60. Utilice la definición 2 para probar que $|x/y| = |x|/|y|$ para cualquier número real x y cualquier número real y diferente de cero.

En los problemas 61 al 68, responda falso o verdadero para cualquier número real a .

61. $\frac{|a \cdot a|}{|a|} = |a|$, $a \neq 0$ 62. $|a| > -1$
 63. $-|a| \leq |a|$ 64. $-a \leq a$
 65. $a \leq |a|$ 66. $-|a| \leq a$
 67. Si $x < a$ y $a < z$, entonces $x < z$.
 68. $|a + 1| \leq |a| + 1$
 69. 7, 3 70. 2, 5

En los problemas 69 al 76, (a) halle la distancia entre los puntos dados y (b) halle la coordenada del punto medio del segmento de recta que une los puntos dados.

69. 7, 3 70. 2, 5

71. 0.6, 0.8 72. $-100, 255$
 73. $-5, -8$ 74. $6, -4.5$
 75. $\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}$ 76. $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

En los problemas 77 al 84, m es el punto medio del segmento de recta que une a a (el punto final a la izquierda) y b (el punto final de la derecha). Utilice las condiciones dadas para hallar los valores indicados.

77. $m = 5$, $d(a, m) = 3$; a, b
 78. $m = -1$, $d(m, b) = 2$; a, b
 79. $m = 2$, $d(a, b) = 7$; a, b
 80. $m = \sqrt{2}$, $d(a, b) = 1$; a, b
 81. $a = 4$, $d(a, m) = \pi$; b, m
 82. $a = 10$, $d(b, m) = 5$; b, m
 83. $b = -3$, $d(a, b) = \sqrt{2}$; a, m
 84. $b = -\frac{3}{2}$, $d(a, b) = \frac{1}{2}$; a, m

En los problemas 85 al 92, determine cuál proposición de la ley de la tricotomía ($a < b$, $b < a$, o $a = b$) se cumple para las siguientes parejas de números a, b .

85. $(10)(10)$, 100 86. $\sqrt{3} - 3$, 0
 87. π , 3.14 88. $|-15|$, 15
 89. $\frac{7}{11}$, $0.\overline{63}$ 90. $\frac{2}{3}$, 0.2
 91. $\sqrt{2}$, 1.4 92. $-\sqrt{2}$, -1.4

93. ¿En qué condiciones se cumple la igualdad en la desigualdad triangular, es decir, cuándo es verdad que $|a + b| = |a| + |b|$?
94. Utilice la desigualdad triangular para probar que $|a - b| \leq |a| + |b|$.
95. Utilice la desigualdad triangular para probar que $|a - b| \geq |a| - |b|$. [Sugerencia: $a = (a - b) + b$].
96. Pruebe la fórmula del punto medio (3)
97. Greg, Tricia, Ethan y Natalie viven en la Calle Real. Tricia vive a una milla de donde vive Greg, y Ethan vive a una milla y media de donde vive Tricia. Natalie vive a medio camino entre Ethan y Tricia. ¿Qué tan lejos vive Natalie de Greg? [Sugerencia: hay dos soluciones].
98. Una compañía que poseía una planta manufacturera cerca de un río compró dos plantas manufactureras adicionales, una a x millas río arriba y la otra a y millas río abajo. Ahora la compañía desea construir una planta procesadora ubicada de tal manera que la distancia total para el embarque desde la planta procesadora hasta las tres plantas manufactureras sea mínima. Utilice la desigualdad triangular para demostrar que la planta procesadora debe construirse en el mismo sitio de la primera planta manufacturera. [Sugerencia: piense que las plantas están situadas en 0, x y $-y$ en la recta numérica. (Véase figura 11). Utilizando valores absolutos, halle una expresión para la distancia total de embarque si la planta procesadora se coloca en el punto d].

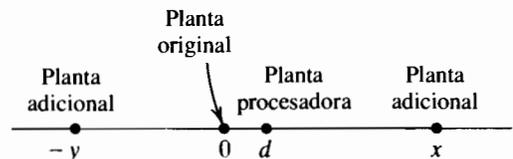


FIGURA 11

1.3 Exponentes enteros

EXPONENTES

Creemos que es más conveniente escribir una suma repetida $x + x + x + x$ de forma $4x$. De igual forma, podemos escribir el producto repetido $x \cdot x \cdot x$ de manera más efectiva, utilizando **exponentes**. En particular $x \cdot x \cdot x = x^3$. En general, para cualquier número real x y para cualquier entero positivo n , el símbolo x^n , que se lee como "x a la enésima potencia", representa el producto de n factores de x . Así,

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ factores}}$$

para cualquier entero positivo n . En la expresión x^n , n se denomina **exponente** ó **potencia** de x y x se denomina **base**. Por ejemplo,

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

y

$$y^3 = y \cdot y \cdot y$$

También, para cualquier entero positivo n , definimos

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \neq 0$$

Entonces, por ejemplo,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

y

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{10}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{10,000}} = 10,000$$

Finalmente, para cualquier base x diferente de cero, definimos

$$x^0 = 1$$

(Véase el problema 93 para obtener la razón fundamental de esta definición). Entonces,

$$2^0 = 1 \quad \text{y} \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3})^0 = 1$$

Notemos que 0^0 es indefinido.

Nota de advertencia: es importante reconocer la diferencia entre $5x^3$ y $(5x)^3$. Los paréntesis indican que el exponente 3 se aplica a $5x$ y no sólo a x . En otras palabras,

$$5x^3 = 5 \cdot x \cdot x \cdot x \quad \text{y} \quad (5x)^3 = 5x \cdot 5x \cdot 5x = 125x^3$$

De igual forma,

$$-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81 \quad \text{y} \quad (-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

LEYES DE LOS EXPONENTES

Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas **leyes de los exponentes**. Como ejemplo simple, consideremos el producto $3^2 \cdot 3^4$. Al contar los factores observamos que

$$3^2 \cdot 3^4 = \overbrace{(3 \cdot 3)}^{2 \text{ factores}} \overbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}^{4 \text{ factores}} = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{6 \text{ factores}}$$

$$= 3^6 = 3^{2+4}$$

es decir, $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}$

En general, si x es cualquier número y m y n son enteros positivos, entonces,

$$x^m x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_m \cdot \underbrace{x \cdot x \cdots x}_n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{m+n} = x^{m+n}$$

Cuando tanto m como n son negativos, los factores se cuentan de la misma forma, aunque estén en el denominador de la fracción resultante. Si $m \geq 0$ y n es negativo, tenemos que $n = -q$, donde $q > 0$. Entonces,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = \frac{x^m}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_q} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdots x}^m}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_q}$$

Después de que todos los factores posibles han sido cancelados, bien quedan en el numerador $m - q$ factores o $q - m$ factores en el denominador. En el primer caso,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = x^{m-q} = x^{m+n}$$

y en el segundo caso,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = \frac{1}{x^{q-m}} = x^{-(q-m)} = x^{m-q} = x^{m+n}$$

Por un argumento similar, puede verificarse que $x^m x^n = x^{m+n}$ si m es negativo y $n \geq 0$.

Esta y otras fórmulas que involucran a los exponentes están en la lista a continuación:



Al formular estas leyes, cada vez que x o y se dan en el denominador o con un exponente negativo, x o y deben ser diferentes de cero.

En los siguientes ejemplos ilustramos cada una de las leyes de los exponentes.

EJEMPLO 1 _____

Para (i)

$$(a) a^5 a^4 = a^{5+4} = a^9$$

Para (ii)

$$(b) (b^3)^{-2} = b^{3(-2)} = b^{-6} = \frac{1}{b^6}$$

Para (iii)

$$(c) (3x)^4 = 3^4 x^4 = 81x^4$$

Para (iv)

$$(d) \left(\frac{y}{4}\right)^{-5} = \frac{y^{-5}}{4^{-5}} = \frac{1}{y^5} = \frac{4^5}{y^5} = \frac{1,024}{y^5}$$

Para (v)

$$(e) \frac{a^{-5}}{a^{-3}} = a^{-5-(-3)} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Las leyes de los exponentes son útiles para simplificar expresiones algebraicas, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 _____

$$\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5}$$

Solución. Mediante las leyes de los exponentes tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5} &= \frac{(-6)^3 x^3 (y^2)^3}{x^2 y^5} \\ &= -\frac{216x^3 y^6}{x^2 y^5} \\ &= -216x^{3-2} y^{6-5} \\ &= -216xy \end{aligned}$$

NOTACION CIENTIFICA

Los exponentes enteros con frecuencia se utilizan para escribir números muy grandes o muy pequeños de una forma conveniente.

Cualquier número real positivo puede escribirse en la forma

$$a \times 10^n$$

donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero. Decimos que un número escrito así está en **notación científica**. Por ejemplo,

$$1,000,000 = 1 \times 10^6$$

y $0.0000000537 = 5.37 \times 10^{-8}$

La notación científica es más útil en química y física, donde ocurren con frecuencia números como

$$92,900,000 = 9.29 \times 10^7$$

y $0.00000000251 = 2.51 \times 10^{-10}$

estos números son la distancia promedio de la Tierra al Sol expresada en millas y el promedio de vida de una partícula lambda en segundos, respectivamente. Los números como éstos ciertamente son más fácil de escribir y de recordar cuando se dan en notación científica. Además, las expresiones que contienen números que están escritos en notación científica son simplificados más fácilmente. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Halle el valor de

$$\frac{(4000)^3(1,000,000)}{(20,000,000)^5}$$

Solución. Escribimos los números en notación científica y luego utilizamos las leyes exponenciales para simplificar la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{(4000)^3(1,000,000)}{(20,000,000)^5} &= \frac{(4 \times 10^3)^3(1 \times 10^6)}{(2 \times 10^7)^5} = \frac{(4^3)(10^3)^3 10^6}{2^5(10^7)^5} \\ &= \frac{64(10^9)(10^6)}{32(10^{35})} \\ &= 2 \times 10^{-20} = 0.00000000000000000002 \end{aligned}$$

La mayoría de las calculadoras convierten automáticamente un número en notación científica cuando éste es muy grande o muy pequeño como para ser expresado en forma decimal. Por ejemplo, el número 1.234×10^{15} requiere 16 dígitos para su forma decimal pero, ya que pocas calculadoras pueden expresar más de 10 dígitos, el signo de multiplicación y la base 10 no se muestran. Entonces, el número

$$1.234 \times 10^{15}$$

aparece como

1.234	15
-------	----

y el número

$$4.02 \times 10^{-12}$$

se expresa así

4.02	- 12
------	------

En muchas calculadoras es posible utilizar la notación científica cuando se ingresa un número. Consulte el manual de su calculadora para mayores detalles.

DIGITOS SIGNIFICATIVOS

La mayoría de las aplicaciones de las matemáticas en el mundo real incluyen medidas que están sujetas a error y, en consecuencia, se consideran aproximaciones. Podemos describir la exactitud de una aproximación estableciendo cuántos **dígitos significativos** tiene.

Supongamos que el resultado de una medida se exprese en notación científica

$$x = a \times 10^n, \text{ donde } 1 \leq a < 10$$

y se sabe que los dígitos en a son exactos (excepto, posiblemente, el último dígito, el cual puede ser aproximado si el número fue redondeado). Si a contiene k lugares decimales (es decir, k dígitos a la derecha del punto decimal), entonces se dice que x tiene $k + 1$ dígitos significativos. Según esta convención,

$$2.0285 \times 10^{23}$$

tiene cinco dígitos significativos y

$$9.30 \times 10^{-20}$$

tiene tres dígitos significativos.

EJEMPLO 4 _____

Un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año de la Tierra (365.25 días). La velocidad de la luz es 3.00×10^5 kilómetros por segundo (exacto para tres dígitos significativos). Halle la distancia de un año luz en kilómetros.

Solución. Para determinar la distancia de un año luz en kilómetros multiplicamos la velocidad de la luz en kilómetros por segundo por el número de segundos en un año de la Tierra. Primero hacemos la conversión de un año de la Tierra a segundos:

$$1 \text{ año de la Tierra} \approx 365.25 \text{ días} \times 24 \frac{\text{horas}}{\text{días}} \times 60 \frac{\text{minutos}}{\text{hora}} \times 60 \frac{\text{segundos}}{\text{minuto}}$$

Entonces, la distancia de un año luz en kilómetros está dada por

$$3.00 \times 10^5 \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 9.47 \times 10^{12} \text{ km}$$

Nota de advertencia: es error común simplificar $\sqrt{x^2}$ como x ; esto es válido solamente para x no negativa. Por ejemplo, si $x = -3$, vemos que

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

El resultado correcto lo da (ii) de las leyes de los radicales:

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

EJEMPLO 3

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

- (a) $\sqrt[3]{2x^2y^3}\sqrt[3]{4xz^3}$
 (b) $\frac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}}$

Solución. (Dé una razón para cada una de las igualdades que aparecen a continuación).

- (a) $\sqrt[3]{2x^2y^3}\sqrt[3]{4xz^3} = \sqrt[3]{8x^3y^3z^3} = \sqrt[3]{(2xyz)^3} = 2xyz$
 (b) $\frac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}} = \sqrt[4]{16a^8b^{16}} = \sqrt[4]{(2a^2b^4)^4} = 2a^2b^4$

Como acabamos de ver, las leyes de los radicales (iii) y (iv) nos permiten simplificar los productos y cocientes de los radicales que tienen el mismo índice. Con frecuencia podemos simplificar sumas y diferencias de radicales que tienen el mismo índice mediante el uso de las leyes distributivas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

- (a) $\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8}$
 (b) $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3}$

Solución

- (a) $\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8} = \sqrt{10} - 2x^2\sqrt{10} + 3x^2y^4\sqrt{10}$
 $= \sqrt{10}(1 - 2x^2 + 3x^2y^4)$
 (b) $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3} = 2x\sqrt[3]{x} + xy\sqrt[3]{x}$
 $= x\sqrt[3]{x}(2 + y)$

RACIONALIZACION DE RADICALES

Cuando quitamos los radicales del numerador o del denominador de un fraccionario, decimos que estamos **racionalizando**. En álgebra, normalmente racionalizamos el denominador pero, en cálculo, a veces es importante racionalizar el numerador. El procedimiento de racionalización implica la multiplicación del fraccionario por 1, escrito en forma especial. Por ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

EJEMPLO 5 _____

Racionalice el denominador de cada una de las siguientes expresiones:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Solución

(a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(b) Ya que $\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$, multiplicamos así:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

Nota de advertencia: en el ejemplo 5(b), sería incorrecto tratar de racionalizar $1/\sqrt[3]{2}$ multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^2} \neq \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

Si un fraccionario contiene una expresión como $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, usamos el hecho de que el producto de $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ y su conjugada $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ no contiene radicales:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\ &= \sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}\sqrt{x} - \sqrt{y}\sqrt{y} \\ &= (\sqrt{x})^2 - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} - (\sqrt{y})^2 \\ &= x - y \end{aligned}$$

El procedimiento se ilustra en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 6 _____

Racionalice el denominador de la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Solución. Para eliminar los radicales del denominador, multiplicamos la expresión dada por

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Así,
$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$$

EJEMPLO 7 _____

Elimine los radicales en el numerador de

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Solución. Ya que la conjugada del numerador es $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, procedemos así:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} &= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

El método de racionalización que se ilustra en el ejemplo 7 ocurre con frecuencia en cálculo.

EJEMPLO 8 _____

En las futuras estaciones espaciales se podrá crear la gravedad artificial mediante la rotación de la estación como una centrífuga gigantesca, rotación que producirá una fuerza contra los astronautas a bordo, que no se podrá distinguir de la gravedad. El promedio de rotación N , medido en rotaciones por segundo que se necesita para producir una aceleración de $a \text{ m/s}^2$ en un punto a r metros (m) del centro de rotación está dado por

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r}}$$

(Véase figura 12). Si el radio de la estación es de 150 metros, calcule el promedio de rotación necesario para producir el equivalente de la gravedad de la Tierra. (La aceleración debida a la gravedad en la Tierra es 9.8 m/s^2).



FIGURA 12

Solución. Identificamos a $a = 9.8$ y a $r = 150$ y obtenemos

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.8}{150}}$$

Al usar las teclas $\sqrt{\quad}$ y π en una calculadora, encontramos que

$$N \approx 0.04$$

Por tanto, se requieren aproximadamente 0.04 rotaciones por segundo (o su equivalente, 2.4 rotaciones por minuto) para producir el equivalente de la gravedad de la Tierra.

EJERCICIO 1.4

En todos los ejercicios suponga que todas las variables son positivas.

En los problemas 1 al 32, halle el valor numérico del radical.

1. $\sqrt[3]{-125}$

2. $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$

3. $\sqrt[3]{100,000}$

5. $\sqrt[4]{0.0001}$

7. $\sqrt[3]{-64/27}$

9. $\sqrt{\frac{1}{x^2y^4}}$

4. $\sqrt[3]{16}$

6. $\sqrt[3]{32}$

8. $\sqrt[3]{-1,000/8}$

10. $\sqrt{\frac{10a^2}{bc^4}}$

11. $\sqrt[3]{\frac{x^3y^6}{z^9}}$
 12. $\sqrt[4]{\frac{x^4y^{16}}{16z^8}}$
 13. $\sqrt{0.25x^4\sqrt{z^4}}$
 14. $\sqrt{8x^2yz^2}\sqrt{yzw}\sqrt{2zw^3}$
 15. $\sqrt[3]{4ab^3}\sqrt[3]{16a^2}$
 16. $\sqrt[4]{16x^5}\sqrt[4]{2x^3y^4}$
 17. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$
 18. $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$
 19. $\frac{\sqrt{7ab^2}}{\sqrt{49a}\sqrt{7b^4}}$
 20. $\frac{\sqrt[3]{4xy}\sqrt[3]{2xy^2}}{\sqrt[3]{x^2z^3}}$
 21. $\sqrt{\sqrt{0.0016}}$
 22. $\sqrt{2\sqrt{4}}$
 23. $\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}$
 24. $\sqrt{x^3\sqrt{(x^2y)^2}}$
 25. $(-\sqrt{xyz^5})^2$
 26. $\sqrt{(-2x^3y)^2}$
 27. $\sqrt{(-abc)^2}$
 28. $(-\sqrt[3]{-27x/xy^3})^3$
 29. $\sqrt[4]{(-4r^2s^6)^2}$
 30. $\sqrt[3]{-(p^{-1}q^2)^3}$
 31. $\sqrt{\frac{-16x^2}{-8x^{-2}}}$
 32. $\sqrt[3]{\frac{(-2x)^3}{-z^6}}$

En los problemas 33 al 44, racionalice el denominador de la expresión.

33. $\frac{1}{\sqrt{27}}$
 34. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
 35. $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$
 36. $\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$
 37. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$
 38. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$
 39. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$
 40. $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$
 41. $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$
 42. $\frac{1}{\sqrt[3]{xy}}$
 43. $\frac{4}{\sqrt{x-1}}$
 44. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$

En los problemas 45 al 48, racionalice el numerador de la expresión.

45. $\frac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}$
 46. $\frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$
 47. $\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$
 48. $\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$ [Sugerencia: primero combine los términos en el numerador].

En los problemas 49 al 56, combine los radicales y simplifique.

49. $4\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}$
 50. $\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{8}$
 51. $4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}$
 52. $\sqrt[3]{xy}+3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{xz}$
 53. $3\sqrt{8x^3}-\sqrt{18xy^2}+\sqrt{32x^3}$
 54. $\sqrt[3]{x^4yz}-\sqrt[3]{xy^4z}+\sqrt[3]{xyz^4}$
 55. $\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{a^3}{b}}$
 56. $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}-\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}-\sqrt[3]{\frac{xy}{y^2}}$

En los problemas 57 al 60, escriba una fórmula para la cantidad que se da. Use notación radical.

57. La longitud s del lado de un cuadrado es la raíz cuadrada del área A .
 58. La longitud s de la arista de un cubo es la raíz cúbica del volumen V .
 59. La longitud c de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las longitudes a y b de los otros dos lados.
 60. La velocidad v de un satélite en una órbita circular alrededor de la Tierra es igual a la raíz cuadrada del producto del radio r de la órbita y la aceleración de caída libre g en la órbita.
 61. Si un satélite da vueltas alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio $r = 6.70 \times 10^6$ m, halle su velocidad v si $v = R\sqrt{g/r}$, donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de caída libre debida a la gravedad, en la superficie de la Tierra. (Véase figura 13). Use los valores $R = 6.40 \times 10^6$ m y $g = 9.80$ m/s².

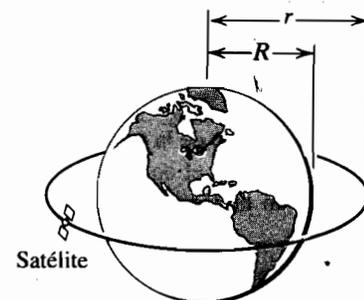


FIGURA 13

62. De acuerdo con la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un objeto que se mueve a velocidad v es dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz. Halle la masa de un electrón que viaja a la velocidad de $0.6c$ si su masa en reposo es 9.1×10^{-31} kg.

En los problemas 63 al 70, responda falso o verdadero.

63. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, para $a, b \geq 0$ ____
 64. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, para $a, b \geq 0$ ____
 65. $\sqrt{a^2} = a$, para cualquier número real a ____
 66. $(\sqrt{a})^2 = a$, para cualquier número real a ____
 67. Si n es impar, $\sqrt[n]{x}$ es definida para cualquier número real x . ____
 68. Si n es par, $\sqrt[n]{x}$ es definida para cualquier número real x . ____
 69. $\sqrt{x^2} = \sqrt{x}$, para cualquier número real x . ____
 70. $\sqrt{a^2/b^2} = |a/b|$ para cualquiera de los números reales a y b , $b \neq 0$ ____

1.5 Exponentes racionales

El concepto de la raíz enésima de un número nos capacita para ampliar la definición de x^n de exponentes enteros a exponentes racionales; y, como veremos, con frecuencia es más fácil trabajar con **exponentes racionales que con radicales**.

Para cualquier número real x y para cualquier entero positivo n , definimos

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

dado que $\sqrt[n]{x}$ sea un número real. Así, $x^{1/n}$ es simplemente otra forma de designar la raíz enésima principal de x . Además, definimos

$$x^{m/n} = (x^{1/n})^m$$

para cualquier entero m tal que m/n sea la mínima expresión. Se necesita esta última definición si la ley de exponentes $(x^r)^s = x^{rs}$ va a aplicarse a exponentes racionales.

EJEMPLO 1

- (a) $(25)^{1/2} = \sqrt{25} = 5$
- (b) $(64)^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$

EJEMPLO 2

- (a) $(0.09)^{5/2} = [(0.09)^{1/2}]^5 = (\sqrt{0.09})^5$
 $= (0.3)^5 = 0.00243$
- (b) $(-27)^{-5/3} = [(-27)^{1/3}]^{-5} = [\sqrt[3]{-27}]^{-5}$
 $= (-3)^{-5} = -\frac{1}{243}$

Para $x > 0$, se puede demostrar que

$$(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m = x^{m/n}$$

Sin embargo, para $x < 0$ y ciertas opciones de m y n , $x^{1/n}$ no es un número real y, en consecuencia, $(x^{1/n})^m$ no está definida, aunque la expresión $(x^m)^{1/n}$ podría estar definida.

De otra parte, si $x^{m/n}$, $(x^{1/n})^m$ y $(x^m)^{1/n}$ cada uno representa un número real, entonces todos son iguales. Como lo demuestra el siguiente ejemplo, cuando estas tres formas son iguales, una de ellas puede ser más útil que las otras dos al evaluar ciertas expresiones.

EJEMPLO 3

Aunque $(125)^{2/3} = ((125)^{1/3})^2 = ((125)^2)^{1/3}$, la evaluación de

$$((125)^{1/3})^2 = (\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25$$

se puede hacer mentalmente, mientras que

$$((125)^2)^{1/3} = (15,625)^{1/3} = \sqrt[3]{15,625} = 25$$

podría necesitar el uso de la calculadora

El siguiente ejemplo ilustra un caso en el cual $x^{m/n}$, $(x^m)^{1/n}$, y $(x^{1/n})^m$ no son equivalentes.

EJEMPLO 4

Compare (a) $x^{m/n}$, (b) $(x^m)^{1/n}$, y (c) $(x^{1/n})^m$ para $x = -9$, $m = 2$ y $n = 2$

Solución. Al sustituir $x = -9$, $m = 2$ y $n = 2$, encontramos que:

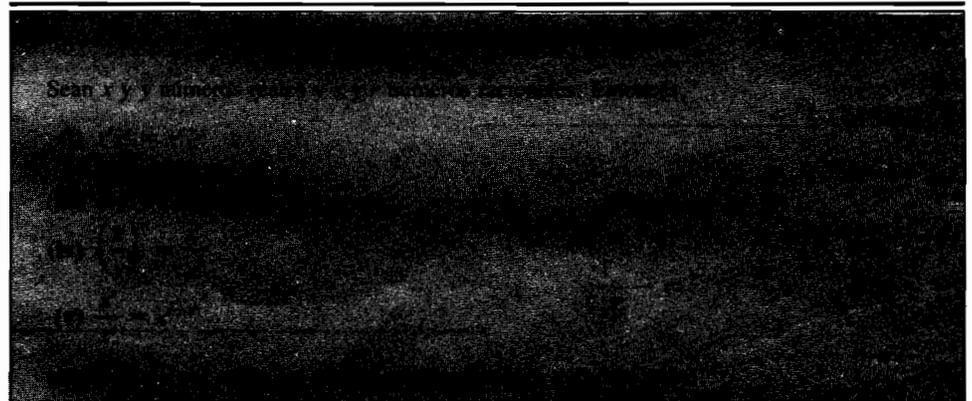
(a) $x^{m/n} = (-9)^{2/2} = (-9)^1 = -9$

(b) $(x^m)^{1/n} = [(-9)^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

(c) $(x^{1/n})^m = [(-9)^{1/2}]^2 = (\sqrt{-9})^2$, que no es un número real, ya que contiene la raíz cuadrada de un número negativo.

LEYES DE LOS EXPONENTES

Las leyes de los exponentes que se dieron para los exponentes enteros en la sección 1.3 también son verdaderas para los exponentes racionales.



Como se muestra en los ejemplos siguientes, estas leyes nos permiten simplificar expresiones algebraicas. Para el resto de esta sección consideramos que todas las bases variables representan números positivos, de modo que todas las potencias racionales están definidas.

EJEMPLO 5

Por (i)



$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (3x^{1/2})(2x^{1/5}) &= 3(2)x^{1/2}x^{1/5} = 6x^{1/2+1/5} \\ &= 6x^{(5+2)/10} = 6x^{7/10} \end{aligned}$$

Por (iii) Por (ii)
 ↓ ↓

$$(b) (a^2b^{-8})^{1/4} = (a^2)^{1/4}(b^{-8})^{1/4} = a^{2/4}b^{-8/4}$$

$$= a^{1/2}b^{-2} = \frac{a^{1/2}}{b^2}$$

Por (v)
↓

$$(c) \frac{x^{2/3}y^{1/2}}{x^{1/4}y^{3/2}} = x^{2/3-1/4}y^{1/2-3/2} = x^{(8-3)/12}y^{-1} = \frac{x^{5/12}}{y}$$

Por (iv) Por (iii) Por (ii)
 ↓ ↓ ↓

$$(d) \left(\frac{3x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 = \frac{(3x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} = \frac{3^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} = \frac{27x^{9/4}}{y}$$

EJEMPLO 6 _____

Simplifique

$$\left(\frac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2 \left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right)$$

Solución

$$\left(\frac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2 \left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \left(\frac{25r^{3/2}}{s^{2/3}}\right) \left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \left(\frac{50r^0}{s^{7/6}}\right) = \frac{50}{s^{7/6}}$$

Como veremos en los dos ejemplos siguientes, se pueden simplificar ciertas expresiones radicales más fácilmente si se vuelven a escribir usando exponentes racionales.

EJEMPLO 7 _____

Escriba $\sqrt{x\sqrt[4]{x}}$ como un solo radical.

Solución. Volvemos a escribir $\sqrt{x\sqrt[4]{x}}$ usando exponentes racionales y luego simplificamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x\sqrt[4]{x}} &= (x\sqrt[4]{x})^{1/2} = (x \cdot x^{1/4})^{1/2} \\ &= (x^{5/4})^{1/2} = x^{5/8} = \sqrt[8]{x^5} \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 _____

Escriba $\sqrt[3]{16}/\sqrt{2}$ como un solo radical.

Solución. Volvemos a escribir la expresión usando exponentes racionales:

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}} = \frac{16^{1/3}}{2^{1/2}}$$

Luego, debemos encontrar una base común para que podamos usar las propiedades de los exponentes racionales para simplificar la expresión. Ya que $16 = 2^4$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{16^{1/3}}{2^{1/2}} &= \frac{(2^4)^{1/3}}{2^{1/2}} = \frac{2^{4/3}}{2^{1/2}} = 2^{4/3-1/2} = 2^{5/6} \\ &= \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}\end{aligned}$$

EJEMPLO 9

Simplificar $(8,000,000)^{2/3}(\sqrt[4]{0.0001r^8t^{12}})$.

Solución. Escribimos los números en notación científica y usamos las leyes de los exponentes:

$$\begin{aligned}(8,000,000)^{2/3}\sqrt[4]{0.0001r^8t^{12}} &= (8 \times 10^6)^{2/3}(1 \times 10^{-4} \cdot r^8t^{12})^{1/4} \\ &= 8^{2/3}(10^6)^{2/3}(10^{-4})^{1/4}(r^8)^{1/4}(t^{12})^{1/4} \\ &= (\sqrt[3]{8})^2(10^4)(10^{-1})r^2t^3 \\ &= (4 \times 10^3)r^2t^3 \\ &= 4000r^2t^3\end{aligned}$$

EJEMPLO 10

Supongamos que parte de una propiedad costaba p dólares hace n años. Si ahora cuesta q dólares, entonces el promedio de la tasa de inflación anual r es dado por

$$r = \left(\frac{q}{p}\right)^{1/n} - 1$$

Halle el promedio de la tasa de inflación anual para una casa que ahora vale US\$500,000 si hace 12 años se compró por US\$80,000.

Solución. Primero identificamos $p = 80,000$, $q = 500,000$ y $n = 12$. Al sustituir, entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}r &= \left(\frac{500,000}{80,000}\right)^{1/12} - 1 \\ &= 6.25^{1/12} - 1\end{aligned}$$

Al usar la tecla y^x en una calculadora con $y = 6.25$ y $x = 1/12$, encontramos

$$r \approx 0.165$$

Por tanto, el promedio de la tasa de inflación anual para esta propiedad ha sido 16.5%

En la sección 5.1 indicaremos cómo se pueden definir las expresiones con exponentes irracionales tales como $x^{\sqrt{2}}$ o x^π . Las leyes de los exponentes también se pueden aplicar a los exponentes irracionales.

EJERCICIO 1.5

Para todos los ejercicios siguientes suponga que todas las variables son positivas.

En los problemas 1 al 8, vuelva a escribir la expresión usando exponentes racionales.

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| 1. $\sqrt[3]{ab}$ | 2. $\sqrt[3]{7x}$ |
| 3. $\frac{1}{(\sqrt{x})^4}$ | 4. $\frac{1}{(\sqrt[3]{a})^3}$ |
| 5. $\sqrt{x+y}$ | 6. $\sqrt{a^2 + b^2}$ |
| 7. $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ | 8. $\sqrt{x^2 - y^2}$ |

En los problemas 9 al 16, vuelva a escribir la expresión usando notación radical.

- | | |
|-------------------------|---------------------|
| 9. $a^{2/3}$ | 10. $2a^{1/3}$ |
| 11. $(3a)^{2/3}$ | 12. $3a^{2/3}$ |
| 13. $3 + a^{2/3}$ | 14. $(3 + a)^{2/3}$ |
| 15. $\frac{3}{a^{2/3}}$ | 16. $(3a)^{-3/2}$ |

En los problemas 17 al 22, encuentre los números indicados.

17. (a) $(49)^{1/2}$; (b) $(49)^{-1/2}$
 18. (a) $(-8)^{1/3}$; (b) $(-8)^{-1/3}$
 19. (a) $(0.04)^{7/2}$; (b) $(0.04)^{-7/2}$
 20. (a) $(\frac{1}{8})^{2/3}$; (b) $(\frac{1}{8})^{-2/3}$
 21. (a) $(27)^{7/3}$; (b) $(-27)^{-7/3}$
 22. (a) $(-\frac{8}{18})^{3/4}$; (b) $(-\frac{8}{18})^{-3/4}$

En los problemas 23 al 48, simplifique y elimine cualquier exponente negativo.

- | | |
|--|--|
| 23. $(4x^{1/2})(3x^{1/3})$ | 24. $(3w^{3/2})(7w^{5/2})$ |
| 25. $a^{3/2}(4a^{2/3})$ | 26. $(-5x^3)x^{5/3}$ |
| 27. $x^{1/2}x^{1/4}x^{1/8}$ | 28. $(2a^{1/2})(2a^{1/3})(2a^{1/6})$ |
| 29. $(a^2b^4)^{1/4}$ | 30. $(100x^4)^{-3/2}$ |
| 31. $(25x^{1/3}y)^{3/2}$ | 32. $(4x^4y^{-6})^{1/2}$ |
| 33. $\frac{cd^{1/3}}{c^{1/3}d}$ | 34. $\frac{4x^{1/2}}{(8x)^{1/3}}$ |
| 35. $\left(\frac{2x^{1/2}}{z^{-1/6}y^{2/3}}\right)^6$ | 36. $\left(\frac{-y^{1/2}}{y^{-1/2}}\right)^{-1}$ |
| 37. $((-27a^3b^{-6})^{1/3})^2$ | 38. $a^{1/3}[a^{2/3}(ab)^{5/3}b^{-1/3}]^{-1/2}$ |
| 39. $(x^{1/2})(x^{-1/2})^2x^{1/2}$ | 40. $y^{1/4}[y^{1/4}(y^{1/2})^{-4}]^{-1/2}$ |
| 41. $[5x^{2/3}(x^{4/3})^{1/4}]^3$ | 42. $[2z^{1/2}(2z^{1/2})^{-1/2}]^{1/2}$ |
| 43. $\frac{[a^{-1/3}b^{2/9}c^{1/6}]^9}{[a^{1/6}b^{-2/3}]^6}$ | 44. $\left[\frac{x^{1/5}y^{3/10}}{x^{-2/5}y^{1/2}}\right]^{-10}$ |
| 45. $\frac{(p^{1/3}q^{1/2})^{-1}}{(p^{-1}q^{-2})^{1/2}}$ | 46. $\left(\frac{2x^{1/2}}{x^{-3/2}}\right)\left(\frac{1}{4x}\right)^{-1/2}$ |
| 47. $\left(\frac{r^2s^{-4}t^6}{r^{-4}s^2t^6}\right)^{1/6}$ | 48. $\left(\frac{-x^{1/2}y^{1/4}}{8x^2y^4}\right)^{1/3}$ |

En los problemas 49 al 56, vuelva a escribir la expresión como un solo radical.

- | | |
|--|---|
| 49. $\sqrt{5}\sqrt[3]{2}$ | 50. $\sqrt[3]{4}\sqrt{2}$ |
| 51. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}}$ | 52. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ |
| 53. $\sqrt{x}\sqrt{x}$ | 54. $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ |
| 55. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$ | 56. $\frac{\sqrt[3]{y^2}\sqrt{y}}{\sqrt[4]{y}}$ |

En los problemas 57 al 60, use notación científica para simplificar la expresión.

57. $\sqrt{0.000004}(8,000)^{2/3}(100,000)^{4/5}$
 58. $\frac{\sqrt{40,000}\sqrt[3]{8,000}}{(0.000004)^{3/2}}$
 59. $(\sqrt[3]{\sqrt{0.000001}x^6y^{12}})^5$
 60. $\sqrt[4]{(160,000a^{8/3})^3}$

61. El tiempo que requiere un péndulo simple para una oscilación completa es aproximadamente $T \approx 2\pi(L/g)^{1/2}$, donde L es la longitud de la cuerda del péndulo y g es la constante gravitacional. Use calculadora para aproximar el periodo de un péndulo que tiene una cuerda de 10 pulgadas si el valor de g es 32 pies/segundo². Use unidades consistentes.
 62. El radio r de una esfera con volumen V está dado por $r = (3V/4\pi)^{1/3}$. Use calculadora para hallar el radio de una esfera que tiene de volumen 100 cm³ (centímetros cúbicos).
 63. La velocidad del sonido v medida en pies por segundo a través del aire de temperatura t grados Celsius está dada por

$$v = \frac{1,087(273 + t)^{1/2}}{16.52}$$

Use calculadora para hallar la velocidad del sonido a través del aire cuando la temperatura es de 20°C.

64. Un arroyo de corriente rápida puede transportar partículas más grandes que uno de corriente lenta. Los estudios de laboratorio



han demostrado que la velocidad crítica v_c del agua que se necesita para que una partícula arranque en la cuenca de un arroyo está dada por la fórmula

$$v_c = 0.152d^{4/9}(G - 1)^{1/2}$$

donde v se mide en metros por segundo, d es el diámetro de la partícula en milímetros y G es la gravedad específica de la partícula. Halle la velocidad crítica que se necesita para empezar a mover un grano de feldespato que tiene una gravedad específica de 2.56 y un diámetro de 3 mm.

En los problemas 65 al 74, responda falso o verdadero. (Suponga que todas las variables representan números positivos).

65. $(z^2 + 25)^{1/2} = z + 5$ ___

66. $36x^{1/2} = 6\sqrt{x}$ ___

67. $((-4)^2)^{1/2} = 4$ ___

68. $[(-4)^{1/2}]^2 = -4$ ___

69. $((-1)^{-1})^{-1} = -1$ ___

70. $(-1)^{-1}(-1)^{-1} = 1$ ___

71. $x^{-3/2} = \frac{1}{x^{2/3}}$ ___

72. $x^{2/3}y^{-2/3} = 1$ ___

73. $(b^{4/3})^{3/4} = b$ ___

74. $\frac{p^{1/2}}{p^{-1/2}} = p$ ___

1.6 Polinomios y productos notables

VARIABLES

Ya hemos encontrado conveniente usar letras tales como x o y para representar números; cada símbolo se llama **variable**. Una **expresión algebraica** es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces en un grupo de variables y números reales. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} - \pi, \quad \frac{4xy - x}{x + y}, \quad y \quad \sqrt[3]{\frac{7y - 3}{x^5y^{-2} + z}}$$

A veces una expresión algebraica representa un número real solamente para ciertos valores de una variable. Al considerar la expresión \sqrt{x} , encontramos que debemos tener $x > 0$ para que \sqrt{x} represente un número real. Cuando trabajamos con expresiones algebraicas, suponemos que las variables son restringidas para que la expresión represente un número real. El conjunto de valores permisibles para la variable se llama el **dominio** de la variable. Así, el dominio de la variable en \sqrt{x} es el conjunto de todos los números reales no negativos $\{x|x \geq 0\}$, y para $3/(x + 1)$ el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = -1$; es decir, $\{x|x \neq -1\}$.

Si números específicos se sustituyen por las variables en una expresión algebraica, el número real que resulta se llama **valor** de la expresión. Por ejemplo, el valor de $x^2 + 2y$ cuando $x = 1$ y $y = 2$ es $(1)^2 + 2(2) = 5$.

POLINOMIOS

Ciertas expresiones algebraicas tienen nombres especiales. Un **monomio** en una variable es cualquier expresión algebraica de la forma ax^n , donde a es un número real, x es una variable y n es un entero no negativo. El número a se llama **coeficiente** del monomio y n se llama el **grado**. Por ejemplo, $17x^5$ es un monomio de grado 5 con coeficiente 17. La suma de dos monomios, tal como $6x + 3x^5$, recibe el nombre de **binomio**. Un **polinomio** es cualquier suma finita de monomios. Más formalmente tenemos la siguiente definición.

DEFINICION 4

Un polinomio de grado n en la variable x es cualquier expresión algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

donde n es un entero no negativo y $a_i, i = 0, 1 \dots n$ son números reales.

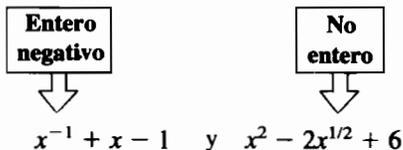
Ya que un polinomio en x representa un número real para cualquier número real x , el dominio de un polinomio es el conjunto de todos los números reales R .

Los monomios $a_i x^i$ en el polinomio se llaman **términos** del polinomio y el coeficiente a_n de la potencia más alta de x se llama **coeficiente principal**. Por ejemplo, $6x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 1$ es un polinomio de grado 5 con coeficiente principal 6. Los términos de este polinomio son $6x^5, -7x^3, 3x^2$ y -1 . El número a_0 se llama **término constante** del polinomio. Puede ser 0, como en el polinomio $6x^2 - x$. Si todos los coeficientes de un polinomio son cero, entonces el polinomio se llama **polinomio cero** y se denota con 0.

Los polinomios se pueden clasificar por sus grados, aunque al polinomio cero no se le ha asignado ningún grado. Se usan nombres especiales para describir los polinomios de menor grado, según la lista que aparece en la siguiente tabla.

POLINOMIO	GRADO	FORMA ESTANDAR	EJEMPLO
Constante	0	$a_0 (a_0 \neq 0)$	4
Lineal	1	$a_1 x + a_0 (a_1 \neq 0)$	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 (a_2 \neq 0)$	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
Cúbico	3	$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 (a_3 \neq 0)$	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
Enésimo grado	n	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 (a_n \neq 0)$	$x^n - 1$

Nota de advertencia: en cada término en un polinomio, el exponente de la variable debe ser un entero no negativo. Por ejemplo:



no son polinomios. Sin embargo,

$$3^{-1}x^2 + 4 \quad \text{y} \quad 0.5x^3 + 6^{1/3}x$$

son polinomios, ya que los coeficientes pueden ser cualesquiera de los números reales.

EJEMPLO 1

Determine cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios. Si la expresión es un polinomio, dé su grado y su coeficiente principal.

- (a) $x^2 + \sqrt{x} - 1$
- (b) $\sqrt{2} - x + 3x^2 - 17x^8$
- (c) $7x^5 - x^2 + \frac{1}{2}x + x^{-2}$
- (d) $x^4 - x^2$

Solución. Ya que la variable en cada término debe ser elevada a una potencia entera no negativa, (a) y (c) no son polinomios. Los polinomios en (b) y en (d) son del grado 8 y del grado 4, respectivamente. Al escribir (b) en la forma estándar $-17x^8 + 3x^2 - x + \sqrt{2}$ vemos que el coeficiente principal es -17 . Ya que (d) está en la forma estándar, el coeficiente principal es 1.

EL ALGEBRA DE LOS POLINOMIOS

Ya que cada símbolo en un polinomio representa a un número real, podemos usar las propiedades del sistema de los números reales que se analizaron en la sección 1.1 para sumar, restar y multiplicar polinomios.

EJEMPLO 2

Encuentre la suma de los polinomios $x^4 - 3x^2 + 7x - 8$ y $2x^4 + x^2 + 3x$.

Solución. Al reorganizar los términos y al usar las propiedades distributivas, tenemos

$$\begin{aligned} (x^4 - 3x^2 + 7x - 8) + (2x^4 + x^2 + 3x) & \\ &= x^4 + 2x^4 - 3x^2 + x^2 + 7x + 3x - 8 \\ &= (1 + 2)x^4 + (-3 + 1)x^2 + (7 + 3)x - 8 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 10x - 8 \end{aligned}$$

El ejemplo 2 indica que podemos sumar dos polinomios en x mediante la suma de los coeficientes de potencias iguales. Algunos estudiantes encuentran que es más fácil sumar polinomios por la alineación de los términos con potencias iguales de x en un formato vertical, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^2 + 7x - 8 \\ 2x^4 + x^2 + 3x \\ \hline 3x^4 - 2x^2 + 10x - 8 \end{array}$$

La elección del formato por usar es simplemente un asunto de preferencia personal. Generalmente, el formato vertical requiere más espacio; por tanto, después de esta sección, usaremos el formato horizontal.

Como lo muestra el siguiente ejemplo, la resta de polinomios se lleva a cabo de una manera similar a la suma.

EJEMPLO 3

Reste $2x^3 - 3x - 4$ de $x^3 + 5x^2 - 10x + 6$.

Solución. Al restar términos con potencias iguales de x , tenemos

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 - 10x + 6 \\ -(2x^3 - 3x - 4) \\ \hline -x^3 + 5x^2 - 7x + 10 \end{array}$$

Para llevar a cabo esta resta usando un formato horizontal, procedemos así:

$$\begin{aligned} (x^3 + 5x^2 - 10x + 6) - (2x^3 - 3x - 4) & \\ &= x^3 + 5x^2 - 10x + 6 - 2x^3 + 3x + 4 && \text{(Propiedad distributiva)} \\ &= (x^3 - 2x^3) + 5x^2 + (-10x + 3x) + (6 + 4) && \text{(Agrupación de términos iguales)} \\ &= -x^3 + 5x^2 - 7x + 10 \end{aligned}$$

Nota de advertencia: un error muy común cuando se restan polinomios en forma horizontal es no aplicar la propiedad distributiva. Se debe cambiar el signo de cada término del polinomio que se está restando.

$$\begin{aligned} -(2x^3 - 3x - 4) &= (-1)(2x^3 - 3x - 4) \\ &= (-1)(2x^3) + (-1)(-3x) + (-1)(-4) \\ &= -2x^3 + 3x + 4 \neq -2x^3 - 3x - 4 \end{aligned}$$

Para hallar el **producto** de dos polinomios, usamos las propiedades distributivas y las leyes de los exponentes, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

Multiplique $x^3 + 3x - 1$ y $2x^2 - 4x + 5$.

Solución

$$\begin{aligned} (x^3 + 3x - 1)(2x^2 - 4x + 5) &= (x^3 + 3x - 1)(2x^2) + (x^3 + 3x - 1)(-4x) + (x^3 + 3x - 1)(5) \\ &= (2x^5 + 6x^3 - 2x^2) + (-4x^4 - 12x^2 + 4x) + (5x^3 + 15x - 5) \end{aligned}$$

Combinando términos semejantes, encontramos el producto

$$2x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 19x - 5$$

Como en el ejemplo 4, cuando se multiplican dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio. Se puede usar un formato vertical (con tal que conservemos los términos semejantes alineados), de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x - 1 \\ 2x^2 - 4x + 5 \\ \hline 5x^3 - 5 \\ - 4x^4 - 12x^2 + 4x \\ 2x^5 + 6x^3 - 2x^2 \\ \hline 2x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 19x - 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow 5(x^3 + 3x - 1) \\ \leftarrow -4x(x^3 + 3x - 1) \\ \leftarrow 2x^2(x^3 + 3x - 1) \end{array}$$

POLINOMIOS CON VARIAS VARIABLES

Hasta ahora hemos considerado polinomios con una variable. Podemos tener polinomios con x o con otras variables, tal como $2y^2 - y + 5$ o $\sqrt{2}z^3 - 17$, o con dos o más variables. Un **polinomio con las dos variables x y y** es una suma de monomios (o términos) de la forma $ax^n y^m$, donde a es un número real, x y y son las variables y n y m son enteros no negativos. Ejemplos:

$$5x - 2y, \quad x^2 + xy - y^2, \quad 5x^3y + xy^2 - x + \frac{7}{2}$$

Un polinomio con tres o más variables se puede definir de manera similar. Sumamos, restamos y multiplicamos polinomios de varias variables usando las propiedades de los números reales así como lo hicimos para los polinomios con una variable.

EJEMPLO 5

Sume $xy^3 + x^3y - 3$ y $x^3 - y^3 + 3xy^3 - x^3y$.

Solución

$$\frac{xy^3 + x^3y - 3}{x^3 - y^3 + 3xy^3 - x^3y} = \frac{xy^3 + x^3y - 3}{x^3 - y^3 + 4xy^3 + 0x^3y - 3} = x^3 - y^3 + 4xy^3 - 3$$

EJEMPLO 6

Multiplique $x + y$ y $x^2 - xy + y^2$

Solución

$$\begin{aligned} (x + y)(x^2 - xy + y^2) &= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2) \\ &= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + y^3 \end{aligned}$$

Podemos usar el formato vertical alternativamente

$$\begin{array}{r} x^2 - xy + y^2 \\ \underline{x + y} \\ x^2y - xy^2 + y^3 \\ \underline{x^3 - x^2y + xy^2} \\ x^3 + 0x^2y + 0xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow y(x^2 - xy + y^2) \\ \leftarrow x(x^2 - xy + y^2) \end{array}$$

Como muestra el ejemplo 6, cuando multiplicamos polinomios con varias variables, es más fácil identificar términos semejantes si seleccionamos un orden para las variables y lo usamos consistentemente en cada término.

La división por un monomio usa las propiedades de las fracciones y las leyes de los exponentes, como se muestra en el ejemplo 7. La división de dos polinomios es más complicada y se trata en el capítulo 4.

EJEMPLO 7

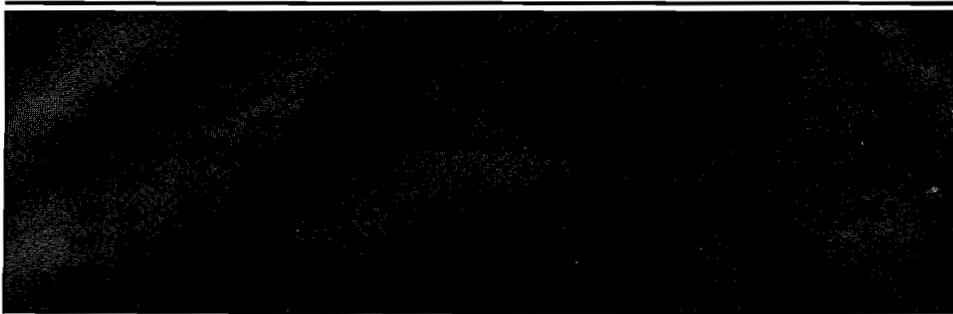
Divida $15xy^3 + 25x^2y^2 - 5xy^2$ por $5xy^2$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{15xy^3 + 25x^2y^2 - 5xy^2}{5xy^2} &= \frac{15xy^3}{5xy^2} + \frac{25x^2y^2}{5xy^2} - \frac{5xy^2}{5xy^2} \\ &= 3y + 5x - 1 \end{aligned}$$

PRODUCTOS NOTABLES

Ciertos productos de binomios ocurren tan frecuentemente que se debe aprender a reconocerlos. A continuación se da una lista de estos **productos notables**. Pueden verificarse ejecutando las multiplicaciones indicadas (véanse problemas 87 - 93):



En cada uno de estos productos notables, X o Y se pueden reemplazar por otra variable, un número o por una expresión más complicada.

EJEMPLO 8 _____

Encuentre cada uno de los siguientes productos.

(a) $(2x + 3)^2$ $4x^2 + 12x + 9$

(b) $\left(4x - \frac{1}{x^2}\right)^3$

Solución

(a) A partir de (i) con X reemplazada por $2x$ y Y reemplazada por 3 , tenemos:

$$\begin{aligned} (2x + 3)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3) + (3)^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$$

(b) A partir de (v) con X reemplazada por $4x$ y Y reemplazada por $1/x^2$, tenemos

$$\begin{aligned} \left(4x - \frac{1}{x^2}\right)^3 &= (4x)^3 - 3(4x)^2\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3(4x)\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 \\ &= 64x^3 - 48 + \frac{12}{x^3} - \frac{1}{x^6} \end{aligned}$$

EJEMPLO 9 _____

Podemos aplicar (iii) dos veces al producto

$$\begin{aligned} (2x + y)(2x - y)(4x^2 + y^2) &= [(2x + y)(2x - y)](4x^2 + y^2) \\ &= (4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2) \\ &= 16x^4 - y^4 \end{aligned}$$

EJEMPLO 10 _____

Si observamos que el producto

$$(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$$

tiene la forma (vii), tenemos que

$$\begin{aligned} (x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2) &= [(x^2 - y)][(x^2)^2 + (x^2)y + y^2] \\ &= (x^2)^3 - y^3 \\ &= x^6 - y^3 \end{aligned}$$

Cuando multiplicamos dos polinomios lineales, encontramos la siguiente fórmula de producto notable:

$$(viii) (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Esta regla de producto puede lograrse mentalmente según el esquema que se presenta en la figura 14.

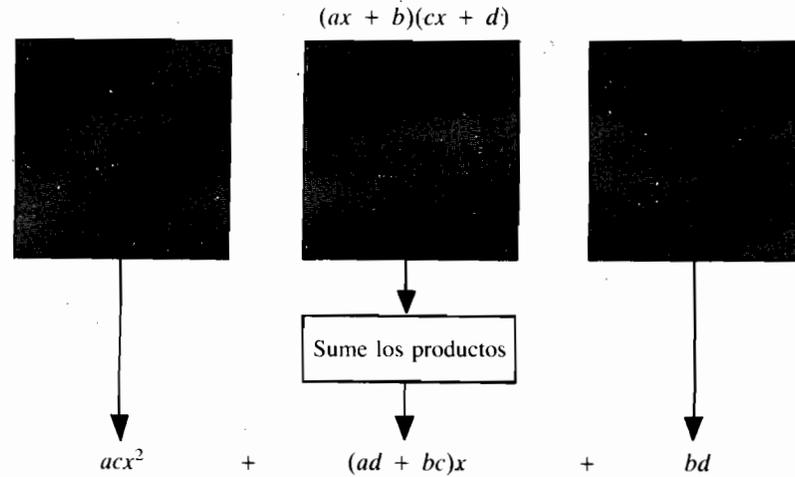


FIGURA 14

EJEMPLO 11

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{3}x - 2\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) &= \frac{2}{3}(1)x^2 + \left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + (-2)(1)\right]x + (-2)\left(-\frac{1}{3}\right) \\
 &= \frac{2}{3}x^2 + \left(-\frac{2}{9} - 2\right)x + \frac{2}{3} \\
 &= \frac{2}{3}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

A primera vista, algunos productos parecen no ser de la forma

$$(ax + b)(cx + d)$$

cuando, de hecho, sí lo son. Sin embargo, con práctica cualquiera llegará a adquirir habilidad para reconocerlos.

EJEMPLO 12

$$\begin{aligned}
 (5x^2 + 2)(x^2 - 4) &= 5(1)(x^2)^2 + [5(-4) + 2(1)]x^2 + 2(-4) \\
 &= 5x^4 + (-20 + 2)x^2 - 8 \\
 &= 5x^4 - 18x^2 - 8
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 13

$$\begin{aligned}
 (2\sqrt{x} + 1)(4\sqrt{x} - 3) &= 2(4)(\sqrt{x})^2 + [2(-3) + 1(4)]\sqrt{x} + 1(-3) \\
 &= 8x - 2\sqrt{x} - 3
 \end{aligned}$$

Cuanto más familiarizados nos encontremos con estos productos notables (i) - (viii), más fácilmente entenderemos la factorización, que se tratará en la siguiente sección.

94. Escriba un polinomio en las variables r y s para el área de la región (un rectángulo con extremos semicirculares) que se muestra en la figura 15.

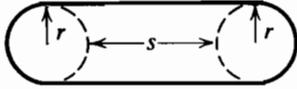


FIGURA 15

95. Escriba polinomios en la forma estándar para (a) el volumen y (b) el área de la superficie del objeto que se muestra en la figura 16.

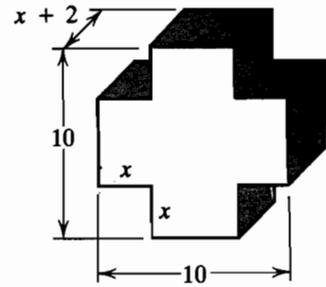


FIGURA 16

96. Si se suman un polinomio de grado 2 y uno de grado 3, ¿cuál es el grado del polinomio resultante?, ¿cuál es el grado de su producto?
97. ¿Qué se puede decir acerca del grado de la suma de dos polinomios de grado n ?, ¿de su producto y de su diferencia?

1.7 Factorización

En la sección anterior multiplicamos polinomios. Ahora, invertimos el procedimiento y tratamos de escribir un polinomio como producto de otros polinomios. Este proceso se llama **factorización** y cada polinomio en el producto se llama **factor** del polinomio original. Por ejemplo, $3x^2$ y $x^2 + 2$ son factores de $3x^4 + 6x^2$ porque

$$3x^4 + 6x^2 = 3x^2(x^2 + 2)$$

Generalmente, buscamos factores polinómicos de grado 1 ó mayores.

Al factorizar, a veces podemos reemplazar una expresión complicada por un producto de factores lineales. Un ejemplo es:

$$5x^3 + 6x^2 - 29x - 6 = (5x + 1)(x - 2)(x + 3)$$

Por tanto, la factorización puede ser muy útil para simplificar expresiones. Como veremos en el capítulo 2, es particularmente útil para resolver ecuaciones. En general, el primer paso en la factorización de cualquier expresión algebraica es determinar si los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 1

Factorice $6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10\sqrt{2}xy^3 - 2xy^2$.

Solución. Ya que $2xy^2$ es un factor común de los términos, tenemos que

$$\begin{aligned} 6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10\sqrt{2}xy^3 - 2xy^2 &= 2xy^2(3x^3y^2) - 2xy^2(2x) + 2xy^2(5\sqrt{2}y) - 2xy^2(1) \\ &= 2xy^2(3x^3y^2 - 2x + 5\sqrt{2}y - 1) \end{aligned}$$

Cuando los términos de una expresión no tienen un factor común, aún podrían factorizarse *agrupando* los términos de una manera apropiada.

EJEMPLO 2 _____

Factorice $x^2 + 2xy - x - 2y$.

Solución. Al agrupar los dos primeros términos y los dos últimos da

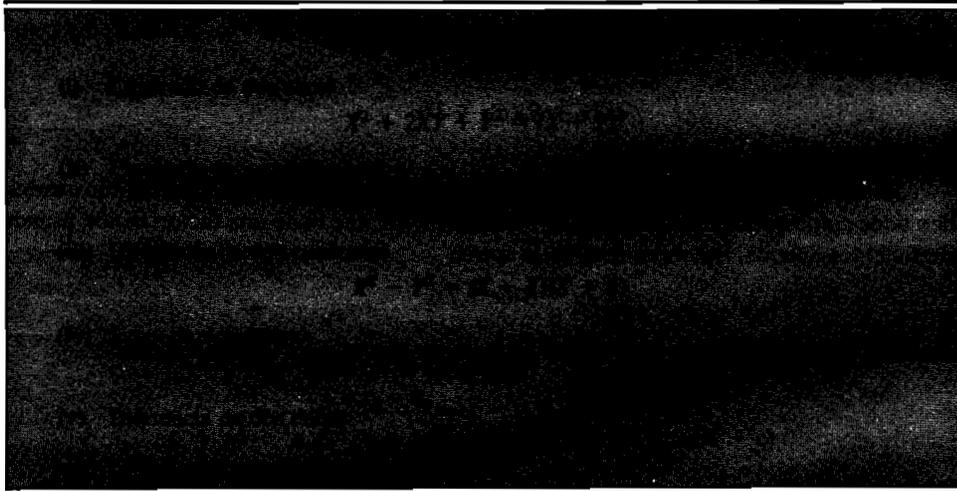
$$\begin{aligned} x^2 + 2xy - x - 2y &= (x^2 + 2xy) + (-x - 2y) \\ &= x(x + 2y) + (-1)(x + 2y) \end{aligned}$$

Observamos el factor común $x + 2y$ y completamos como

$$x^2 + 2xy - x - 2y = (x - 1)(x + 2y)$$

FORMULAS DE FACTORIZACION

Mediante la inversión de las fórmulas de productos notables de la sección 1.6, tenemos las siguientes fórmulas importantes de factorización.



Hemos usado mayúsculas en estas fórmulas para poner en claro nuestro trabajo cuando las aplicamos.

EJEMPLO 3 _____

Factorice $16x^4y^2 - 25$.

Solución. Esta es la diferencia de dos cuadrados. Así, a partir de (iii) con $X = 4x^2y$ y $Y = 5$ tenemos:

$$\begin{aligned} 16x^4y^2 - 25 &= (4x^2y)^2 - (5)^2 \\ &= (4x^2y - 5)(4x^2y + 5) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 _____

Factorice $8a^3 + 27b^6$.

Solución. Ya que $8a^3 + 27b^6$ es la suma de dos cubos, se puede factorizar usando (iv). Si identificamos $X = 2a$ y $Y = 3b^2$, entonces

$$\begin{aligned}
 8a^3 + 27b^6 &= (2a)^3 + (3b^2)^3 \\
 &= (2a + 3b^2)[(2a)^2 - (2a)(3b^2) + (3b^2)^2] \\
 &= (2a + 3b^2)(4a^2 - 6ab^2 + 9b^4)
 \end{aligned}$$

Obsérvese que las fórmulas (iii) - (v) indican que la diferencia de dos cuadrados y la suma y la diferencia de dos cubos siempre se factorizan mientras no limitemos los coeficientes al conjunto de los enteros. Por ejemplo, al usar (iii) para factorizar $x^2 - 5$, identificamos $X = x$ y $Y = \sqrt{5}$, de modo que

$$\begin{aligned}
 x^2 - 5 &= x^2 - (\sqrt{5})^2 \\
 &= (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})
 \end{aligned}$$

Sin embargo, para el resto de esta sección buscaremos únicamente factores polinómicos con coeficientes *enteros*.

FACTORIZACION DE POLINOMIOS CUADRATICOS (DE SEGUNDO GRADO)

A veces es posible factorizar los polinomios cuadráticos $ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son enteros, como

$$(Ax + B)(Cx + D)$$

donde A , B , C y D son también enteros.

Inicialmente, para simplificar nuestra exposición suponemos que el polinomio cuadrático tiene como coeficiente principal $a = 1$. Si $x^2 + bx + c$ tiene una factorización usando coeficientes enteros, entonces será de la forma

$$(x + B)(x + D)$$

donde B y D son enteros. Al hallar el producto y al comparar los coeficientes,

$$\begin{aligned}
 (x + B)(x + D) &= x^2 + (B + D)x + BD = x^2 + \overbrace{bx}^{B + D = b} + \overbrace{c}^{BD = c}
 \end{aligned}$$

vemos que

$$B + D = b \quad \text{y} \quad BD = c$$

Así, para factorizar $x^2 + bx + c$ con coeficientes enteros, hacemos una lista de todas las factorizaciones posibles de c como producto de dos enteros B y D . Entonces, comprobamos cuál de las sumas de $B + D$ es igual a b .

EJEMPLO 5

Factorice $x^2 - 9x + 18$

Solución. Con $b = -9$ y $c = 18$, buscamos los enteros B y D tales que

$$B + D = -9 \quad \text{y} \quad BD = 18$$

Podemos escribir 18 como un producto BD en las siguientes formas:

$$1(18), \quad 2(9), \quad 3(6), \quad (-1)(-18), \quad (-2)(-9), \quad \text{o} \quad (-3)(-6)$$

Ya que -9 es la suma de -3 y -6 , la factorización es

$$x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$$

Nótese que siempre es posible comprobar una factorización mediante la multiplicación de los factores.

EJEMPLO 6 _____

Factorice $x^2 + 3x - 1$

Solución. Se puede escribir el número -1 como producto de dos enteros BD solamente en una forma, a saber: $(-1)(1)$. Ya que la suma

$$B + D = -1 + 1 \neq 3$$

$x^2 + 3x - 1$ no se puede factorizar usando coeficientes enteros.

Es más complicado factorizar el polinomio cuadrático general $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 1$, ya que debemos considerar los factores de a así como los de c .

Hallando el producto y comparando los coeficientes

$$(Ax + B)(Cx + D) = ACx^2 + (AD + BC)x + BD = ax^2 + bx + c$$

$AC = a$ (sobre ACx^2)
 $BD = c$ (sobre BD)
 $AD + BC = b$ (sobre $(AD + BC)x$)

vemos que $ax^2 + bx + c$ se factoriza como $(Ax + B)(Cx + D)$ si

$$AC = a, \quad AD + BC = b, \quad y \quad BD = c$$

EJEMPLO 7 _____

Factorice $2x^2 + 11x - 6$.

Solución. Los factores serán

$$(2x + \quad)(1x + \quad)$$

donde los espacios en blanco se deben llenar con un par de enteros B y D cuyo producto BD es igual a -6 . Los pares posibles son:

$$1 \text{ y } -6, \quad -1 \text{ y } 6, \quad 3 \text{ y } -2, \quad -3 \text{ y } 2$$

Ahora debemos comprobar para ver si uno de los pares da 11 como valor de $AD + BC$ (el coeficiente del término medio), donde $A = 2$ y $C = 1$. Encontramos que:

$$2(6) + 1(-1) = 11$$

por tanto, $2x^2 + 11x - 6 = (2x - 1)(x + 6)$

Este método general se puede aplicar a expresiones de la forma $ax^2 + bxy + cy^2$, donde a, b y c son enteros.

EJEMPLO 8 _____

Factorice $15x^2 + 17xy + 4y^2$.

Solución. Los factores podrían tener la forma

$$(5x + \quad y)(3x + \quad y) \quad \text{o} \quad (15x + \quad y)(1x + \quad y) \quad (6)$$

No se necesita considerar los casos

$$(-5x + \underline{\quad})(-3x + \underline{\quad}) \quad y \quad (-15x + \underline{\quad})(-x + \underline{\quad})$$

(¿Por qué?)

Los espacios en blanco en (6) se deben llenar con un par de enteros cuyo producto sea 4.

Los pares posibles son:

$$1 \text{ y } 4, \quad -1 \text{ y } -4, \quad 2 \text{ y } 2, \quad -2 \text{ y } -2$$

Comprobamos cada par con las formas posibles en (6) para ver cuál combinación, si es que hay alguna, nos da un coeficiente de 17 para el término medio. Encontramos que

$$15x^2 + 17xy + 4y^2 = (5x + 4y)(3x + y)$$

EJEMPLO 9

Factorice $2t^4 + 11t^2 + 12$.

Solución. Siendo $X = t^2$, podemos considerar esta expresión como un polinomio cuadrático en la variable X .

$$2X^2 + 11X + 12$$

Entonces, factorizamos este polinomio cuadrático. Los factores tendrán la forma

$$(X + \underline{\quad})(2X + \underline{\quad}) \quad (7)$$

donde los espacios en blanco se deben llenar con un par de enteros cuyo producto sea 12. Los posibles pares son

$$1 \text{ y } 12, \quad -1 \text{ y } -12, \quad 2 \text{ y } 6, \quad -2 \text{ y } -6, \quad 3 \text{ y } 4, \quad -3 \text{ y } -4$$

Comprobamos cada par con (7) para ver qué combinación, si la hay, nos da un coeficiente de 11 para el término medio. Encontramos que

$$2X^2 + 11X + 12 = (X + 4)(2X + 3)$$

La sustitución de t^2 por X nos da

$$2t^4 + 11t^2 + 12 = (t^2 + 4)(2t^2 + 3)$$

En el ejemplo anterior se debe verificar que ni $t^2 + 4$ ni $2t^2 + 3$ se pueden factorizar usando coeficientes enteros.

Ahora consideramos un ejemplo en el cual una primera factorización produce expresiones que se pueden factorizar otra vez. En general, necesitamos que una expresión sea **factorizada totalmente**; es decir, hasta que ninguno de los factores se puedan factorizar en polinomios de grado 1 ó mayor con coeficientes enteros.

EJEMPLO 10

Factorice completamente $x^6 - y^6$

Solución. Podemos considerar la expresión $x^6 - y^6$ de dos maneras: como diferencia de dos cuadrados o como diferencia de dos cubos. Al usar la diferencia de dos cubos, escribimos

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^2)^3 - (y^2)^3 \\ &= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) \\ &= (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4) \end{aligned}$$

A partir de lo anterior podríamos concluir que la factorización está completa. Sin embargo, tratar la expresión $x^6 - y^6$ como una diferencia de dos cuadrados es más revelador, ya que

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 \\ &= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

De esta manera hemos descubierto la factorización adicional

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$$

Verifique que ninguna de estas expresiones pueda factorizarse más.

EJERCICIO 1.7

En los problemas 1 al 10, factorice el polinomio hallando un factor común o agrupando.

1. $12x^3 + 2x^2 + 6x$
2. $6x^3y^4 - 3\sqrt{3}x^2y^2 - 3x^2y + 3xy$
3. $2y^2 - yz + 6y - 3z$
4. $6x^5y^5 + \sqrt{2}x^2y^3 + 14xy^3$
5. $15at + 3bt + 5as + bs$
6. $3a^2b^3 - 3\sqrt{2}a^4b^2 + 9a^2b$
7. $xyz^3 - xy^3z + x^3yz$
8. $x^3 + 2x + x^2 + 2$
9. $2p^3 - p^2 + 2p - 1$
10. $2uv - 5wz + 2uz - 5wv$

En los problemas 11 al 22, use las fórmulas de factorización (i) - (v) para factorizar el polinomio.

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 11. $36x^2 - 25$ | 12. $a^2 - 4b^2$ |
| 13. $4x^2y^2 - 1$ | 14. $49x^2 - 64y^2$ |
| 15. $x^4 - y^4$ | 16. $x^6 + y^6$ |
| 17. $x^8 - y^8$ | 18. $a^3 - 64b^3$ |
| 19. $8x^3y^3 + 27$ | 20. $y^3 + 125$ |
| 21. $y^6 - 1$ | 22. $1 - x^3$ |

En los problemas 23 al 42, use técnicas para factorizar polinomios cuadráticos para factorizar el polinomio dado, si es posible.

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 23. $x^2 - 5x + 6$ | 24. $x^2 - 10x + 24$ |
| 25. $y^2 + 7y + 10$ | 26. $y^4 + 10y^2 + 21$ |
| 27. $x^4 - 3x^2 - 4$ | 28. $x^2 + 4x - 12$ |
| 29. $r^2 + 2r + 1$ | 30. $s^2 + 5s - 14$ |
| 31. $x^2 - xy - 2y^2$ | 32. $x^2 - 4xy + 3y^2$ |
| 33. $x^2 + 10x + 25$ | 34. $4x^2 + 12x + 9$ |
| 35. $s^2 - 8st + 16t^2$ | 36. $9m^2 - 6mv + v^2$ |
| 37. $2p^2 + 7p + 5$ | 38. $8q^2 + 2q - 3$ |
| 39. $6a^4 + 13a^2 - 15$ | 40. $10b^4 - 23b^2 + 12$ |
| 41. $2x^2 - 7xy + 3y^2$ | 42. $-3x^2 - 5xy + 12y^2$ |

En los problemas 43 al 60, use cualquier método para factorizar la expresión.

43. $(x^2 + 1)^3 + (y^2 - 1)^3$
44. $(4 - x^2)^3 - (4 - y^2)^3$
45. $x(x - y) + y(y - x)$
46. $x(x - y) - y(y - x)$
47. $(1 - x^2)^3 - (1 - y^2)^3$
48. $(x^2 - 4)^3 + (4 - y^2)^3$
49. $1 - 256v^8$
50. $s^8 - 6561$
51. $x^6 + 7x^3 - 8$
52. $z^{10} - 5z^5 - 6$
53. $r^3s^3 - 8t^3$
54. $25c^2d^2 - x^2y^2$
55. $a^3 + a^2b - b^3 - ab^2$
56. $p^3 - pq^2 + p^2q - q^3$
57. $4z^2 + 7zy - 2y^2$
58. $36x^2 + 12xy + y^2$
59. $16a^2 - 24ab + 9b^2$
60. $4m^2 + 2mn - 12n^2$

En los problemas 61 al 70, use las fórmulas de factorización (i) - (iii) para factorizar la expresión en factores lineales. [Ayuda: algunos coeficientes no serán enteros].

- | | |
|-----------------------------|--|
| 61. $x^2 - 3$ | 62. $2r^2 - 1$ |
| 63. $5y^2 - 1$ | 64. $\frac{1}{4}a^2 - b^2$ |
| 65. $a^2 + a + \frac{1}{4}$ | 66. $t^2 - \frac{3}{8}t + \frac{1}{8}$ |
| 67. $a^2 - 2b^2$ | 68. $3u^2 - 4v^2$ |
| 69. $24 - x^2$ | 70. $x^2 - 2\sqrt{2}xy + 2y^2$ |

En los problemas 71 al 74, responda falso o verdadero.

71. $x^2 + y^2 = (x + y)(x + y)$ —
72. $a^3 + b^3 = (a + b)^3$ —
73. $(r - 1)(r - 1) = r^2 + 1$ —
74. $r^3 - s^3 = (r - s)(r^2 + rs + s^2)$ —

En el libro II de *Elementos*, de Euclides, los problemas algebraicos se tratan y se resuelven en términos geométricos, porque los griegos carecían de notación algebraica. Por ejemplo, el producto de dos números positivos a y b se representa como el área de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes a y b , respectivamente. En los problemas 75 al 77, se tratan en términos geométricos varias de las fórmulas de factorización.

75. Explique cómo justifica la figura 17 la fórmula de factorización $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ para los números positivos a y b .

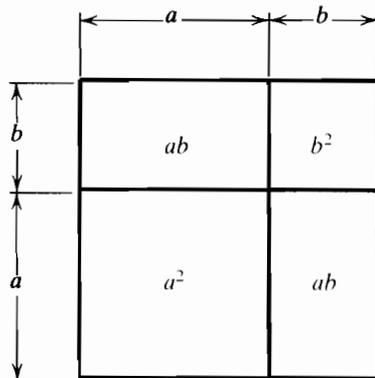


FIGURA 17

76. Explique cómo justifica la figura 18 la fórmula de factorización $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, donde $a > b > 0$.

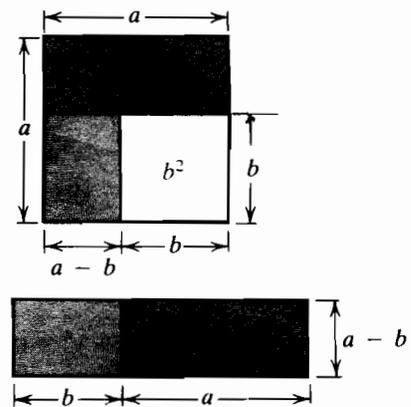


FIGURA 18

77. La figura 19 indica que la fórmula de factorización para la diferencia de dos cubos, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ para $a > b > 0$, se puede justificar geoméricamente. Complete la prueba. [Sugerencia: marque las cuatro cajas que hay dentro del cubo y calcule el volumen de cada una].

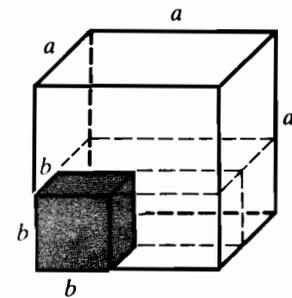


FIGURA 19

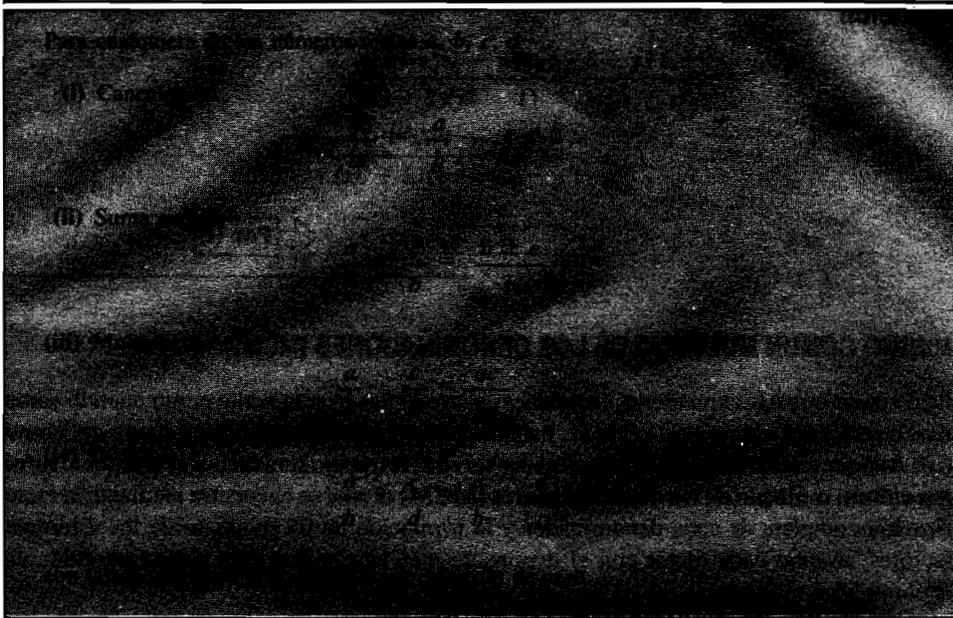
1.8 Expresiones racionales

Cuando un polinomio se divide por otro, el resultado no es necesariamente un polinomio. El cociente de dos polinomios se llama **expresión racional**. Por ejemplo,

$$\frac{2x^2 + 5}{x + 1} \quad \text{y} \quad \frac{3}{2x^3 - x + 8}$$

son expresiones racionales. El dominio de la variable en una expresión racional consta de todos los números reales para los cuales el valor del denominador es diferente de cero. Por ejemplo, en $(2x^2 + 5)/(x + 1)$ el dominio de la variable es $\{x \mid x \neq -1\}$.

Para resolver problemas, con frecuencia debemos combinar expresiones racionales y luego simplificar los resultados. Ya que una expresión racional representa a un número real, podemos aplicar las propiedades del sistema de números reales para combinar y simplificar las expresiones racionales. Las propiedades de las fracciones de la sección 1.1 son particularmente útiles. A continuación, y por conveniencia, repetimos las que se usan con más frecuencia.



EJEMPLO 1 _____

Simplifique

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$$

Solución. Factorizamos el numerador y el denominador y cancelamos los factores comunes usando la propiedad cancelativa (i):

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(2x + 1)\cancel{(x - 1)}}{(x + 1)\cancel{(x - 1)}} = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

Nótese que en el ejemplo 1 la cancelación del factor común $x - 1$ es válida solamente para aquellos valores de x tales que $x - 1$ sea diferente de cero; es decir, para $x \neq 1$. Sin embargo, ya que la expresión $(2x^2 - x - 1)/(x^2 - 1)$ no se define para $x = 1$, nuestra simplificación es válida para todos los números reales en el dominio de la variable x en la expresión *original*. Enfatizamos que la ecuación

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

no es válida para $x = 1$, aunque el lado derecho $(2x + 1)/(x + 1)$ se define para $x = 1$. Las consideraciones de esta naturaleza serán importantes en el capítulo siguiente cuando resolveremos ecuaciones que contengan expresiones racionales.

Para el resto de este capítulo supondremos sin comentarios posteriores que las variables están restringidas a los valores para los cuales todos los denominadores en una ecuación sean diferentes de cero.

EJEMPLO 2 _____

Simplifique

$$\frac{4x^2 + 11x - 3}{2 - 5x - 12x^2}$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + 11x - 3}{2 - 5x - 12x^2} &= \frac{(4x - 1)(x + 3)}{(1 - 4x)(2 + 3x)} \\ &= \frac{\cancel{(4x - 1)}(x + 3)}{-\cancel{(4x - 1)}(2 + 3x)} \\ &= -\frac{x + 3}{2 + 3x} \end{aligned} \quad \leftarrow \text{Por (i)}$$

MINIMO COMUN MULTIPLO DE LOS DENOMINADORES (MCM)

Para sumar o restar expresiones racionales, procedemos exactamente como cuando sumamos o restamos fracciones. Primero, hallamos un común denominador y luego aplicamos (ii). Aunque cualquier común denominador servirá, el trabajo será menor si usamos el **mínimo común múltiplo de los denominadores (MCM)** el cual se encuentra mediante la factorización completa de cada denominador y la formación de un producto de los diferentes factores, usando cada factor con el exponente más alto con el cual ocurra en cualquier denominador individual.

EJEMPLO 3

Encuentre el MCM de los denominadores de:

$$\frac{1}{x^4 - x^2}, \quad \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 1}, \quad \text{y} \quad \frac{1}{x}$$

Solución. Al factorizar los denominadores en las expresiones racionales, obtenemos

$$\frac{1}{x^2(x - 1)(x + 1)}, \quad \frac{x + 2}{(x + 1)^2}, \quad \text{y} \quad \frac{1}{x}$$

Los diferentes factores de los denominadores son x , $x - 1$, y $x + 1$. Usamos cada factor con el exponente más alto con el cual ocurre en cualquier denominador individual. De esta manera, el MCM de los denominadores es:

$$x^2(x - 1)(x + 1)^2$$

EJEMPLO 4

Combine y simplifique

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$$

Solución. En la forma factorizada los denominadores son $(x - 2)(x + 2)$ y $(x + 2)^2$. De esta manera el MCM de los denominadores es $(x - 2)(x + 2)^2$. Usamos (i) a la inversa para volver a escribir cada expresión racional con el MCM como denominador:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - 4} &= \frac{x}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)(x + 2)} \\ \frac{1}{x^2 + 4x + 4} &= \frac{1}{(x + 2)^2} = \frac{1(x - 2)}{(x + 2)^2(x - 2)} \end{aligned}$$

Entonces, usando (ii) sumamos y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x + 4} &= \frac{x(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)^2} + \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)^2} \\ &= \frac{x(x + 2) + x - 2}{(x - 2)(x + 2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + x - 2}{(x - 2)(x + 2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 2)(x + 2)^2} \end{aligned}$$

Para multiplicar o dividir expresiones racionales, aplicamos (iii) o (iv) y luego simplificamos.

EJEMPLO 5 _____

Combine y simplifique

$$\frac{x}{5x^2 + 21x + 4} \cdot \frac{25x^2 + 10x + 1}{3x^2 + x}$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{x}{5x^2 + 21x + 4} \cdot \frac{25x^2 + 10x + 1}{3x^2 + x} &= \frac{x(25x^2 + 10x + 1)}{(5x^2 + 21x + 4)(3x^2 + x)} \leftarrow \text{Por (iii)} \\ &= \frac{\cancel{x}(5x + 1)\cancel{(5x + 1)}}{(\cancel{5x + 1})(x + 4)\cancel{(3x + 1)}} \\ &= \frac{5x + 1}{(x + 4)(3x + 1)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 _____

Combine y simplifique

$$\frac{2x^2 + 9x + 10}{x^2 + 4x + 3} \div \frac{2x + 5}{x + 3}$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 9x + 10}{x^2 + 4x + 3} \div \frac{2x + 5}{x + 3} &= \frac{2x^2 + 9x + 10}{x^2 + 4x + 3} \cdot \frac{x + 3}{2x + 5} \leftarrow \text{Por (iv)} \\ &= \frac{(2x^2 + 9x + 10)(x + 3)}{(x^2 + 4x + 3)(2x + 5)} \leftarrow \text{Por (iii)} \\ &= \frac{\cancel{(2x + 5)}(x + 2)\cancel{(x + 3)}}{(\cancel{x + 3})(x + 1)\cancel{(2x + 5)}} \\ &= \frac{x + 2}{x + 1} \end{aligned}$$

Como se demuestra en el siguiente ejercicio, las técnicas que se ilustraron antes nos permiten simplificar cocientes más complicados.

EJEMPLO 7

Simplique

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{x}{x+1}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Solución. Primero obtenemos expresiones racionales individuales para el numerador y el denominador:

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{1(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x \cdot x}{(x+1)x} = \frac{x+1-x^2}{x(x+1)} = \frac{-x^2+x+1}{x(x+1)}$$

$$\text{y} \quad 1 + \frac{1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\text{De esta manera} \quad \frac{\frac{1}{x} - \frac{x}{x+1}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{-x^2+x+1}{x(x+1)}}{\frac{x+1}{x}}$$

Ahora aplicamos (iv) a este cociente para obtener

$$\frac{\frac{-x^2+x+1}{x(x+1)}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-x^2+x+1}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{-x^2+x+1}{(x+1)^2}$$

Un método alternativo para simplificar un fraccionario complejo es multiplicar tanto el numerador como el denominador por el MCM de los denominadores de todas las fracciones que ocurran en la fracción compleja. Al usar aquí este método, multiplicamos el numerador y el denominador por $x(x+1)$ y simplificamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x} - \frac{x}{x+1}}{1 + \frac{1}{x}} &= \frac{\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x+1}\right) \cdot x(x+1)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot x(x+1)} = \frac{(x+1) - x^2}{x(x+1) + (x+1)} \\ &= \frac{-x^2+x+1}{(x+1)(x+1)} = \frac{-x^2+x+1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Las técnicas que se tratan en esta sección se pueden aplicar con frecuencia a expresiones que contienen exponentes negativos, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8Simplifique $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$.

Solución. Primero reemplazamos todos los exponentes negativos por los cocientes equivalentes y luego usamos las propiedades de las fracciones para simplificar las expresiones algebraicas que resulten.

$$(a^{-1} + b^{-1})^{-1} = \frac{1}{a^{-1} + b^{-1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}}$$

$$= \frac{ab}{b+a}$$

Un cociente de dos expresiones algebraicas tales como $(\sqrt{x} - 1)/(\sqrt{x} + 1)$ se llama **expresión fraccionaria**. Las técnicas para simplificar expresiones fraccionarias son similares a aquellas que se usan para expresiones racionales.

EJEMPLO 9 _____

Simplifique

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$$

Solución. Primero encontramos el MCM de los denominadores y luego sumamos:

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}\sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

Si deseamos racionalizar el denominador, el resultado final sería

$$\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{x^2\sqrt{y} + y^2\sqrt{x}}{xy}$$

Los ejemplos 10 y 11 ilustran cómo simplificar ciertos tipos de expresiones fraccionarias que ocurren en cálculo.

EJEMPLO 10 _____

Simplifique

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

Solución

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h}$$

$$= \frac{-h}{x(x+h)h} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

EJEMPLO 11 _____

Simplifique $(2x)(x-1)^{1/2} + (\frac{1}{2})(x-1)^{-1/2}(x^2)$.

Solución

$$(2x)(x-1)^{1/2} + (\frac{1}{2})(x-1)^{-1/2}(x^2) = (2x)(x-1)^{1/2} + \frac{x^2}{2(x-1)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2)(2x)(x-1) + x^2}{2(x-1)^{1/2}} \\
 &= \frac{4x^2 - 4x + x^2}{2(x-1)^{1/2}} \\
 &= \frac{5x^2 - 4x}{2(x-1)^{1/2}}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 1.8

En los problemas 1 al 4, responda falso o verdadero.

- El MCM de los denominadores de $1/(r+2)^2$ y $1/(r+3)^3(r+2)$ es $(r+3)^3(r+2)^3$. _____
- $\frac{t-1}{1-t} = -1$. _____
- $(u^{-1} + v^{-1})^{-1} = u + v$. _____
- $\frac{x+y}{x} = y$. _____

En los problemas 5 al 12, simplifique la expresión racional.

- $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 6x + 8}$
- $\frac{v^4 + 4v^2 + 4}{4 - v^4}$
- $\frac{z^2 - 9}{z^3 + 27}$
- $\frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2}$
- $\frac{3x^2 - 7x - 20}{2x^2 - 5x - 12}$
- $\frac{4y^2 + 20y + 25}{2y^3 + 3y^2 - 5y}$
- $\frac{w^3 - 9w}{w^3 - 6w^2 + 9w}$
- $\frac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2}$

En los problemas 13 al 20, encuentre el mínimo común múltiplo de los denominadores (MCM) de las expresiones.

- $\frac{1}{x^2 + x - 2}, \frac{4}{x + 2}$
- $\frac{5}{v^2 + 2v + 1}, \frac{v}{v^2 - 3v - 4}$
- $\frac{10}{b^3 + b^2 - 6b}, \frac{1}{b^3 - 6b^2}, \frac{b}{b - 2}$
- $\frac{1}{x^2 - 10x + 25}, \frac{x}{x^2 - 25}, \frac{1}{x^2 + 10x + 25}$
- $\frac{1}{c^2 + c}, \frac{c}{c^2 + 2c + 1}, \frac{1}{c^2 - 1}$
- $\frac{p}{p + r}, \frac{r}{p^2 + 2pr + r^2}, \frac{1}{p^3 + r^3}$
- $\frac{1}{x^3 - x^2}, \frac{x}{x^2 - 1}, \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x}$
- $\frac{y + 5}{3y^3 - 14y^2 - 5y}, \frac{1}{y}, \frac{y + 5}{y^2 - 5y}$

En los problemas 21 al 46, combine y simplifique la expresión.

$$21. \frac{4x}{4x + 5} + \frac{5}{4x + 5}$$

$$22. \frac{3}{s-2} + \frac{4}{2-s}$$

$$23. \frac{7z}{7z-1} - \frac{1}{1-7z}$$

$$24. \frac{3}{a-2} - \frac{6}{a^2+4}$$

$$25. \frac{2x}{x+1} + \frac{5}{x^2-1}$$

$$26. \frac{b}{2b+1} - \frac{2b}{b-2}$$

$$27. \frac{y}{y-x} - \frac{x}{y+x}$$

$$28. \frac{x}{x-y} + \frac{x}{y-x}$$

$$29. \frac{2}{r^2-r-12} + \frac{r}{r+3}$$

$$30. \frac{1}{w+3} + \frac{w}{w+1} + \frac{w^2+1}{w^2+4w+3}$$

$$31. \frac{x}{2x^2+3x-2} - \frac{1}{2x-1} - \frac{4}{x+2}$$

$$32. \frac{z}{2z+3} - \frac{3}{4z^2-3z-1} + \frac{4z+1}{2z^2+z-3}$$

$$33. \frac{t-4}{t+3} \cdot \frac{t+5}{t-2}$$

$$34. \frac{x^2+x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x^2}$$

$$35. (x^2 - 2x + 1) \cdot \frac{x+1}{x^3-1}$$

$$36. \frac{2p+8}{p-1} \cdot \frac{p+4}{2p}$$

$$37. \frac{6x+5}{3x+3} \cdot \frac{x+1}{6x^2-7x-10}$$

$$38. \frac{1+x}{2+x} \cdot \frac{x^2+x-12}{3+2x-x^2}$$

$$39. \frac{u+1}{u+2} \div \frac{u+1}{u+7}$$

$$40. \frac{3w+1}{w-4} \div \frac{2w+1}{w}$$

$$41. \frac{x}{x+4} \div \frac{x+5}{x}$$

42. $\frac{x-3}{x+1} \div \frac{x+1}{2x+1}$

43. $\frac{q^2-1}{q^2+2q-3} \div \frac{q-4}{q+3}$

44. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} \div \frac{x-2}{x-3}$

45. $\frac{s^2-5s+6}{s^2+7s+10} \div \frac{2-s}{s+2}$

46. $\frac{x}{x+y} \div \frac{y}{x+y}$

En los problemas 47 al 68, simplifique la expresión dada.

47. $\frac{\frac{1}{x^2} - x}{\frac{1}{x^2} + x}$

48. $\frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{t}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{t}}$

49. $\frac{z + \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{z}}$

50. $\frac{\frac{1+r}{r} + \frac{r}{1-r}}{\frac{1-r}{r} + \frac{r}{1+r}}$

51. $\frac{x^2 + xy + y^2}{\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}}$

52. $\frac{\frac{a}{a-1} - \frac{a+1}{a}}{1 - \frac{a}{a-1}}$

53. $\frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$

54. $\frac{\frac{1}{2x+2h+1} - \frac{1}{2x+1}}{h}$

55. $(a^{-1} - b^{-1})^{-1}$

56. $\frac{a+b}{a^{-1} + b^{-1}}$

57. $\frac{u^{-2} - v^{-2}}{u^2v^2}$

58. $\frac{u^{-2} + v^{-2}}{u^2 + v^2}$

59. $\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{w}}$

60. $\frac{v}{\sqrt{z}} - \frac{z}{\sqrt{v}}$

61. $\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{y}}}$

62. $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{b}}}$

63. $\frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h}$

64. $\frac{\frac{2}{3x+3h} - \frac{2}{3x}}{h}$

65. $\frac{\frac{5}{2x+2h-1} - \frac{5}{2x-1}}{h}$

66. $(x^2 - 1)(\frac{1}{3})(x+1)^{-2/3} + (x+1)^{1/3}(2x)$

67. $\frac{(x^2 + 1)(\frac{1}{2})(x^{-1/2}) - (x^{1/2})(2)}{(x^2 + 1)^2}$

68. $\frac{(x^2 + 8)^{1/5}(5) - (5x)(\frac{1}{5})(x^2 + 8)^{-4/5}(2x)}{[(x^2 + 8)^{1/5}]^2}$

69. Si tres resistencias en un circuito eléctrico con resistencias de R_1 , R_2 y R_3 ohmios, respectivamente, se hallan conectadas en paralelo, entonces la resistencia (en ohmios) de la combinación está dada por

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Simplifique esta expresión.

70. En el campo de la óptica, si p es la distancia del objeto a la lente y q es la distancia de la imagen a la lente, entonces la longitud focal de la lente está dada por

$$\frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$$

Simplifique esta expresión.

CONCEPTOS IMPORTANTES

Conjunto	Relación de orden	Expresión algebraica
subconjunto	menor que	Polinomio
unión	mayor que	monomio
intersección	Valor absoluto	binomio
disjunto	Desigualdad triangular	coeficiente
Números reales	Distancia	grado
número natural	Punto medio	término
entero	Leyes de los exponentes	coeficiente principal
número racional	Exponente	término constante
número irracional	base	Factorización completa
Recta de números reales	notación científica	Expresión racional
origen	Radical	dominio
coordenada	raíz cuadrada	numerador
	raíz cúbica	denominador
	raíz enésima	Mínimo común múltiplo de los denominadores
	Racionalización del denominador	

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 20, llene los espacios en blanco o conteste falso o verdadero.

- $0/0$ es un número real. ____
- π es un número racional. ____
- Cada número real se puede escribir como cociente de dos enteros. ____
- El ____ del segmento de recta que une -1 y 5 es 2 .
- Geoméricamente, $a < b$ significa que el punto correspondiente a a en la recta numérica está a la ____ del punto correspondiente a b .
- Si x es negativo, entonces $|x| =$ ____.
- El ____ de x se puede escribir $1/x$ como x^{-1} .
- Para $x \neq 0$, $x^0 =$ ____.
- Si $x^{1/n} = r$ entonces $r^n = x$ ____.
- El dominio de la variable x en $(3x + 1)/(x^2 - 1)$ es ____.
- La expresión $3x^4 - x^2 + 5x$ es un ____ de grado ____ con coeficiente principal ____ y término constante ____.
- Para simplificar $x(x + 2)/(x - 2)(x + 2)$ a $x/(x - 2)$, usamos la ____ propiedad
- La distancia de a a b está dada por ____.
- El valor absoluto de un número mide su distancia al ____ en la recta numérica.
- El número 4.2×10^{-5} está escrito en ____.
- Se dice que los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{2, 4\}$ son ____.
- La expresión algebraica $6x^{-2} + \sqrt{2}$ no es un polinomio ____.
- La raíz cúbica de un número negativo es indefinida. ____.
- En la expresión x^3 , x se llama la ____ y 3 se denomina el ____.
- La expresión $\sqrt[4]{x^2 + y^2}$ se llama un ____ de índice ____.

Sea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Encuentre el conjunto indicado de los problemas 21 al 24.

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $(A \cup B) \cap C$
- $(A \cap C) \cup B$
- En 1983 un aficionado que asistió a un partido de fútbol gastó un promedio de US\$6.40 en comida, US\$13.45 por concepto de entrada, US\$1.15 por parqueadero y US\$0.90 por un programa. Aproximadamente, ¿qué porcentaje del total gastó en comida en el juego?
- El déficit fiscal federal en los EE.UU. en 1985 fue de US\$211,900 millones. En 1985, el Senado de los Estados Unidos intentó reducir el déficit a US\$180,000 millones para 1986. ¿Cuál habría sido el porcentaje de esta reducción?
- Entre 1984 y 1985 había 630,000 microcomputadores en las escuelas de los Estados Unidos. Si 50.9% de estos microcomputadores eran Apple, ¿cuántos eran Apple?
- Alrededor del año 240 a. de C. Arquímedes determinó que $223/71 < \pi < 22/7$. Encuentre el porcentaje de error en cada una de estas aproximaciones para π . [Sugerencia: use una calculadora con una tecla π].

En los problemas 29 y 30 escriba la proposición dada como una desigualdad.

- $x - y$ es mayor o igual a 10.
- z es no negativo.

En los problemas 31 al 34, inserte el signo apropiado: $<$, $>$, $=$.

- -1.4 , $-\sqrt{2}$
- 0.50 , $\frac{1}{2}$
- $\frac{2}{3}$, 0.67
- -0.9 , -0.8

En los problemas 35 al 40, encuentre el valor absoluto indicado.

35. $|\sqrt{8} - 3|$ 36. $|-(\sqrt{15} - 4)|$
 37. $|x^2 + 5|$ 38. $\frac{|x|}{|-x|}, x \neq 0$
 39. $|t + 5|$, si $t < -5$
 40. $|r - s|$, si $r > s$

En los problemas 41 y 42, encuentre (a) la distancia entre los puntos dados y (b) la coordenada del punto medio del segmento de recta que une los puntos dados.

41. -3.5, 5.8 42. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

En los problemas 43 al 60, elimine los exponentes negativos y cero y simplifique. Suponga que todas las variables son positivas.

43. $(3uv^2)(6u^2v^3)^2$ 44. $\frac{4a^2b^4}{16ab^3}$
 45. $\frac{(2x^{-4}y^2)^{-1}}{x^0y^{-1}}$ 46. $\frac{2x^5y^{-3}z^2}{6x^3y^{-3}z^{-5}}$
 47. $\left(\frac{-8c^3d^6}{c^{-9}d^{12}}\right)^{2/3}$ 48. $\frac{s^{-1}t^{-1}}{s^{-1} + t^{-1}}$
 49. $\frac{x^{1/3}y^{-2/3}}{x^{4/3}y^{-7/9}}$ 50. $((81w^2z^{-1/2})^{-1})^{1/4}$
 51. $\frac{\sqrt[3]{125}}{25^{-1/2}}$ 52. $\sqrt{\frac{ab^2c^4}{a^2}}$
 53. $\sqrt{\sqrt[3]{(x^3y^9)^2}}$ 54. $\sqrt{125xy} \sqrt{5yz} \sqrt{xz}$
 55. $\sqrt[3]{-(p^{-2}q^3)^3}$ 56. $\sqrt{(x^2 + y^2)^2}$
 57. $4\sqrt{xy} - \sqrt{\sqrt{x^2y^2}} + \sqrt{2xy}$
 58. $\frac{\sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{b^4}}{b}$
 59. $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$ 60. $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$

En los problemas 61 y 62, escriba el número dado en notación científica.

61. 0.0000007023 62. 158,000,000,000

En los problemas 63 y 64, use notación científica para determinar la expresión dada,

63. $\frac{(16,000)(5,000,000)^2}{0.00008}$ 64. $\sqrt{\frac{(0.0001)(480,000)}{0.03}}$

65. En 1982 los norteamericanos gastaron US\$17,600 millones en deportes, en actividades relacionadas con el deporte y en equipos deportivos. Escriba este número (a) en forma decimal y (b) en notación científica.

66. Un milímetro es 0.000001 de un kilómetro. Escriba este número en notación científica.

En los problemas 67 al 74, ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

67. $(4x^3 - 3x^2 + 6x - 2) - (x^2 - 3x + 4)$
 68. $(3x^4 - \sqrt{2}x^2) + x(\sqrt{2}x + 5)$
 69. $(a + 1)(a - 2)(a + 3)$
 70. $\frac{c^2d^2 - 3cd^3 + 5c^3d^2}{cd^2}$

71. $(3z^4 - 2z)^2$
 72. $(x^2 + 2y)^3$
 73. $(3x^2 + 5y)(3x^2 - 5y)$
 74. $(u - v)(u^2 + uv + v^2)$

En los problemas 75 al 82, factorice los polinomios dados usando coeficientes enteros.

75. $12x^2 - 19x - 18$
 76. $16a^4 - 81b^4$
 77. $2xy + 3y - 6x - 9$
 78. $4w^2 + 40wz + 100z^2$
 79. $8x^3 + 125y^6$
 80. $2x^3 + 3x^2 - 18x - 27$
 81. $4t^4 - 4t^2s + s^2$
 82. $125 + 75uv + 15u^2v^2 + u^3v^3$

En los problemas 83 al 94, ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

83. $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x^2-4}$
 84. $\frac{x^2-1}{x} \div \frac{x^3-1}{x^2}$
 85. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x+y}\right)$
 86. $(u^{-2} - v^{-2})(v - u)^{-1}$
 87. $\frac{x + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x}}$ 88. $\frac{\sqrt{c} + \frac{1}{d}}{d + \frac{1}{\sqrt{c}}}$
 89. $\frac{\frac{r}{s} + 2}{\frac{s}{r} + 2}$ 90. $\frac{1 + t^{-3}}{1 - t^{-3}}$
 91. $\frac{\frac{4}{(x+h)^3} - \frac{4}{x^3}}{h}$
 92. $\frac{\frac{1}{2(3+h)^2} - \frac{1}{2(3)^2}}{h}$
 93. $(8x)\left(\frac{1}{4}\right)(2x + 1)^{-3/4}(2) + (2x + 1)^{1/4}(8)$
 94. $\frac{(x + 1)^{5/2}(3x^2) - (x^3)\left(\frac{5}{2}\right)(x + 1)^{3/2}}{[(x + 1)^{5/2}]^2}$

En los problemas 95 y 96, racionalice el denominador y simplifique.

95. $\frac{2}{\sqrt{s} + \sqrt{t}}$ 96. $\frac{4}{\sqrt[3]{8}}$

En los problemas 97 y 98, racionalice el numerador y simplifique.

97. $\frac{\sqrt{3(1+h)} - \sqrt{3}}{h}$ 98. $\frac{\sqrt{(x+h)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{h}$

2.1 Ecuaciones, identidades y ecuaciones lineales

Una ecuación es una afirmación de que dos expresiones son iguales, mientras que una inecuación plantea que una expresión es menor que otra. Una amplia gama de problemas de la vida real puede expresarse como ecuación, o como inecuación. Comenzamos esta sección con cierta terminología que describe las ecuaciones y sus soluciones.

Cuando dos expresiones se igualan, se obtiene una **ecuación**. Por ejemplo,

$$\sqrt{x-1} = 2, \quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \quad \text{y} \quad |x+1| = 5$$

son ecuaciones con la variable x .

Una *solución*, o **raíz**, de una ecuación es cualquier número que, sustituido en la ecuación, la convierte en una proposición verdadera. Se dice que un número *satisface la ecuación* si es una solución de la ecuación. *Resolver una ecuación* significa encontrar sus soluciones.

EJEMPLO 1 _____

El número 2 es una solución de $3x - 2 = x + 2$, porque

$$3(2) - 2 = 2 + 2$$

Como lo veremos más adelante, no hay otros valores de x que satisfagan esta ecuación.

Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen. Si hay por lo menos un número en el dominio de la variable que no satisfaga la ecuación, entonces se dice que es una **ecuación condicional**.

EJEMPLO 2 _____

(a) La ecuación

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

se satisface con la serie de todos los números reales excepto en $x = 1$. Puesto que 1 no está en el dominio de la variable, la ecuación es una **identidad**.

(b) El número 3 está en el dominio de la variable en la ecuación

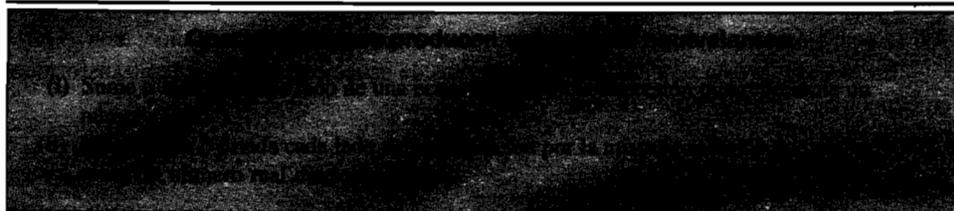
$$4x - 1 = 2$$

pero no satisface esta ecuación, puesto que $4(3) - 1 \neq 2$. Así, $4x - 1 = 2$ es una ecuación condicional.

Decimos que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Por ejemplo,

$$2x - 1 = 0, \quad 2x = 1, \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2}$$

son ecuaciones equivalentes. Generalmente, resolvemos una ecuación encontrando una ecuación equivalente que tenga soluciones que se determinen fácilmente. Se puede demostrar que las siguientes operaciones producen ecuaciones equivalentes.



EJEMPLO 3 _____

Resuelva $3x - 6 = 0$.

Solución. Obtenemos la siguiente lista de ecuaciones equivalentes.

$$\begin{aligned}
 3x - 6 &= 0 \\
 3x - 6 + 6 &= 0 + 6 && \leftarrow \text{Por (i)} \\
 3x &= 6 \\
 \frac{1}{3}(3x) &= \frac{1}{3}(6) && \leftarrow \text{Por (ii)} \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

Puesto que la última ecuación tiene como única solución 2, se deduce que 2 es la única solución de la ecuación *original*.

Nota de advertencia: ya que es posible cometer errores aritméticos o algebraicos cuando se soluciona una ecuación, siempre es buena práctica verificar cada solución, sustituyéndola en la ecuación original. Para verificar la solución en el ejemplo 3, sustituimos 2 por x en $3x - 6 = 0$:

$$\begin{aligned}
 3(2) - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 6 - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

ECUACIONES LINEALES

Una ecuación de la forma

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

donde a y b son números reales, se llama **ecuación lineal**. La ecuación del ejemplo 3 es una ecuación lineal. Para solucionar (1), procedemos de una manera similar al ejemplo 3:

$$\begin{aligned}
 ax + b &= 0 \\
 ax + b - b &= 0 - b && \leftarrow \text{Por (i)} \\
 ax &= -b
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(-b) \quad \leftarrow \text{Por(ii)}$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Así la ecuación lineal $ax + b = 0$, $a \neq 0$ tiene exactamente una solución: $x = -b/a$.

En el resto de esta sección, nos ocuparemos de ecuaciones que pueden transformarse en ecuaciones lineales equivalentes.

EJEMPLO 4

Resuelva $2x - 7 = 5x + 6$.

Solución. Debe dar razones por las cuales las siguientes ecuaciones son equivalentes.

$$2x - 7 = 5x + 6$$

$$2x - 7 - 5x = 5x + 6 - 5x$$

$$-3x - 7 = 6$$

$$-3x - 7 + 7 = 6 + 7$$

$$-3x = 13$$

$$-\frac{1}{3}(-3x) = -\frac{1}{3}(13)$$

$$x = -\frac{13}{3}$$

Así, la solución de la ecuación original es $-\frac{13}{3}$.

Cuando los dos lados de la ecuación se multiplican por una expresión que contenga una variable, la ecuación resultante puede *no* ser equivalente a la original, por esta razón hemos excluido la multiplicación por 0 en la operación (ii). Por ejemplo, la multiplicación de la ecuación $2x = 4$ por x produce $2x^2 = 4x$. Las dos ecuaciones no son equivalentes, ya que 0 es una solución de la última ecuación pero no es una solución de la primera. Denominamos a 0 una **solución externa**.

EJEMPLO 5

Resuelva

$$2 - \frac{1}{z+1} = \frac{z}{z+1} \quad (2)$$

Solución. Multiplicando los dos lados de la ecuación dada por $z + 1$ produce una ecuación lineal:

$$(z+1)\left(2 - \frac{1}{z+1}\right) = (z+1)\left(\frac{z}{z+1}\right)$$

$$2z + 2 - 1 = z \quad (3)$$

La solución de la ecuación (3) es $z = -1$. Puesto que hemos multiplicado por una expresión que contiene una variable, debemos verificar $z = -1$, sustituyéndola en la ecuación original (2). Obtenemos

$$2 + \frac{1}{-1+1} = \frac{-1}{-1+1}, \quad \text{o} \quad 2 + \frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$$

Ya que la división por 0 no es permisible, $z = -1$ no es una solución de la ecuación original. Así, 0 es una solución extraña, y la ecuación (2) no tiene soluciones.

Nota de advertencia: como lo muestra el ejemplo 5, es esencial verificar una "solución" que se ha obtenido como resultado de multiplicar ambos lados de una ecuación por una expresión que puede ser 0 para algunos valores de la variable.

EJEMPLO 6

Resuelva

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{2}{x^2-4x} \quad (4)$$

Solución. Para eliminar los denominadores en (4), multiplicamos ambos lados por el MCM de los denominadores de las fracciones en la ecuación:

$$\begin{aligned} x(x-4) \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} \right] &= x(x-4) \left[\frac{2}{x^2-4x} \right] \\ (x-4) + x &= 2 \\ 2x - 4 &= 2 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 3$ en (4), encontramos que este valor satisface la ecuación original.

EJERCICIO 2.1

En los problemas 1 al 6, determine si los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes.

1. $x = 8; x - 8 = 0$
2. $x = 12; 12 + x = 0$
3. $4y - (y - 1) = 2; 3y = 1$
4. $-2z - 4 = 6z + 10; -4z = 7$
5. $t + 1 = 1; \frac{t+1}{t} = \frac{1}{t}$
6. $x^2 = (x+1)^2; 2x + 1 = 0$

En los problemas 7 al 48, solucione la ecuación dada.

7. $2x + 14 = 0$
8. $3x - 5 = 0$
9. $-5w + 1 = 2$
10. $7z + 8 = -6$
11. $7(y + 1) - 2 = 5(y + 1) + 2$
12. $3y - 2 = y + 6$
13. $x - (2 - x) = 3(x + 1) + x$
14. $[2x - 2(x - 1)]5 = 4 - x$
15. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$
16. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5} = -1$
17. $-5t + 3 = 4(t - 6)$
18. $\frac{1}{3}(t - 2) + \frac{2}{3}t = 2t + \frac{1}{3}$
19. $\frac{1}{2}(u - 3) = 2u - \frac{3}{2}$
20. $\frac{1}{4}s + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s$
21. $0.2x + 1.2 = 0.5$

22. $2.1x - 3 = 0.5x + 0.2$
23. $-3.6z + 1.3 = 0.2(z - 3)$
24. $4.5x - 1.5x = 0.3(2 - x)$
25. $\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}x$
26. $\frac{-2x}{\sqrt{3}} + 1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x$
27. $p^2 + 6p - 1 = p^2 - p + 6$
28. $r^2 + 5 = -(10r - r^2)$
29. $(2t - 1)^2 = 4t^2 + 1$
30. $(w - 1)(w + 1) = w(w - 4)$
31. $(x - 1)^3 = x^2(x - 3) + x$
32. $(x + 3)^2 + (x + 2)^3 = x^3 + 7x^2 + 9$
33. $2 + \frac{1}{x} = 3 + \frac{2}{x}$
34. $\frac{2}{t} - 1 = 5 - \frac{1}{t}$
35. $\frac{1}{s-1} = \frac{2}{s+1}$
36. $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{4-x} = 0$
37. $\frac{1}{y-2} = \frac{2y+1}{y^2-4}$
38. $\frac{x}{x-5} = 2 + \frac{5}{x-5}$
39. $\frac{2x}{x-2} - 2 = \frac{-4}{2-x}$

40. $\frac{3-z}{z-2} = \frac{z}{z+2} - 2$
41. $\frac{3}{x+5} - \frac{1}{x-2} = \frac{7}{x^2+3x-10}$
42. $\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x^2-1} = \frac{2}{x-1}$
43. $\frac{q}{q-3} - \frac{6}{q^2-2q-3} = 1$
44. $\frac{6}{3w+9} - \frac{4}{2w+6} = 0$
45. $\frac{3x}{x-2} = \frac{6}{x-2} + 1$
46. $\frac{x^2+3}{x-3} - \frac{x+6}{3-x} = 1$
47. $\frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{12}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$
48. $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{x}}$

49. Encuentre a de tal modo que la solución de $3x + 3a = 6x - a$ sea 4.

50. Halle d de manera que la ecuación

$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x+d}{x+2} = 0$$

no tenga soluciones.

51. Halle c de manera que $3(y-c) = 3y + 7$ sea una identidad.
52. Halle a de modo que $(x-1)(x+a) = x^2 - 2x - a$ sea una identidad.
53. Halle a de modo que $5-z = 1$ y $3z + 2a = 10$ sean ecuaciones equivalentes.
54. Halle la relación entre a y b si $ax + b = 0$ tiene la solución $x = 5$.
55. Considere lo siguiente:

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ x^2 + x &= x^2 - 1 \\ x(x+1) &= (x-1)(x+1) \\ x &= x-1 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

¿Cómo se obtiene el enunciado falso $0 = -1$ a partir de la proposición $x = -1$?

56. Considere esta secuencia de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= x^2 + 4x - 5 \\ (x+1)(x-1) &= (x+5)(x-1) \\ x+1 &= x+5 \\ 1 &= 5 \end{aligned}$$

- (a) ¿Cuál es la solución de la primera ecuación en la secuencia?
- (b) Encuentre una ecuación en la secuencia que no sea equivalente a la ecuación que la preceda.

57. La relación entre la temperatura medida en grados Celsius (T_C) y en grados Fahrenheit (T_F) está dada por

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$$

Halle la temperatura Fahrenheit correspondiente a (a) 16°C , (b) 120°C , (c) -5°C .

58. La velocidad v en pies/segundo de una bola de tenis t segundos después de que ha sido lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 8 pies/s está dada por

$$v = -32t + 8$$

¿Cuántos segundos han transcurrido cuando (a) $v = 4$ pie/s y (b) $v = 0$ pies/s?

59. Resuelva la ecuación

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

(dada al iniciar el capítulo) para determinar cuánto tiempo vivió Diofante.

60. Como lo informó en *Science and Sport* Thomas Vaughan (Boston: Little, Brown & Co., 1970), una serie de 4,200 medidas tomadas a 136 atletas mundiales se convirtieron en la fórmula para la velocidad máxima del corazón l_{\max} en latidos por minuto durante el ejercicio:

$$l_{\max} = 0.981 I_5 + 5.948$$

donde I_5 es la velocidad del corazón tomada dentro de los 5 segundos posteriores a la terminación del ejercicio.

- (a) Si la velocidad máxima del corazón de un campeón de atletismo es de 215, encuentre la velocidad del corazón inmediatamente después del ejercicio.
- (b) Si la velocidad máxima del corazón de un ciclista internacional es de 180, encuentre la velocidad del corazón inmediatamente después del ejercicio.
61. Para un gas ideal a baja presión, el volumen V a t grados Celsius está dado por

$$V = V_0 \left(1 + \frac{t}{273.15} \right)$$

donde V_0 es el volumen a 0°C . ¿A qué temperatura es $V = \frac{3}{4} V_0$ para un gas ideal a baja presión?

62. Estudios empíricos sobre la nevaska en la Gran Bretaña encontraron que el número de días D en un año en que el suelo está cubierto de nieve aumenta linealmente con la altitud:

$$D = 0.155H + 11$$

donde H es la altura medida en metros.

- (a) Según esta fórmula, ¿cuántos días hay una capa de nieve al nivel del mar?
- (b) ¿A qué altura esta fórmula predice una capa de nieve durante un año completo (365 días)?

2.2 Fórmulas y aplicaciones

Muchas aplicaciones de las matemáticas requieren el uso de fórmulas que incluyan varias variables. Frecuentemente, es necesario cambiar una fórmula dada por una forma más conveniente. Como lo ilustran los siguientes tres ejemplos, podemos despejar una variable deseada en términos de las variables restantes, encontrando ecuaciones equivalentes.

EJEMPLO 1

El área A de un triángulo con base b y altura h está dada por $A = \frac{1}{2}bh$ (véase figura 1).

Solución. Para despejar h , primero eliminamos los fraccionarios de la ecuación, multiplicando ambos lados por 2:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}bh \\ 2A &= 2\left(\frac{1}{2}bh\right) \\ 2A &= bh \end{aligned}$$

Para aislar h , multiplicamos ambos lados por $1/b$ y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}(2A) &= \frac{1}{b}(bh) \\ \frac{2A}{b} &= h \\ h &= \frac{2A}{b} \end{aligned}$$

$$\text{Area } A = \frac{1}{2}bh$$

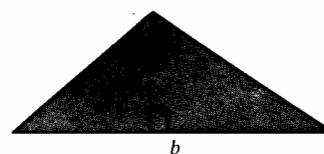


FIGURA 1

$$\text{Area } A = \frac{1}{2}h(b + B)$$

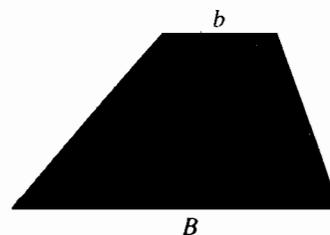


FIGURA 2

EJEMPLO 2

El área A de un trapecio con bases b y B y altura h está dada por $A = \frac{1}{2}h(b + B)$ (véase figura 2). Despeje B en términos de las variables restantes.

Solución. Procedemos como sigue para aislar B :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}h(b + B) \\ 2A &= h(b + B) \\ \frac{2A}{h} &= b + B \\ \frac{2A}{h} - b &= B \end{aligned}$$

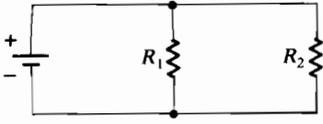
$$B = \frac{2A}{h} - b$$

Una forma equivalente de la última ecuación es $B = (2A - hb)/h$.

EJEMPLO 3

La resistencia total R de un circuito eléctrico que contiene las dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como lo muestra la figura 3, está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

**FIGURA 3**

Despeje R_2 en términos de R y R_1

Solución. Primero eliminamos las fracciones de la ecuación multiplicando ambos lados por RR_1R_2 que es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones en la ecuación:

$$\begin{aligned} RR_1R_2\left(\frac{1}{R}\right) &= RR_1R_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \\ R_1R_2 &= RR_2 + RR_1 \end{aligned}$$

Para obtener una ecuación equivalente con todos los términos que contengan a R_2 al lado izquierdo, restamos RR_2 de ambos lados:

$$R_1R_2 - RR_2 = RR_1$$

Puesto que R_2 es un factor común de cada término del lado izquierdo, podemos escribir

$$R_2(R_1 - R) = RR_1$$

Dividiendo ambos lados por $R_1 - R$ nos da

$$R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$$

PROBLEMAS DE PALABRAS

El álgebra es útil para solucionar muchos problemas prácticos que incluyen razón de cambio, mezclas, dinero, etc. Puesto que estos problemas se expresan con palabras, se llaman **problemas de palabras**. El reto de los problemas de palabras consiste en traducir las palabras en una ecuación algebraica apropiada. Ya que no hay un procedimiento único para hacer esta traducción, se requiere trabajo, práctica y paciencia para volverse un experto en la solución de problemas de palabras. Las siguientes sugerencias pueden ser útiles.



PROBLEMAS DE EDAD

Como primer ejemplo, considere el siguiente problema de edad.

EJEMPLO 4 _____

Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que Bill. Encuentre la edad actual de John.

Solución. La cantidad desconocida que va a ser determinada es la edad actual de John, entonces asignamos

$$x = \text{edad actual de John}$$

Luego podemos representar las otras cantidades del problema en términos de x :

$$x - 8 = \text{edad actual de Bill}$$

$$x - 2 = \text{edad de John hace dos años}$$

$$(x - 8) - 2 = x - 10 = \text{edad de Bill hace dos años}$$

Puede encontrar útil enumerar la información en forma tabular, como se muestra a continuación:

	EDAD ACTUAL	EDAD HACE DOS AÑOS
<i>John</i>	x	$x - 2$
<i>Bill</i>	$x - 8$	$x - 10$

Una ecuación que expresa la relación de sus edades hace dos años es

$$x - 2 = 5(x - 10)$$

Resolvemos esta ecuación

$$x - 2 = 5x - 50$$

$$48 = 4x$$

$$x = 12$$

Entonces, la edad actual de John es 12.

Prueba: si John tiene ahora 12 años, Bill debe tener 4. Hace dos años John tenía 10 y Bill 2. Puesto que $10 = 5(2)$, la respuesta corresponde.

PROBLEMAS DE INVERSION

Muchos **problemas de inversión** utilizan la fórmula del interés simple

$$I = Crt$$

donde I es la cantidad de interés ganada sobre una suma de dinero C (llamada capital) invertida a una tasa de interés simple de porcentaje r por t años. Como lo muestra el siguiente ejemplo, puede ser útil organizar los datos en forma tabular.

EJEMPLO 5 _____

Una mujer de empresa planea invertir un total de US\$24,000. Parte de él se pondrá en un certificado de ahorros que paga 9% de interés simple, y el resto en un fondo de inversiones

que produce 12% de interés simple. ¿Cuánto debe invertir en cada uno para obtener una ganancia de 10% sobre su dinero después de un año?

Solución. Sea

x = la cantidad en dólares invertida en el certificado de ahorros,
entonces $24,000 - x$ = la cantidad de dólares puesta en el fondo de inversiones.

La siguiente tabla resume la información dada.

	CAPITAL C	TASA DE INTERES r	TIEMPO t	INTERES GANADO $I = Cr t$
<i>Certificado de ahorros</i>	x	0.09	1	$x(0.09)(1) = 0.09x$
<i>Fondo de inversiones</i>	$24,000 - x$	0.12	1	$(24,000 - x)(0.12)(1)$ $= 0.12(24,000 - x)$
<i>Inversión equivalente</i>	24,000	0.10	1	$(24,000)(0.10)(1)$ $= 2,400$

Puesto que el interés combinado procedente del certificado de ahorros y el fondo de inversiones va a igualar el de una inversión total equivalente hecha a 10% de interés simple, tenemos

$$0.09x + 0.12(24,000 - x) = 0.10(24,000)$$

Despeje x como sigue:

$$9x + 12(24,000 - x) = 10(24,000)$$

$$9x + 288,000 - 12x = 240,000$$

$$-3x = -48,000$$

$$x = 16,000$$

Entonces, se deben invertir US\$16,000 en el certificado de ahorros, y se deben poner US\$24,000 - US\$16,000 = US\$8,000 en el fondo de inversiones.

Prueba: la suma de US\$16,000 y US\$8,000 es US\$24,000. El interés ganado sobre el certificado de ahorros es US\$16,000 $(0.09)(1) =$ US\$1,440. El interés ganado sobre el fondo de inversiones es de US\$8,000 $(0.12)(1) =$ US\$960. Si los US\$24,000 se invirtieron a 10%, el interés ganado sería $(US\$24,000)(0.10)(1) = 2,400$. Puesto que US\$1,440 + US\$960 = US\$2,400, la respuesta corresponde.

PROBLEMAS DE RAZON DE CAMBIO

Si un objeto se mueve a una velocidad constante r , entonces la distancia d que recorre en t unidades de tiempo está dada por

$$d = rt \quad (5)$$

Otras formas de (5) que pueden ser útiles para solucionar ciertos problemas de razón de cambio son

$$r = \frac{d}{t} \quad \text{y} \quad t = \frac{d}{r}$$

Comúnmente la parte más difícil de solucionar en un problema de distancia es determinar qué relación expresar como ecuación. Puede ser útil considerar las siguientes preguntas:

64. El concepto de temperatura de enfriamiento del viento está basado en el trabajo de Siple y Passel en 1945. Determinaron una fórmula empírica de razón de refrigeración

$$K = (10\sqrt{v} + 10.45 - v)(33 - T)$$

donde v es la velocidad del viento medida en m/s, T es la temperatura del aire en grados Celsius y K es la razón de refrigeración en kilocalorías/metro cuadrado/hora. La temperatura de refrigeración del viento ha sido definida como la temperatura T' para la cual una velocidad del viento de 2.2 m/s da la misma razón de refrigeración.

- (a) Utilizando las variables T , v , T' como se mencionaron arriba, escriba la ecuación que resulta de la definición de temperatura de refrigeración del viento.
 - (b) Resuelva la ecuación en la parte (a) para T' en términos de T y v .
 - (c) Encuentre la temperatura de refrigeración del viento si $T = -10^\circ\text{C}$ y $v = 5$ m/s.
65. Dos plantas industriales que producen componentes de máquinas están localizadas a 100 millas sobre el río Watchacallit (véase figura 6). Ambas plantas venden componentes al mismo precio, US\$150. Sin embargo, debido a que una planta está río arriba, sus costos de embarque son más bajos para los clientes ubicados en medio de las dos plantas: 30 centavos por milla por componente en vez de 75 centavos por milla.
- (a) Suponiendo que un cliente comprará de la planta que ofrezca el costo total más bajo, ¿a qué distancia río arriba tendrá clientes la planta de río abajo?
 - (b) ¿Cómo cambia su respuesta de la parte(a) si las dos plantas elevan el precio de sus componentes de US\$150 a US\$160?
 - (c) ¿Cómo cambia su respuesta de la parte (a) si los costos de embarque se duplican?
 - (d) ¿Qué precio de venta tendría que ofrecer la planta de río abajo para recuperar la mitad del territorio entre las dos plantas?

66. Los conservacionistas tienen una forma simple de calcular la población total de especies de peces en un lago. Tienden redes por 24 horas y después cuentan y marcan los peces atrapados. Estos peces son liberados y se lanzan de nuevo las redes por otras 24 horas. Típicamente, la captura en el segundo día incluye tanto los peces marcados como los no marcados. Para obtener un cálculo de la población, los conservacionistas asumen que la razón de peces marcados respecto de la captura total del segundo día iguala la razón de captura del primer día respecto de la población total.

- (a) Escriba una fórmula que exprese esta suposición, utilizando los símbolos P para población total, C_1 y C_2 para el número de peces atrapados el primero y segundo días respectivamente, y m para el número de peces marcados el segundo día.
- (b) Resuelva la ecuación obtenida en la parte (a) para P .
- (c) Si se atrapan 40 róbalo el primer día y 5 de 45 róbalo atrapados el segundo día ya están marcados, ¿cuántos róbalo se calcula que hay en el lago?

(Nota: en la práctica actual, se tienden las redes por varios días y se utiliza un análisis estadístico para obtener un cálculo más preciso de la población total de peces).

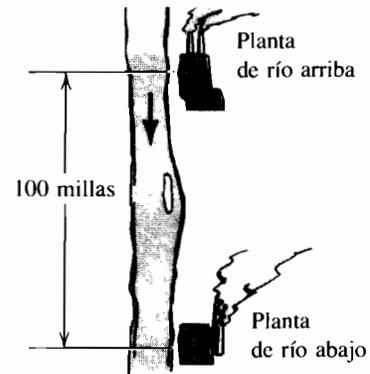


FIGURA 6

2.3 Ecuaciones cuadráticas

La ecuación lineal $ax + b = 0$, $a \neq 0$, la cual estudiamos en la sección 2.1, es un tipo especial de ecuación polinómica. Una **ecuación polinómica de grado n** es una ecuación de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \quad (6)$$

donde n es un número entero no negativo y a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, son números reales. Para una ecuación lineal el grado $n = 1$.

La solución de una ecuación polinómica se llama **raíz** de la ecuación. Por ejemplo, sabemos que $-b/a$ es la única raíz de la ecuación polinómica lineal de primer grado $ax + b = 0$

En esta sección examinamos la **ecuación cuadrática** o de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad (7)$$

Demostraremos que esta ecuación tiene a lo sumo dos raíces. Las ecuaciones polinómicas de más alto grado se estudiarán en el capítulo 4.

Muchos problemas sobre objetos en movimiento incluyen ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, si se lanza un globo de agua con una velocidad inicial de 48 pies/s directamente hacia abajo desde una ventana de un dormitorio 64 pies arriba del suelo, la altura s (en pies) arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$s = -16t^2 - 48t + 64$$

Cuando el globo golpea el suelo, su altura s es igual a 0; entonces, podemos hallar el tiempo transcurrido solucionando

$$-16t^2 - 48t + 64 = 0$$

Esta ecuación es equivalente a

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

METODO DE FACTORIZACION

Como veremos, esta ecuación se resuelve fácilmente por medio del **método de factorización**. Este método se basa en la propiedad de la multiplicación por cero que se trató en la sección 1.1: si a y b representan números reales y $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. La técnica se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1

Resuelva $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Solución. Por factorización, obtenemos la ecuación equivalente

$$(x + 3)(2x - 1) = 0$$

Si aplicamos la propiedad de la multiplicación por cero concluimos que

$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones lineales son

$$x = -3 \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2}$$

respectivamente. El hecho de que éstas sean raíces de la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ puede verificarse por sustitución.

Ahora podemos solucionar fácilmente $t^2 + 3t - 4 = 0$ para hallar el tiempo que le toma al globo golpear el suelo. Primero escribimos $t^2 + 3t - 4 = 0$ en su forma factorizada:

$$(t + 4)(t - 1) = 0$$

Según la propiedad de la multiplicación por cero, encontramos que debemos solucionar

$$t + 4 = 0 \quad \text{y} \quad t - 1 = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones son

$$t = -4 \quad \text{y} \quad t = 1$$

- ¿Hay dos distancias (o tiempos o velocidades) que sean iguales?
- ¿Es la suma de dos distancias (o tiempos o velocidades) una constante?
- ¿Es la diferencia de dos distancias (o tiempos o velocidades) una constante?

EJEMPLO 6 _____

A una motociclista le toma 1 hora y media más en la noche que en el día viajar entre dos ciudades. En la noche recorre un promedio de 40 millas por hora mientras que en el día puede recorrer un promedio de 55 millas por hora. Encuentre la distancia entre las dos ciudades.

Solución. Asignemos $d =$ a la distancia entre las dos ciudades. La siguiente tabla muestra la distancia, velocidad y tiempo de cada viaje.

	DISTANCIA d	VELOCIDAD r	TIEMPO $t = \frac{d}{r}$
Noche	d	40	$\frac{d}{40}$
Día	d	55	$\frac{d}{55}$

Puesto que le toma 1.5 horas más recorrer la distancia entre las dos ciudades en la noche, tenemos

$$\frac{d}{40} - \frac{d}{55} = 1.5$$

Multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $(40)(55) = 2,200$ y despejamos:

$$\begin{aligned} 55d - 40d &= 3,300 \\ 15d &= 3,300 \\ d &= 220 \end{aligned}$$

La distancia entre las dos ciudades es de 200 millas.

Prueba: su tiempo en la noche es de $220/40 = 5.5$ horas, y durante el día es $220/55 = 4$ horas. Puesto que $5.5 - 4 = 1.5$, la respuesta corresponde.

PROBLEMAS DE MEZCLAS

Los **problemas de mezclas** se dan principalmente en química, farmacología, manufactura y situaciones de la vida diaria. Cuando resolvemos problemas mezclas, nos centramos en la cantidad que tiene un elemento en cada una de las diferentes combinaciones. De nuevo, puede ser útil organizar la información en forma tabular, como lo vemos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 _____

Halle cuántos litros de alcohol puro deben añadirse a 15 L de solución que contiene 20% de alcohol para que la mezcla resultante sea de 30% de alcohol.

Solución

Sea $x =$ cantidad de alcohol puro añadida

Entonces $15 + x =$ cantidad en litros en la nueva solución.

La siguiente tabla resume la información dada.

	LITROS DE SOLUCION	CONCENTRACION DE ALCOHOL	LITROS DE ALCOHOL
<i>Solución original</i>	15	0.20	$0.20(15)$
<i>Alcohol puro</i>	x	1.00	$1.00x$
<i>Mezcla resultante</i>	$15 + x$	0.30	$0.30(15 + x)$

Puesto que la cantidad de alcohol en la solución original más la cantidad de alcohol puro añadida balancean la cantidad de alcohol en la mezcla resultante, tenemos:

$$0.20(15) + 1.00x = 0.30(15 + x)$$

$$3 + x = 4.5 + 0.3x$$

$$0.7x = 1.5$$

$$x = \frac{15}{7}$$

La cantidad de alcohol puro añadida es $\frac{15}{7}$ L.

Prueba: si se agregan $\frac{15}{7}$ L de alcohol, la nueva solución sumando $15 + \frac{15}{7} = \frac{120}{7}$ L contiene $(0.20)(15) + \frac{15}{7} = \frac{36}{7}$ L de alcohol. Ya que $\frac{36}{120} = 0.30$, la nueva solución es de 30% de alcohol y la respuesta corresponde.

PROBLEMAS DE TRABAJO

Muchas personas (o máquinas) que hacen el mismo trabajo, cada uno de ellos trabajando a una velocidad constante, pueden completar el trabajo más rápido que si alguno de ellos trabajara solo. Entonces, para solucionar **problemas de trabajo**, utilizamos el siguiente principio básico. Si un individuo puede hacer todo el trabajo en T unidades de tiempo, se concluye que en x unidades de tiempo, x/T del trabajo se completa. Por ejemplo, si una persona puede hacer un trabajo completo en 5 horas, entonces en 3 horas pueden hacerse $\frac{3}{5}$ del trabajo.

EJEMPLO 8

Trabajando sola, una bomba A puede llenar un tanque en 2 horas y una bomba B puede llenar el mismo tanque en 3. Determine qué tan rápido las bombas pueden llenar el tanque trabajando juntas.

Solución. Asignando a

$x =$ el número de horas que ambas bombas requieren para llenar el tanque juntas.

Entonces

$\frac{x}{2} =$ fracción del trabajo completo culminado en x horas por una bomba A

y

$$\frac{x}{3} = \text{fracción de todo el trabajo culminado en } x \text{ horas por una bomba B.}$$

Esta información se sintetiza en el siguiente cuadro.

	TIEMPO (EN HORAS) PARA COMPLETAR TODO EL TRABAJO	FRACCIÓN DE TRABAJO COMPLETADO EN x HORAS
Bomba A	2	$\frac{x}{2}$
Bomba B	3	$\frac{x}{3}$
Ambas	x	1

La suma de las fracciones hechas por cada bomba en x horas es 1, ya que las dos bombas, al trabajar juntas completan todo el trabajo en x horas. Entonces, tenemos

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$$

Despejando x , encontramos

$$\begin{aligned} 3x + 2x &= 6 \\ 5x &= 6 \\ x &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Trabajando ambas bombas les toma $\frac{6}{5}$ horas (1 hora 12 min) para llenar el tanque.

Prueba: en $\frac{6}{5}$ horas la bomba A llena $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ de tanque, y la bomba B llena $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ de tanque. Puesto que $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$, la solución corresponde.

Además de la edad, la inversión, la razón de cambio, la mezcla y los problemas de trabajo que acabamos de considerar, hay una gran variedad de problemas de palabras. Terminamos esta sección con dos ejemplos adicionales.

EJEMPLO 9

Un campo rectangular que es 20 metros (m) más largo que ancho está circundado de exactamente 100 m de cercado ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

Solución. La descripción geométrica de este problema nos obliga a hacer un diagrama. (Véase figura 4).

Asignando $a =$ ancho del campo en metros

Entonces $a + 20 =$ longitud del campo en metros.

Ya que el perímetro del campo es de 100 m, tenemos

$$100 = 2a + 2(a + 20)$$

Despejando a , encontramos que

$$\begin{aligned} 100 &= 4a + 40 \\ 60 &= 4a \\ 15 &= a \end{aligned}$$

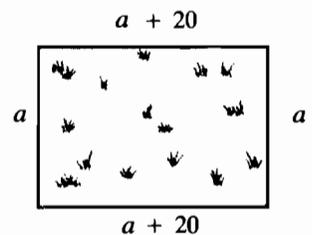


FIGURA 4

Así, el ancho es $a = 15$ y la altura es $a + 20 = 35$ m.

Prueba: la altura es de 20 m más que el ancho, ya que $35 - 15 = 20$, y la cantidad de cercado requerida es $2(35) + 2(15) = 70 + 30 = 100$. Entonces, la respuesta corresponde.

EJEMPLO 10

Un estudiante saca un puntaje de 75 y 82 en sus dos primeros exámenes. ¿Qué puntaje en el próximo examen elevará a 85 su promedio?

Solución. Sea

$x =$ puntaje en el tercer examen.

Entonces, el promedio de los puntajes de los 3 exámenes se representa por

$$\frac{75 + 82 + x}{3}$$

Ya que este promedio debe igualarse a 85, tenemos

$$\frac{75 + 82 + x}{3} = 85$$

Despejando x , obtenemos

$$\begin{aligned} 75 + 82 + x &= 3(85) \\ 157 + x &= 255 \\ x &= 98 \end{aligned}$$

En consecuencia, un puntaje de 98 en el tercer examen elevará a 85 el promedio del estudiante.

Prueba: si los tres puntajes de los exámenes son 75, 82 y 98, el promedio del estudiante será

$$\frac{75 + 82 + 98}{3} = 85$$

Por tanto, la respuesta corresponde.

A medida que empiece a hacer los ejercicios, recuerde seguir las sugerencias dadas en la página 68. Leer y profundizar los ejemplos de esta sección algunas veces puede ayudarle. Examine cómo seguimos nosotros las sugerencias. Sobre todo, ¡no se desanime!

EJERCICIO 2.2

En los problemas 1 al 18 despeje la variable indicada en términos de las variables restantes.

1. Circunferencia de un círculo
 $C = 2\pi r$, para r
2. Perímetro de un rectángulo
 $P = 2a + 2l$, para l
3. Interés simple
 $I = Crt$, para t

4. Área lateral de la superficie de un cilindro
 $S = 2\pi rh$, para h
5. Línea recta: forma general
 $ax + by + c = 0$, para y
6. Línea recta: pendiente - intercepto
 $y = mx + b$, para x
7. Cantidad acumulada bajo interés simple
 $A = C + Crt$, para C

8. Volumen de un paralelepípedo rectangular
 $V = lah$, para h
9. Ecuación de la recta: interceptos en x y en y
 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, para x
10. Ecuación de la recta: punto pendiente
 $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$, para y
11. Resistencia, en circuitos paralelos
 $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, para R_2
12. Capacitancia en circuitos en serie
 $C = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2}$, para C
13. Término enésimo de una sucesión aritmética
 $a_n = a + (n - 1)d$, para n
14. Suma de una serie geométrica
 $S = \frac{a}{1 - r}$, para r
15. Ley de la gravitación universal de Newton
 $F = g \frac{m_1 m_2}{r^2}$, para m_2
16. Cuerpo de caída libre
 $s = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$, para v_0
17. Suma parcial de una sucesión geométrica
 $S = \frac{a - r^n}{1 - r}$, para l
18. Area de la superficie de un cilindro
 $A = 2\pi r(r + h)$, para h
19. Encuentre dos números enteros cuya suma sea 50 y cuya diferencia sea 26.
20. El cociente de dos números es 4. Si un número es 39 menos que el otro, encuentre los dos números.
21. Encuentre tres números enteros consecutivos cuya suma sea 48.
22. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos pares es 92. Encuentre los dos números.
23. En 5 años Bryan tendrá 3 veces la edad que tenía hace 7 años. ¿Cuántos años tiene?
24. La firma sanitaria Papik e Hijo anuncia "30 años de experiencia" en higiene sanitaria. Si el padre tiene 16 años más de experiencia en higiene sanitaria que su hijo, ¿cuánto tiempo de experiencia en higiene sanitaria tiene cada uno?
25. Una pareja tiene US\$40,000 para invertir. Si invierte US\$16,000 a 12% y US\$14,000 a 8%, ¿a qué porcentaje debe invertir el resto para tener un ingreso de US\$4,000 proveniente de sus inversiones?
26. El Sr. Janette tiene tres inversiones de las que recibe un ingreso anual de US\$2,780. Una inversión de US\$7,000 está a una tasa de interés anual de 8%. Otra inversión de US\$10,000 está a una tasa de interés anual de 9%. ¿Cuál es la tasa de interés anual que recibe sobre la tercera inversión de US\$12,000?
27. La señora Beecham invirtió parte de US\$10,000 en un certificado de ahorros a 7% de interés simple. El resto lo invirtió en un título que producía 12%. Si recibió un total de US\$900 de intereses por el primer año, ¿cuánto dinero invirtió en el título?
28. Los Wilson tienen US\$30,000 invertidos a 12% y otra suma invertida a 8.5%. Si el ingreso anual sobre la cantidad total invertida es equivalente a un porcentaje de 10% sobre el total, ¿cuánto han invertido a 8.5%?
29. Un auto viaja del punto A al punto B a una velocidad promedio de 55 mph y regresa a una velocidad de 50 mph. Si todo el viaje tomó 7 horas, encuentre la distancia entre A y B.
30. Un avión va en la dirección del viento entre Los Angeles y Chicago en 3.5 horas y viaja contra el viento de Chicago a Los Angeles en 4 horas. Si la velocidad del avión con aire quieto es de 600 mph, halle la velocidad del viento. ¿Cuál es la distancia entre Los Angeles y Chicago?
31. Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3 mph, o en bicicleta a una velocidad de 12 mph. Si le toma una hora más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.
32. Un muchacho parte del punto P en una bicicleta y viaja a una velocidad de 15 km/h. Treinta minutos después, otro muchacho parte del punto P en una bicicleta y viaja a diferente velocidad. Alcanza al primer ciclista $2\frac{1}{2}$ horas después. Encuentre la velocidad del segundo ciclista.
33. Un hombre recorrió 289 km en auto y luego montó en bicicleta 50 km más. Si el tiempo total del viaje fue de 12 horas y la velocidad en la bicicleta fue $\frac{1}{4}$ de la velocidad en el auto, encuentre cada velocidad.
34. Un cohete llevó una cápsula a la atmósfera. La cápsula aterrizó 72 minutos más tarde, después de hacer un controlado descenso con una velocidad vertical promedio de 420 km/h. Si el cohete tenía una velocidad vertical promedio de 1,010 km/h desde el despegue hasta que se lanzó la cápsula, ¿a qué altura se lanzó la cápsula?
35. El radiador de un automóvil contiene 10 qt de una mezcla de agua y 20% de anticongelante. ¿Qué cantidad de esta mezcla debe vaciarse y remplazarse por anticongelante puro para obtener una mezcla de 50% en el radiador?
36. Una cortadora de césped utiliza una mezcla de combustible de 23 partes de gasolina y una parte de aceite. ¿Cuánta gasolina debe añadirse a un litro de mezcla que tiene 5 partes de gasolina y una parte de aceite para obtener la mezcla correcta?
37. Cierta capa de suelo de plantación contiene 10% de turba y otra capa contiene 30%. ¿Qué cantidad de cada suelo debe mezclarse para producir 2 pies cúbicos de suelo de plantación que tenga 25% de turba?
38. El jefe de una estación de servicio compró 15,000 galones de gasolina corriente y de primera calidad por US\$8,550. Si el precio mayorista fue de 55¢ por galón para la gasolina corriente y 60¢ por galón para la gasolina de primera calidad, determine cuántos galones de cada clase de gasolina se compraron.
39. Un carnicero vende una clase de carne de res a US\$0.95 por libra y otra clase a US\$1.20 por libra. Desea combinar las dos

- clases para obtener una mezcla que se venda a US\$ 1.15 por libra. ¿Qué porcentaje de cada clase se debe utilizar?
40. Si Meagan puede completar una tarea en 50 minutos trabajando solo y Colleen puede hacerlo sólo en 25 min, ¿cuánto tiempo les tomará hacerla trabajando juntos?
 41. Si Karen puede recoger un sembrado de frambuesas en 6 horas y Stan puede hacerlo en 8, encuentre qué tan rápido pueden recoger el sembrado juntos.
 42. Utilizando dos mangueras de diferente diámetro, el dueño de una casa puede llenar una tina caliente en 40 minutos. Si una manguera sola puede llenar la tina en 90 minutos, encuentre qué tan rápido llena la tina por sí sola la otra manguera.
 43. Margot puede limpiar su habitación sola en 50 minutos. Si Jeremy le ayuda, le toma 30 minutos. ¿Cuánto tiempo le tomaría a Jeremy arreglar la habitación sola?
 44. Un tubo de escape puede vaciar un tanque en 4 horas. El tubo se abrió por 1.5 horas y luego se cerró. En ese momento se abrió un segundo tubo y tomó 2 horas terminar de vaciar el tanque. ¿Cuánto tiempo le habría tomado al segundo tubo solo vaciar el tanque?
 45. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y el ancho es $\frac{2}{3}$ de la altura. Encuentre las dimensiones del rectángulo.
 46. El área de un trapecio es de 250 pies² y la altura es de 10 pies. ¿Cuál es la longitud de la base mayor si la de la menor es de 20 pies?
 47. El lado mayor de un triángulo es de 2 cm más largo que el lado menor. El tercer lado tiene 5 cm menos que el doble de la longitud del lado menor. Si el perímetro es 21 cm, ¿cuál es el la longitud de cada lado?
 48. Un granjero desea encerrar un campo rectangular y dividirlo en 3 partes iguales con cercado (véase figura 5).

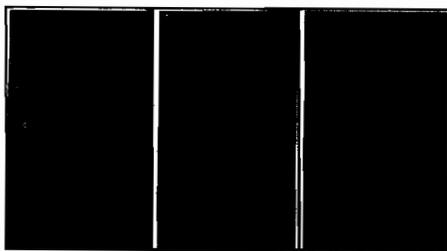


FIGURA 5

Si la longitud del campo es 3 veces el ancho y se requieren 1,000 metros de cercado, ¿cuáles son las dimensiones del campo?

49. El área de un círculo es 80π cm² menor que el área de uno cuyo radio es 4 cm mayor. Encuentre el radio del círculo más pequeño.
50. La fórmula recomendable para convertir la dosis adulta de una droga en dosis infantil supone una relación entre la edad y la dosificación, y se utiliza para niños menores de dos años:

$$\frac{\text{edad en meses}}{150} \times \text{dosis adulta} = \text{dosis infantil}$$

¿A qué edad es la dosis del adulto 10 veces la del niño?
51. Josué presentó un examen. Si deber sacar 99 en un segundo examen para tener un promedio de 73 en ambos exámenes, ¿cuánto sacó en el primero?
52. Antes del examen final, un estudiante tiene notas de 72 y 86. Si el examen final vale la mitad de la nota final, ¿cuánto debe sacar para finalizar el curso con un promedio de 80?
53. Judy venció a John en una rigurosa elección de presidente del salón de los de último año, donde se registraron 211 votos. Si 5 estudiantes hubieran votado por John en vez de Judy, entonces John habría ganado por 1 voto. ¿Cuántos estudiantes votaron por Judy?
54. En la escuela de la avenida Cayley, 40 más de la mitad de los estudiantes son muchachos. Si el número de muchachas es 2 menos que la mitad del número de muchachos, ¿cuántos estudiantes asisten a la escuela?
55. Kurt tiene 4 monedas más de 10¢ que de 5¢. Si el valor total de estas monedas es de US\$2.35, encuentre cuántas monedas de 10¢ y de 5¢ tiene Kurt.
56. Heidi tiene US\$4.65 en monedas de 5¢, de 10¢ y de 25¢. Tiene 4 monedas más de 25¢ que de 10¢ y 5 monedas más de 5¢ que de 25¢. ¿Cuántas monedas de cada clase tiene Heidi?
57. El dígito de las unidades de un número de 2 dígitos es 5 más que el dígito de las decenas. Si el número original se divide por el número con los dígitos invertidos, el resultado es $\frac{3}{8}$. Encuentre el número original.
58. El denominador de un fraccionario es 2 más que el numerador. Si tanto el numerador como el denominador se aumentan en 1 unidad, el fraccionario resultante es igual a $\frac{2}{3}$. Encuentre el número original.
59. El Sr. Chaney y su hijo Ryan acordaron que el Sr. Chaney le daría a Ryan US\$5 por cada problema de palabras que Ryan solucionara correctamente, pero que Ryan le pagaría a su padre US\$2 por cada solución incorrecta. Después de que Ryan hubo completado 70 problemas, ninguno le debía nada al otro. ¿Cuántos problemas solucionó correctamente Ryan?
60. Un trabajador obtuvo 6% de aumento, lo cual es US\$480. ¿Cuál era el antiguo salario?, ¿cuál es el nuevo salario?
61. La compañía de gas vende una manta aislante para un calentador de agua por US\$20. Afirma que la frazada reducirá los gastos de combustible hasta 10%. Si el costo mensual promedio del combustible para el agua caliente es de US\$20, ¿qué tan rápido se "pagará sólo" el aislamiento?
62. En un banquete, el administrador de un restaurante dota un bar para particulares con bebidas evaluadas en cifras redondas, para simplificar las transacciones. Se incluye 5% del impuesto de ventas en los precios redondeados. Al final del banquete, el administrador encuentra exactamente US\$200 en el registro. Es lo suficientemente inteligente como para saber que es mucho sacar US\$10 para el impuesto, pero es incapaz de deducir la cantidad correcta que se debe pagar.
 - (a) Explique por qué US\$10 son demasiado impuesto.
 - (b) Halle la cantidad correcta de impuesto de venta (hasta el último centavo).
63. Para un descuento de 25% en las ventas, un tendero siempre computa primero el descuento y luego añade 6% del impuesto de ventas. Otro empleado en el mismo almacén siempre añade primero el impuesto de ventas y luego aplica el descuento.
 - (a) ¿Tiene alguna diferencia?
 - (b) ¿Puede demostrar que éste siempre es el caso para cualquier descuento y cualquier impuesto de venta?

Por sustitución, podemos verificar que tanto $t = -4$ como $t = 1$ satisfacen la ecuación cuadrática $-16t^2 - 48t + 64 = 0$. Puesto que $t = 1$ segundo es la única respuesta positiva, es la única solución significativa al problema físico.

Nota de advertencia: como vemos en el ejemplo del globo de agua, no todas las soluciones de una ecuación necesariamente llenarán las condiciones que el problema requiere.

EJEMPLO 2

Resuelva $12x^2 + 15x = 18$.

Solución. Ya que planeamos probar el método de factorización, debemos empezar por escribir la ecuación en la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$:

$$12x^2 + 15x - 18 = 0$$

Eliminando el factor común 3, se simplifica la ecuación:

$$3(4x^2 + 5x - 6) = 0$$

$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

Factorizando tenemos, entonces, $(4x - 3)(x + 2) = 0$

Utilizando la propiedad de la multiplicación por cero, igualamos cada factor a cero para obtener

$$4x - 3 = 0 \quad \text{y} \quad x + 2 = 0$$

Resolviendo cada una de estas ecuaciones resulta $x = \frac{3}{4}$ y $x = -2$. Por tanto, las raíces de la ecuación cuadrática son $\frac{3}{4}$ y -2 .

Nota de advertencia: cuando se soluciona una ecuación cuadrática por factorización, se debe igualar la expresión cuadrática a cero. En el ejemplo 2 no tiene ningún sentido factorizar $4x^2 + 5x = 6$ como $x(4x + 5) = 6$. Puesto que el lado derecho es 6 (no 0), no podemos concluir nada sobre los factores x y $4x + 5$.

METODO DE RAIZ CUADRADA

Si la ecuación cuadrática tiene la forma especial

$$x^2 = d, \text{ para } d \geq 0 \tag{8}$$

podemos resolverla factorizando:

$$\begin{aligned} x^2 - d &= 0 \\ (x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) &= 0 \\ x &= \sqrt{d} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{d} \end{aligned}$$

Un método alternativo para resolver la ecuación (8) es sacar la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación. Esto se resume como el **método de raíz cuadrada**.

$$\text{Si } x^2 = d, d \geq 0, \text{ entonces } x = \pm\sqrt{d}$$

EJEMPLO 3

Utilice el método de raíz cuadrada para resolver (a) $2x^2 = 6$ y (b) $(y - 3)^2 = 5$.

SOLUCION

(a) Multiplicamos ambos lados de $2x^2 = 6$ por $\frac{1}{2}$ para obtener la forma especial (8):

$$\frac{1}{2}(2x^2) = \frac{1}{2}(6).$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Entonces, las raíces son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$.

(b) Observamos que para $x = y - 3$ y $d = 5$, la ecuación $(y - 3)^2 = 5$ tiene la forma especial (8). Entonces, sacamos la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación:

$$(y - 3)^2 = 5$$

$$y - 3 = \pm\sqrt{5}$$

Esto produce

$$y - 3 = \sqrt{5} \quad y \quad y - 3 = -\sqrt{5}$$

Resolviendo cada una de éstas, encontramos

$$y = 3 + \sqrt{5} \quad y \quad y = 3 - \sqrt{5}$$

Entonces, las raíces son $3 + \sqrt{5}$ y $3 - \sqrt{5}$.

METODO DE COMPLETAR EL CUADRADO

Cuando una expresión cuadrática no puede ser factorizada fácilmente y la ecuación no tiene la forma especial (8), podemos encontrar las raíces **completando el cuadro**. Esta técnica se aplica a la expresión cuadrática de la forma

$$x^2 + Bx + C$$

esto es, la expresión cuadrática debe tener 1 como su coeficiente principal. Reescribimos la ecuación

$$x^2 + Bx + C = 0 \tag{9}$$

de modo que sólo los términos que estipulan la variable x están al lado izquierdo de la ecuación:

$$x^2 + Bx = -C$$

Luego, agregamos $(B/2)^2$ a ambos lados:

$$x^2 + Bx + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

Ahora, el lado izquierdo es un cuadrado perfecto,

$$\left(x + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

y es fácil despejar x utilizando el método de raíz cuadrada. Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4

Resuelva $2x^2 + 2x - 1 = 0$ completando el cuadrado.

Solución. Comenzamos por dividir ambos lados de la ecuación por el coeficiente de x^2 , para obtener la forma (9):

$$x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$$

Ahora escribimos esta ecuación como

$$x^2 + x = \frac{1}{2}$$

y añadimos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Entonces, tenemos

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Al sacar la raíz de ambos lados de la ecuación da

$$x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Las soluciones, o raíces, son entonces $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

LA FORMULA CUADRATICA

La técnica de completar el cuadrado en una expresión cuadrática es muy útil en otras situaciones. La encontramos de nuevo en los capítulos 3 y 10. Por ahora, su valor consiste en ayudarnos a deducir una fórmula que exprese las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ en términos de los coeficientes a , b , y c . Primero escribimos la ecuación de modo que su coeficiente principal sea 1:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Luego completamos el cuadrado y despejamos x :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

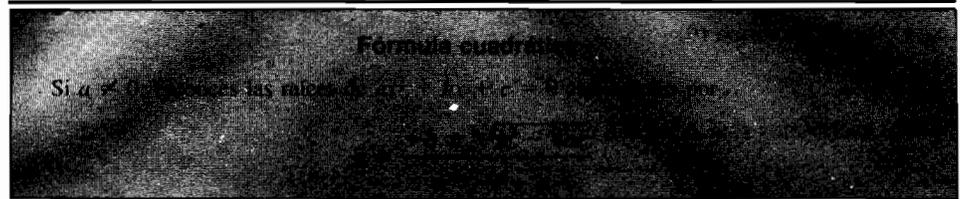
$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

Si $a > 0$, entonces $\sqrt{4a^2} = |2a| = 2a$ y tenemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{10}$$

Si $a < 0$, entonces $\sqrt{4a^2} = |2a| = -2a$ y, después de simplificar, vemos que el resultado en (10) aún es válido. Este resultado se conoce como la **fórmula cuadrática**.



EL DISCRIMINANTE

De la fórmula cuadrática vemos que $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La naturaleza de estas raíces está determinada por el radicando $b^2 - 4ac$, al cual se llama **discriminante**. Por la ley de la tricotomía de la sección 1.2, el discriminante debe ser positivo, cero o negativo. Estos 3 posibles casos se sintetizan en la siguiente tabla.

DISCRIMINANTE	RAICES
$b^2 - 4ac > 0$	Dos raíces reales diferentes
$b^2 - 4ac = 0$	Raíces reales iguales
$b^2 - 4ac < 0$	No hay raíces reales

EJEMPLO 5

Resuelva $3x^2 - 2x - 4 = 0$.

Solución. De la fórmula cuadrática con $a = 3$, $b = -2$, y $c = -4$, tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

Entonces, las soluciones son $(1 - \sqrt{13})/3$ y $(1 + \sqrt{13})/3$. Aquí vemos que el discriminante positivo 13 dio por resultado dos raíces reales diferentes.

EJEMPLO 6

Resuelva $9x^2 + 16 = 24x$.

Solución. Para utilizar la fórmula cuadrática, primero debemos escribir la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Entonces, podemos aplicar la fórmula cuadrática a $9x^2 - 24x + 16 = 0$ para obtener

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(9)(16)}}{2(9)} \\
 &= \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{18} \\
 &= \frac{24}{18} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Puesto que el discriminante es 0, las raíces son iguales y la solución es $\frac{4}{3}$.

EJEMPLO 7 _____

Resuelva $3x^2 - x + 2 = 0$.

Solución. Puesto que el discriminante

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(2) = -23$$

es negativo, concluimos que la ecuación dada no tiene raíces reales.

Ciertas ecuaciones polinómicas de grado mayor que dos pueden solucionarse utilizando la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 8 _____

Resuelva $4x^3 + 8x^2 - 4x = 0$.

Solución. Factorizando, escribimos la ecuación como

$$4x(x^2 + 2x - 1) = 0$$

o

$$x(x^2 + 2x - 1) = 0$$

Entonces,

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x^2 + 2x - 1 = 0$$

Resolviendo la segunda ecuación con la fórmula cuadrática nos da

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} \\
 &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Las soluciones son 0, $-1 - \sqrt{2}$ y $-1 + \sqrt{2}$.

EJEMPLO 9 _____

Resuelva $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$.

Solución. Esta ecuación polinómica puede considerarse una ecuación cuadrática en la variable x^2 ; esto es,

$$(x^2)^2 - 2(x^2) - 2 = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática para despejar x^2 , tenemos

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{3}$$

Entonces

$$x^2 = 1 + \sqrt{3} \quad \text{o} \quad x^2 = 1 - \sqrt{3}$$

De $x^2 = 1 - \sqrt{3}$ no obtenemos raíces reales ya que $1 - \sqrt{3} < 0$.

De $x^2 = 1 + \sqrt{3}$ tenemos las raíces reales $-\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ y $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

Concluimos esta sección con varias aplicaciones que incluyen ecuaciones cuadráticas.

EJEMPLO 10

El área de un rectángulo es 138 cm^2 . Si la longitud es 5 cm más que 3 veces el ancho, halle las dimensiones del rectángulo.

Solución. Empezamos por dibujar y marcar un rectángulo, como lo muestra la figura 7. Designamos

$a =$ ancho del rectángulo en centímetros.

Entonces $3a + 5 =$ longitud del rectángulo en centímetros

y $a(3a + 5) = 138$

Para utilizar la fórmula cuadrática reescribimos esta ecuación como

$$3a^2 + 5a - 138 = 0$$

De la fórmula cuadrática, encontramos que $a = -\frac{23}{3}$ ó $a = 6$. Ya que el ancho de un rectángulo debe ser positivo, descartamos la solución $a = -\frac{23}{3}$. En consecuencia, la longitud es $3(6) + 5 = 23$ y las dimensiones del rectángulo son 6 cm y 23 cm.

Prueba: Ya que $23 = 3(6) + 5$ y $6(23) = 138$, la respuesta corresponde.

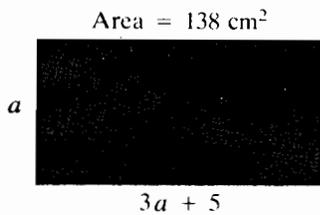


FIGURA 7



Pitágoras

EL TEOREMA DE PITAGORAS

El **teorema de Pitágoras** es uno de los más ampliamente utilizados de la geometría. Muchas de sus aplicaciones incluyen ecuaciones cuadráticas. A pesar de que se llamó así en honor del matemático griego Pitágoras, que vivió alrededor del 540 antes de Cristo, el resultado se conocía antes de su época. El teorema dice que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados. Para un triángulo rectángulo como el que muestra la figura 8, tenemos la siguiente fórmula:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hay una amplia gama de pruebas algebraicas y geométricas de este teorema. (Véanse problemas 89 y 90).

EJEMPLO 11

En un parque, dos aceras forman un ángulo recto con el patio P , el puesto de refrigerio R y el estacionamiento E , como lo muestra la figura 9. La longitud total de las aceras es 700 m. Al caminar a través del pasto directamente del estacionamiento al patio, los niños pueden acortar la distancia en 200 m. ¿Cuáles son las longitudes de las aceras?

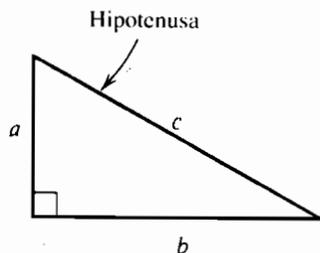


FIGURA 8

Solución. Si designamos

entonces $x =$ longitud de la acera del punto P al R .
 $700 - x =$ longitud de la acera de R a E .

Puesto que la distancia de P a E es 200 metros menor que la longitud total de las dos aceras, tenemos

$$700 - 200 = 500 = \text{distancia de } P \text{ a } E$$

Del teorema de Pitágoras, obtenemos la siguiente relación:

$$x^2 + (700 - x)^2 = (500)^2$$

Reescribimos esta ecuación y resolvemos por factorización:

$$2x^2 - 1400x + 240,000 = 0$$

$$x^2 - 700x + 120,000 = 0$$

$$(x - 400)(x - 300) = 0$$

$$x = 400 \quad \text{o} \quad x = 300$$

Refiriéndonos a la figura 9, si utilizamos $x = 400$, encontramos que la longitud de la acera desde el patio hasta el puesto de refrigerio es 400 m y la longitud de la acera desde el punto de refrigerio hasta el estacionamiento es $700 - 400 = 300$ m. De $x = 300$, encontramos que estas distancias están invertidas. Entonces, hay dos soluciones posibles a este problema.

Prueba: puesto que

$$700 = 300 + 400 \quad \text{y} \quad (500)^2 = (300)^2 + (400)^2$$

las soluciones corresponden.

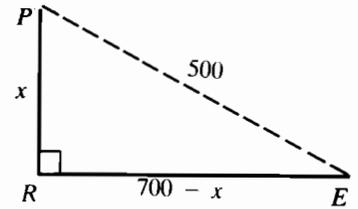


FIGURA 9

EJEMPLO 12

Un comisionista de vinos gastó US\$800 en algunas botellas de vino añejo Cabernet Sauvignon de California. Si cada botella hubiera costado US\$4 más, el comisionista habría obtenido 10 botellas menos por los US\$800. ¿Cuántas botellas se compraron?

Solución. La solución de este problema se basa en la siguiente relación:

$$(\text{costo por botella})(\text{número de botellas}) = 800 \tag{11}$$

Para la compra real, si designamos

$$x = \text{número de botellas compradas,}$$

entonces $\frac{800}{x} =$ costo por botella

Al precio más alto,

$$x - 10 = \text{número de botellas compradas}$$

y $\frac{800}{x} + 4 =$ costo por botella.

Utilizando esta información en la relación (11), obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{800}{x} + 4\right)(x - 10) = 800$$

con la cual despejamos x como sigue:

$$\begin{aligned}(800 + 4x)(x - 10) &= 800x \\ 4x^2 - 40x - 8000 &= 0 \\ x^2 - 10x - 2000 &= 0 \\ x &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{8100}}{2} = \frac{10 \pm 90}{2} \\ x &= 50 \quad \text{o} \quad x = -40\end{aligned}$$

Ya que debemos tener un número positivo de botellas compradas, encontramos que se compraron 50 botellas de vino.

Prueba: si se compraron 50 botellas por US\$800, el costo por botella fue de US\$800/50 = US\$16. Si cada botella costara US\$ 4 más, entonces el precio por botella habría sido US\$20. A este precio más alto precio, sólo US\$800/20 = 40 botellas se habrían podido comprar por US\$800. Ya que 50 - 10 = 40, la respuesta corresponde.

EJERCICIO 2.3

En los problemas 1 al 16, resuelva por factorización.

1. $x^2 - 16 = 0$
2. $y^2 - 17y + 16 = 0$
3. $2x^2 + x - 1 = 0$
4. $8t^2 - 22t + 15 = 0$
5. $1 + 4x + 4x^2 = 0$
7. $u^2 + 12 = 7u$
9. $25y^2 + 15y = -2$
11. $16b^2 - 1 = 0$
13. $x^3 - 9x = 0$
15. $4q^5 - 25q^3 = 0$
6. $4 + 5z - 6z^2 = 0$
8. $v^2 + 5v = -4$
10. $2a^2 = a + 1$
12. $25 - c^2 = 0$
14. $16p^4 - p^2 = 0$
16. $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$

Los problemas 17 al 22, resuélvalos utilizando el método de raíz cuadrada.

17. $x^2 = 17$
19. $(v + 5)^2 = 5$
21. $3(t + 1)^2 = 9$
18. $2y^2 = 100$
20. $5(w - 1)^2 = 4$
22. $4(s - 3)^2 = 5$

En los problemas 23-26, despeje x

23. $x^2 - b^2 = 0$
25. $(x - a)^2 = b^2$
24. $x^2 + 2dx + d^2 = 0$
26. $(x + c)^2 = d^2$

Los problemas del 27 al 34, resuélvalos completando el cuadrado.

27. $u^2 + 2u - 1 = 0$
29. $2k^2 + 5k + 3 = 0$
31. $10x^2 - 20x + 1 = 0$
33. $9t^2 = 36t - 1$
28. $v^2 + 3v - 2 = 0$
30. $4b^2 - 4b - 35 = 0$
32. $36 - 16w - w^2 = 0$
34. $r = 4r^2 - 1$

Los problemas 35 al 46, resuélvalos utilizando la fórmula cuadrática.

35. $3x^2 - 7x + 2 = 0$
37. $9z^2 + 30z + 25 = 0$
39. $2 + 5r - 10r^2 = 0$
36. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
38. $1 + 2w - 6w^2 = 0$
40. $8t = -(16t^2 + 1)$

41. $3s - 2s^2 = \frac{3}{2}$
43. $2c(c - 1) = 1$
45. $x^4 - 6x^2 + 7 = 0$
42. $\frac{1}{2}x^2 + x = 5$
44. $4x^2 = 2(x + 1)$
46. $y^4 - 2y^2 = 4$

Los ejercicios 47 al 56, resuélvalos utilizando cualquier método.

47. $3s^2 - 13s + 4 = 0$
49. $s^2 - 4s - 4 = 0$
51. $8t^2 + 10t + 5 = 0$
53. $24t^3 - 3t = 0$
55. $4p^2 = 60$
48. $4x^2 + 8x + 4 = 0$
50. $2.4 + 1.0y + 0.1y^2 = 0$
52. $r^2 + 2r = 35$
54. $9u^2 + 25 = 30u$
56. $5(c + 1)^2 = 25$

Las fórmulas dadas en los problemas 57 al 62 ocurren frecuentemente en las aplicaciones. Despeje la variable indicada en términos de las variables restantes. (Suponga que todas las variables representan números reales positivos).

57. Volumen de un cilindro
 $V = \pi r^2 h$, para r
58. Área de un círculo
 $A = \pi r^2$, para r
59. Área de la superficie de un cilindro
 $A = 2\pi r(r + h)$, para r
60. Ecuación de una elipse
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, para y
61. Cuerpo en caída libre
 $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$, para t
62. Ley de la gravitación universal de Newton
 $F = g \frac{m_1 m_2}{r^2}$, para r
63. Determine todos los valores de d de modo que $x^2 + (d + 6)x + 8d = 0$ tenga dos raíces iguales.

64. Determine todos los valores de d de modo que $3dx^2 - 4dx + d + 1 = 0$ tenga dos raíces iguales.
65. Determine la otra raíz de $(k - 2)x^2 - x - 4k = 0$, dado que una raíz es -3 .
66. Si r_1 y r_2 son dos raíces reales de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, demuestre que $r_1 + r_2 = -b/a$ y $r_1 \cdot r_2 = c/a$.
67. La suma de dos números es 22, y la suma de sus cuadrados es 274. Halle los números.
68. El producto de dos números es 1 más que 3 veces su suma. Halle los números si su diferencia es 9.
69. La base de un triángulo es 3 cm más larga que la altura. Si el área del triángulo es 119 cm^2 , halle la base y la altura.
70. En una caminata de 35 km un muchacho hace $\frac{1}{2}$ kilómetro por hora más rápido que otro muchacho. Si hace el viaje en 1 hora 40 minutos menos de tiempo que el otro muchacho, halle cuánto tiempo le toma a cada muchacho hacer la caminata.
71. Bárbara ha planeado hacer un huerto de legumbres rectangular con un perímetro de 76 m y un área de 360 m^2 . Encuentre las dimensiones del huerto.
72. Un campo de juego de béisbol es un cuadrado que tiene 90 pies por un lado. Encuentre la distancia desde la primera hasta la tercera base.
73. Si un campo de juego cuadrado tiene una longitud diagonal de 100 pies, encuentre el área del campo.
74. Un jardín de flores tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles con una hipotenusa de 50 pies. ¿Cuántos pies de madera se necesitan para bordear el jardín?
75. Suponga que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 10 cm más larga que uno de los lados y ese lado es 10 cm más largo que el otro. Encuentre la longitud de los 3 lados de este triángulo rectángulo.
76. Una escalera de 17 pies se coloca contra el costado de una casa de modo que su base está a 8 pies de la casa. Si se resbala hasta que su base está a 10 pies de la casa, ¿cuánto resbala hacia abajo la parte superior de la escalera?
77. Dos botes de motor abandonan un muelle al mismo tiempo. Uno viaja hacia el norte con una velocidad de 18 mph y el otro viaja hacia el occidente a 24 mph. Halle la distancia entre ellos después de 3 horas.
78. Un motociclista viaja a una velocidad constante durante 60 millas. Si hubiera ido 10 mph más rápido, habría acortado su tiempo de viaje una hora. Halle la velocidad del motociclista.
79. A James le tomó una hora más que a John hacer un viaje de 432 millas en auto a una velocidad promedio de 6 mph menos que John. ¿Qué tan rápido condujo cada uno?
80. Un grupo de mujeres planea distribuir por partes iguales los US\$14,000 que costó un bote. A última hora 3 de las mujeres se retiraron, lo cual le eleva la parte de cada una de las mujeres restantes en US\$1,500, ¿Cuántas mujeres había en el grupo original?
81. El señor Arthur compró algunas acciones por US\$720. Si las hubiera comprado el día anterior cuando cada una costaba US\$15 menos, habría podido comprar cuatro acciones más. ¿Cuántas acciones compró?
82. Un jardín rectangular está rodeado por un camino de grava que tiene 2 pies de ancho. El área cubierta por el jardín es de 80 pies² y el área cubierta por el camino es de 100 pies². Halle las dimensiones del jardín.

83. A un área rectangular cubierta de hierba de 50 m por 24 m la rodea una acera. Si el área cubierta por dicha acera es de 480 m^2 , ¿cuál es su ancho?
84. Se hace un recipiente con un pequeño pedazo de estaño cuadrado, cortando un cuadrado de 3 pulgadas de cada esquina, y doblando los lados (véase figura 10). Si el recipiente va a tener un volumen de 48 pulgadas^3 , encuentre la longitud de uno de los lados del pedazo de estaño original.

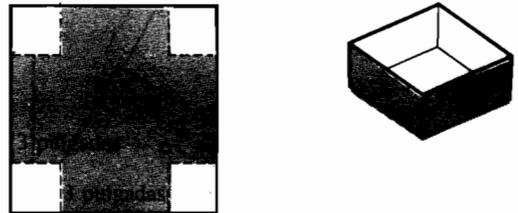


FIGURA 10

85. María tiene un pedazo de cartulina con el largo igual al doble de su ancho. Si recorta un cuadrado de 2 pulgadas de cada esquina y dobla los lados hacia arriba para formar una caja sin tapa, tendrá una caja con un volumen de 140 pulgadas^3 . Halle las dimensiones del pedazo de cartulina.
86. Se corta un alambre de 32 cm de longitud en dos partes y cada una de ellas se dobla para formar un cuadrado. El área total comprendida es de 34 cm^2 . Halle la longitud de cada pedazo de alambre.
87. Si se lanza un objeto hacia arriba desde el suelo con un ángulo de 45° con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo, entonces la altura en metros arriba del suelo a una distancia horizontal de x metros desde el punto de lanzamiento está dada por

$$y = x - \frac{9.8}{v_0^2} x^2$$

(véase figura 11). Si se lanza un proyectil con un ángulo de 45° y con una velocidad inicial de 12 m/s, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento aterrizará?

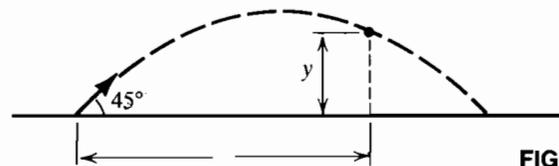


FIGURA 11

88. Si una fuente arroja agua con un ángulo de 45° y una velocidad de 7 m/s, ¿a qué distancia del chorro caerá el agua sobre la pileta? (véanse figura 12 y problema 87).

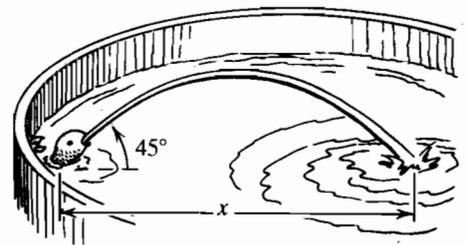


FIGURA 12

89. Una de las pruebas más concisas del teorema de Pitágoras la dio el erudito hindú Bhaskara (alrededor de 1150). Presentó el diagrama mostrado en la figura 13 sin indicaciones que le ayu-

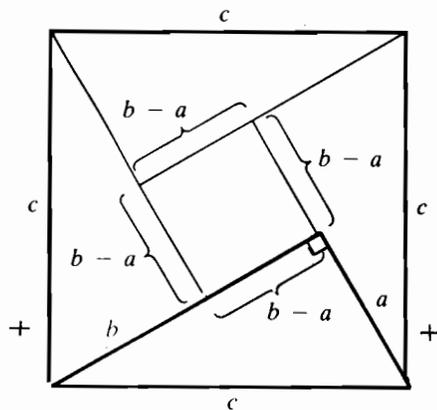


FIGURA 13

daran al lector. Su única "explicación" fue la palabra "¡Mirad!". Suponga que un cuadrado de lado c puede dividirse en cuatro triángulos rectángulos congruentes y en un cuadrado de longitud $b - a$ como se muestra. Pruebe que $a^2 + b^2 = c^2$.

90. Suponiendo que un cuadrado de lado $a + b$ puede dividirse de dos formas, como en la figura 14, pruebe el teorema de Pitágoras.

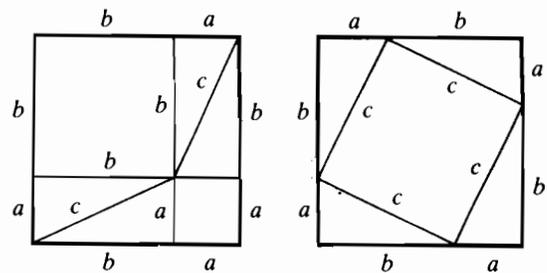


FIGURA 14

2.4 Números complejos

En la anterior sección vimos que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen solución real. Por ejemplo, $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales porque no hay número real x tal que $x^2 = -1$. En esta sección estudiaremos el conjunto de **números complejos**, que contiene soluciones a ecuaciones tales como $x^2 + 1 = 0$. El conjunto de números complejos C contiene el conjunto de números reales R así como los números cuyos cuadrados son negativos.

Para obtener los números complejos C , comenzamos por definir la **unidad imaginaria**, denotada con la letra i , como el número que satisfaga

$$i^2 = -1$$

Es común escribir

$$i = \sqrt{-1}$$

Con i podemos definir la raíz cuadrada principal de un número negativo, como sigue:



EJEMPLO 1

Halle la raíz cuadrada principal de (a) $\sqrt{-4}$ y (b) $\sqrt{-5}$.

Solución

(a) $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i(2) = 2i$

(b) $\sqrt{-5} = \sqrt{(-1)(5)} = \sqrt{-1}\sqrt{5} = i\sqrt{5} = \sqrt{5}i$

El sistema de números complejos contiene la unidad imaginaria i , todos los números reales, productos tales como bi , b real, y sumas tales como $a + bi$, donde a y b son números reales. En particular, un **número complejo** se define como cualquier expresión de la forma

$$z = a + bi \tag{12}$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. A los números a y b se los llama las **partes reales** e **imaginarias** de z , respectivamente. Se dice que un número complejo de la forma $0 + bi$ es un **número imaginario puro**. Note que escogiendo $b = 0$ en (12), obtenemos un número real. Así, el conjunto de números reales es un subconjunto del conjunto de números complejos.

EJEMPLO 2

- (a) El número complejo $z = 4 + (-5)i$ puede escribirse como $z = 4 - 5i$. Su parte real es 4 y su parte imaginaria es -5 .
 - (b) $z = 10i$ es un número imaginario puro.
 - (c) $z = 6 + 0i$ es un número real.
-

EJEMPLO 3

Expresé en la forma $a + bi$:

- (a) $-3 + \sqrt{-7}$
- (b) $2 - \sqrt{-25}$

Solución

- (a) $-3 + \sqrt{-7} = -3 + i\sqrt{7} = -3 + \sqrt{7}i$
 - (b) $2 - \sqrt{-25} = 2 - i\sqrt{25} = 2 - 5i$
-

Para resolver ciertas ecuaciones que incluyen números complejos, es necesario especificar cuándo son iguales dos números complejos.

DEFINICION 1

Dos números complejos son **iguales** si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. Esto es, si

$$z_1 = a_1 + b_1i \quad y \quad z_2 = a_2 + b_2i$$

entonces

$$z_1 = z_2 \quad y \quad \text{sólo si} \quad a_1 = a_2 \quad y \quad b_1 = b_2$$

EJEMPLO 4

Despeje x y y :

$$(2x + 1) + (-2y + 3)i = 2 - 4i$$

Solución. Según la definición 1 debemos tener

$$2x + 1 = 2 \quad y \quad -2y + 3 = -4$$

Estas ecuaciones dan como resultado $x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{7}{2}$.

La adición y la multiplicación por números complejos se definen como sigue.

DEFINICION 2

Si $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$, entonces:

(i) su **suma** está dada por $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

(ii) y su **producto** está dado por $z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$

PROPIEDADES DEL SISTEMA DE NUMEROS COMPLEJOS

En la sección 1.1 enunciamos las propiedades básicas del sistema de números reales. Utilizando la definición de adición y multiplicación de números complejos, puede demostrarse que estas propiedades básicas también se aplican al sistema de números complejos. En particular, las leyes asociativa, conmutativa y distributiva se aplican para los números complejos. (Véanse problemas 67 al 69). Observamos, además, que en la definición 2 (i) la suma de dos números complejos se obtiene sumando sus partes reales e imaginarias correspondientes.

Además, en vez de memorizar la definición del producto, podemos multiplicar dos números complejos utilizando las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva familiares, y el hecho de que $i^2 = -1$. Aplicando este método, encontramos que

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= (a + bi)c + (a + bi)di \\ &= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)i^2 \\ &= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)(-1) \\ &= ac + (bd)(-1) + (bc)i + (ad)i \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i \end{aligned}$$

Este es el mismo resultado del producto dado por la definición 2 (ii).

Estas técnicas se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5

Si $z_1 = 5 - 6i$ y $z_2 = 2 + 4i$, halle (a) $z_1 + z_2$ y (b) z_1z_2 .

Solución

(a) Combinando términos semejantes, tenemos

$$(5 - 6i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-6 + 4)i = 7 - 2i$$

(b) Utilizando la ley distributiva, podemos escribir el producto $(5 - 6i)(2 + 4i)$ como

$$\begin{aligned} (5 - 6i)(2 + 4i) &= (5 - 6i)2 + (5 - 6i)4i \\ &= 10 - 12i + 20i - 24i^2 \\ &= 10 - 24(-1) + (-12 + 20)i \\ &= 34 + 8i \end{aligned}$$

Nota de advertencia: no todas las propiedades del sistema de números reales se aplican a los números complejos. En particular, la propiedad de radicales $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ no es cierta cuando tanto a como b son negativos. Para ver esto, considere que

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\sqrt{-1} &= ii = i^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\sqrt{(-1)(-1)} &= \sqrt{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

Entonces $\sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)}$. Sin embargo, si sólo a o b es negativo, entonces sí tenemos que $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

En el conjunto de números complejos, la **identidad aditiva** es el número $0 = 0 + 0i$ y la **identidad multiplicativa** es el número $1 = 1 + 0i$.

El **inverso aditivo** de un número complejo $z = a + bi$ es $-z = -a - bi$.

El inverso aditivo se utiliza para definir la **sustracción** de números complejos:

$$\begin{aligned}(a + bi) - (c + di) &= (a + bi) + [-(c + di)] \\ &= (a + bi) + (-c - di) \\ &= (a - c) + (b - d)i\end{aligned}$$

Para obtener el **inverso multiplicativo** de $z = a + bi$, introducimos el concepto de **conjugado** de un número complejo. Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces a $\bar{z} = a - bi$ se llama su **conjugado**. Por ejemplo, el conjugado de $8 + 13i$ es $8 - 13i$, y el conjugado de $-5 - 2i$ es $-5 + 2i$.

Los siguientes cálculos muestran que tanto la suma como el producto de un número complejo z y su conjugado \bar{z} son números reales:

$$\begin{aligned}z + \bar{z} &= (a + bi) + (a - bi) = 2a, \\ z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

La última propiedad hace que los conjugados sean muy útiles para hallar el inverso multiplicativo $1/z$ o para dividir dos números complejos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6

Para $z_1 = 3 - 2i$ y $z_2 = 4 + 5i$, exprese cada una de las siguientes proposiciones de la forma $a + bi$.

- (a) $\frac{1}{z_1}$ (b) $\frac{z_1}{z_2}$

Solución. Multiplicamos tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador y simplificamos.

$$(a) \frac{1}{z_1} = \frac{1}{3 - 2i} = \frac{1}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{3 + 2i}{9 + 4} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

$$\begin{aligned}(b) \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 - 2i}{4 + 5i} = \frac{3 - 2i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} = \frac{12 - 8i - 15i + 10i^2}{16 + 25} \\ &= \frac{2 - 23i}{41} = \frac{2}{41} - \frac{23}{41}i\end{aligned}$$

Los números complejos hacen posible solucionar ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. Ahora vemos que las soluciones de la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

representan números complejos. Nótese que de hecho las soluciones son conjugados entre sí. Como lo muestra el ejemplo 7, estas soluciones pueden escribirse de la forma estándar (12).

EJEMPLO 7

Resuelva $x^2 - 8x + 25 = 0$.

Solución. De la fórmula cuadrática, obtenemos

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(25)}}{2}$$

esto es,

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} \\ &= \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i \end{aligned}$$

De ahí las soluciones $4 + 3i$ y $4 - 3i$.

EJEMPLO 8

Resuelva $x^2 + 16 = 8$.

Solución. Como en la sección 2.3, podemos utilizar el método de raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} x^2 + 16 &= 0 \\ x^2 &= -16 \\ x &= \pm\sqrt{-16} = \pm 4i \end{aligned}$$

Entonces, las soluciones son los complejos $4i$ y $-4i$.

Ahora podemos obtener soluciones para cualquier ecuación cuadrática. En particular, si el discriminante es negativo, hemos visto que las raíces son dos conjugados complejos.

EJERCICIO 2.4

En los problemas 1 al 45, realice la operación indicada. Escriba la respuesta de la forma $a + bi$.

- | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\sqrt{-100}$ | 2. $-\sqrt{-8}$ | 17. $(4 + 5i) - (2 - i)(1 + i)$ | 20. $i(\sqrt{2} - i)(1 - \sqrt{2}i)$ |
| 3. $-3 - \sqrt{-3}$ | 4. $\sqrt{-5} - \sqrt{-125} + 5$ | 18. $(-3 + 6i) + (2 + 4i)(-3 + 2i)$ | |
| 5. $(3 + i) - (4 - 3i)$ | 6. $(5 + 6i) + (-7 + 2i)$ | 19. $i(1 - 2i)(2 + 5i)$ | |
| 7. $2(4 - 5i) + 3(-2 - i)$ | 8. $-2(6 + 4i) + 5(4 - 8i)$ | 21. $(1 + i)(1 + 2i)(1 + 3i)$ | |
| 9. $i(-10 + 9i) - 5i$ | 10. $i(4 + 13i) - i(1 - 9i)$ | 22. $(2 + i)(2 - i)(4 - 2i)$ | |
| 11. $3i(1 + i) - 4(2 - i)$ | 12. $i + i(1 - 2i) + i(4 + 3i)$ | 23. $(1 - i)[2(2 - i) - 5(1 + 3i)]$ | |
| 13. $(3 - 2i)(1 - i)$ | 14. $(4 + 6i)(-3 + 4i)$ | 24. $(4 + i)[i(1 + 3i) - 2(-5 + 3i)]$ | |
| 15. $(7 + 14i)(2 + i)$ | 16. $(-5 - \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)$ | 25. i^8 | 26. i^{11} |
| | | 27. i^{-2} | 28. i^{-3} |
| | | 29. $\frac{1}{4 - 3i}$ | 30. $\frac{5}{3 + i}$ |

31. $\frac{4}{5 + 4i}$

32. $\frac{1}{-1 + 2i}$

33. $\frac{i}{1 + i}$

34. $\frac{i}{4 - i}$

35. $\frac{4 + 6i}{i}$

36. $\frac{3 - 5i}{i}$

37. $\frac{1 + i}{1 - i}$

38. $\frac{2 - 3i}{1 + 2i}$

39. $\frac{4 + 2i}{2 - 7i}$

40. $\frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i}{4 + 2i}$

41. $i\left(\frac{10 - i}{1 + i}\right)$

42. $i\left(\frac{1 - 2\sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}\right)$

43. $(1 + i)\frac{2i}{1 - 5i}$

44. $(5 - 3i)\frac{1 - i}{2 - i}$

45. $(4 - 9i) + \frac{25i}{2 + i}$

46. $i(-6 + \frac{11}{5}i) + \frac{2 + i}{2 - i}$

En los problemas 47 al 52, despeje x y y .

47. $2(x + yi) = i(3 - 4i)$

48. $(x + yi) + 4(1 - i) = 5 - 7i$

49. $i(x + yi) = (1 - 6i)(2 + 3i)$

50. $10 + 6yi = 5x + 24i$

51. $(1 + i)(x - yi) = i(14 + 7i) - (2 + 13i)$

52. $i^2(1 - i)(1 + i) = 3x + yi + i(y + xi)$

En los problemas 53 al 64, resuelva la ecuación dada

53. $x^2 + 9 = 0$

54. $x^2 + 8 = 0$

55. $2x^2 = -5$

56. $3x^2 = -1$

57. $2x^2 - x + 1 = 0$

58. $x^2 - 2x + 10 = 0$

59. $x^2 + 8x + 52 = 0$

60. $3x^2 + 2x + 5 = 0$

61. $4x^2 - x + 2 = 0$

62. $x^2 + x + 2 = 0$

63. $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

64. $2x^4 + 9x^2 + 4 = 0$

65. Halle un número complejo $z = x + yi$ tal que $z^2 = i$.

66. Halle un número complejo $z = x + yi$ tal que $z^2 = -3 + 4i$.

67. Demuestre que tanto la suma como la multiplicación de números complejos son conmutativas.

68. Demuestre que tanto la adición como la multiplicación de números complejos son asociativas.

69. Demuestre que la multiplicación de números complejos es distributiva frente a la adición.

70. Sea $z = a + bi$, donde a y b no son ambos cero. Demuestre que

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos cualesquiera. En los problemas 71 al 74, pruebe las propiedades dadas incluyendo los conjugados de z_1 y z_2 , $\bar{z}_1 = a - bi$ y $\bar{z}_2 = c - di$.

71. $\bar{z}_1 = z_1$ si y sólo si z_1 es un número real.

72. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

73. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

74. $\overline{z_1^2} = \bar{z}_1^2$

75. Verifique que $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ si sólo a o b es negativo.

76. Cuando la luz pasa de un medio a otro -por ejemplo, del aire al agua- se refracta (o desvía) y parte de ella se absorbe. Este fenómeno puede describirse por medio del índice de refracción n y un coeficiente de absorción k . Los ingenieros han encontrado útil combinarlos en un índice de refracción complejo.

$$m = n - ik$$

En tratados teóricos sobre la retrodispersión del radar por medio de gotitas de lluvia, la expresión

$$K = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2}$$

es importante. Halle K si el índice de refracción complejo m es $5 - 3i$.

2.5 Ecuaciones misceláneas

Muchas ecuaciones que no son ecuaciones polinómicas pueden convertirse a esa forma por medio de operaciones algebraicas apropiadas. Por ejemplo, para resolver

$$\frac{2x + 5}{x + 1} = \frac{1 - 2x}{x + 1} + x \tag{13}$$

podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por el denominador $x + 1$ y simplificar:

$$\begin{aligned} (x + 1)\left(\frac{2x + 5}{x + 1}\right) &= (x + 1)\left(\frac{1 - 2x}{x + 1}\right) + (x + 1)x \\ 2x + 5 &= 1 - 2x + x^2 + x \\ 0 &= x^2 - 3x - 4 \end{aligned} \tag{14}$$

Factorizando la expresión cuadrática en (14) da

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

Las soluciones de esta última ecuación son $x = 4$ y $x = -1$. Como lo vimos en la sección 2.1, cuando ambos lados de una ecuación se multiplican por una expresión algebraica que contenga la variable, se puede introducir una solución extraña. Así, en este caso, necesitamos verificar nuestras soluciones. Sustituyendo a 4 en la ecuación (13), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{2(4) + 5}{4 + 1} &= \frac{1 - 2(4)}{4 + 1} + 4 \\ \frac{13}{5} &= -\frac{7}{5} + 4 \\ \frac{13}{5} &= \frac{13}{5}\end{aligned}$$

Así, 4 es una solución de la ecuación (13). Por otro lado, la inspección de (13) demuestra que -1 no está en el dominio de la variable y, por tanto, es una solución extraña.

ECUACIONES CON RADICALES

Como lo ilustran los siguientes ejemplos, se pueden introducir soluciones extrañas elevando ambos lados de la ecuación a una potencia.

EJEMPLO 1 _____

Resuelva $x - 5 = \sqrt{x + 7}$. (15)

Solución. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación dada para eliminar el radical, tenemos

$$x^2 - 10x + 25 = x + 7$$

o
$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

Esta ecuación se factoriza como

$$(x - 9)(x - 2) = 0$$

y sus soluciones son $x = 9$ y $x = 2$. Si verificamos $x = 9$ en la ecuación original, encontramos

$$9 - 5 = 4 = \sqrt{9 + 7}$$

entonces, 9 es una solución de (15). Pero si sustituimos $x = 2$ en la ecuación (15), encontramos

$$2 - 5 = -3 \neq \sqrt{2 + 7} = 3$$

Por tanto, 2 es una solución externa, y la única solución de la ecuación original es $x = 9$.

EJEMPLO 2 _____

Resuelva $\sqrt[3]{4t^2 - 1} - 2 = 0$.

Solución. Comenzamos por aislar la raíz a un lado:

$$\sqrt[3]{4t^2 - 1} = 2$$

Luego elevando al cubo ambos lados se elimina el radical:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt[3]{4t^2 - 1})^3 &= (2)^3 \\
 4t^2 - 1 &= 8 \\
 4t^2 &= 9 \\
 t^2 &= \frac{9}{4} \\
 t &= \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Verificamos que cada una de éstas es una solución, sustituyendo en $\sqrt[3]{4t^2 - 1} = 2$.

Sustituyendo $t = \frac{3}{2}$, obtenemos

$$\sqrt[3]{4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = 2, \quad \text{o} \quad \sqrt[3]{4\left(\frac{9}{4}\right) - 1} = 2, \quad \text{o} \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

lo cual es verdadero. Entonces, $\frac{3}{2}$ es una solución. De igual manera, por sustitución vemos que $-\frac{3}{2}$ es también una solución.

Como lo muestra el ejemplo 3, algunas veces es necesario elevar ambos lados de la ecuación a potencias más de una vez para eliminar los radicales.

EJEMPLO 3

Resuelva $\sqrt{2w - 4} - \sqrt{w - 1} - 1 = 0$.

Solución. Para eliminar los radicales debemos elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación. Pero para evitar obtener el producto de 2 radicales, reescribimos la ecuación como

$$\sqrt{2w - 4} = \sqrt{w - 1} + 1$$

antes de elevar al cuadrado ambos lados. Elevando ahora al cuadrado da

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2w - 4})^2 &= (\sqrt{w - 1} + 1)^2 \\
 2w - 4 &= (w - 1) + 2\sqrt{w - 1} + 1
 \end{aligned}$$

o
$$w - 4 = 2\sqrt{w - 1}$$

Elevando de nuevo al cuadrado se produce

$$\begin{aligned}
 (w - 4)^2 &= 4(w - 1) \\
 w^2 - 8w + 16 &= 4w - 4 \\
 w^2 - 12w + 20 &= 0 \\
 (w - 10)(w - 2) &= 0
 \end{aligned}$$

Las soluciones de esta última ecuación son $w = 10$ y $w = 2$. Verificando estos valores en la ecuación original, encontramos

$$\sqrt{2(10) - 4} - \sqrt{10 - 1} - 1 = \sqrt{16} - \sqrt{9} - 1 = 0$$

y
$$\sqrt{2(2) - 4} - \sqrt{2 - 1} - 1 = \sqrt{0} - \sqrt{1} - 1 = -2$$

Así, la única solución de la ecuación original es $w = 10$.

La siguiente lista sintetiza el procedimiento general para resolver ecuaciones con radicales.



ECUACIONES DE TIPO CUADRATICO

Ciertas clases de ecuaciones pueden transformarse en ecuaciones cuadráticas por medio de una apropiada sustitución. Los siguientes ejemplos ilustran esta técnica.

EJEMPLO 4

Resuelva $x^{2/3} + 4x^{1/3} - 5 = 0$.

Solución. Esta ecuación puede reescribirse como

$$(x^{1/3})^2 + 4(x^{1/3})^1 - 5 = 0$$

por tanto, puede considerarse una ecuación cuadrática en la variable $v = x^{1/3}$. La expresión cuadrática del lado izquierdo de

$$v^2 + 4v - 5 = 0$$

se factoriza, y tenemos entonces

$$(v + 5)(v - 1) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $v = -5$ y $v = 1$. Ya que $v = x^{1/3}$, tenemos

$$x^{1/3} = -5 \quad \text{y} \quad x^{1/3} = 1$$

Elevando al cubo ambos lados de cada una de estas ecuaciones, obtenemos

$$x = -125 \quad \text{y} \quad x = 1$$

Luego, por sustitución, podemos verificar que ambas respuestas satisfagan la ecuación original. Por tanto, las soluciones son -125 y 1 .

EJEMPLO 5

Resuelva $r^{1/2} + 30r^{-1/2} - 11 = 0$.

Solución. Comenzamos por eliminar los exponentes negativos:

$$r^{1/2} + 30r^{-1/2} - 11 = 0$$

$$r^{1/2} + \frac{30}{r^{1/2}} - 11 = 0$$

Para eliminar los fraccionarios de la ecuación, multiplicamos ambos lados por $r^{1/2}$:

$$r + 30 - 11r^{1/2} = 0$$

$$r - 11r^{1/2} + 30 = 0$$

o

$$(r^{1/2})^2 - 11r^{1/2} + 30 = 0$$

Si dejamos ahora a $v = r^{1/2}$, obtenemos una ecuación cuadrática,

$$v^2 - 11v + 30 = 0$$

que se factoriza como: $(v - 6)(v - 5) = 0$

da como resultado que

$$v = 6 \quad \text{y} \quad v = 5$$

$$\text{y así} \quad r^{1/2} = 6 \quad \text{y} \quad r^{1/2} = 5$$

Elevando al cuadrado cada una de éstas nos dan las respuestas $r = 36$ y $r = 25$. Debe verificar que los dos números satisfagan la ecuación original.

ECUACIONES CON VALORES ABSOLUTOS

De la definición de valor absoluto de un número (véase sección 1.2) se deduce que para cualquier número real *positivo* a ,

$$|x| = a \quad \text{si y sólo si} \quad x = a \quad \text{o} \quad x = -a$$

EJEMPLO 6

Resuelva $|5x - 3| = 8$.

Solución. La ecuación dada equivale a dos ecuaciones:

$$5x - 3 = 8 \quad \text{or} \quad 5x - 3 = -8$$

Resolvemos cada una de éstas. De $5x - 3 = 8$, obtenemos

$$5x = 11, \quad \text{lo cual implica que} \quad x = \frac{11}{5}.$$

De $5x - 3 = -8$, tenemos

$$5x = -5 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Entonces, las respuestas son -1 y $\frac{11}{5}$. Por sustitución se puede verificar que ambas satisfacen la ecuación dada.

EJEMPLO 7

Puesto que el valor absoluto de un número real es siempre positivo, no hay solución para la ecuación

$$|x - 4| = -3$$

En el ejemplo 8, resolvemos una fórmula utilizando algunas de las técnicas tratadas en esta sección.

EJEMPLO 8

El periodo de oscilación T , o tiempo de una oscilación completa de un péndulo, está dado por la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y l es la longitud del péndulo (véase figura 15). Despeje l .

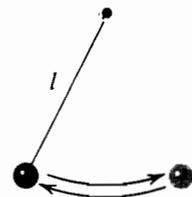


FIGURA 15

Solución. Primero dividimos ambos lados por 2π para aislar el radical:

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi}$$

$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Elevando ambos lados al cuadrado para eliminar el radical, obtenemos

$$\frac{l}{g} = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

Multiplicando ambos lados por g , encontramos

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Prueba: sustituimos $l = (gT^2)/(4\pi^2)$ en $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ y simplificamos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(gT^2)/(4\pi^2)}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{T^2}{4\pi^2}}$$

Puesto que $T \geq 0$, $\sqrt{T^2} = T$, y completamos la comprobación como sigue:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{T^2}{4\pi^2}} = \frac{2\pi T}{2\pi} = T$$

EJERCICIO 2.5

En los problemas 1 al 40, resuelva la ecuación dada.

1. $\frac{1}{x-2} = \frac{2x+1}{x^2-4}$

2. $\frac{1-x}{x^2} = \frac{3}{x-1}$

3. $\frac{s^2+s}{2s+1} = s-3$

4. $\frac{5t+3}{2t-1} = \frac{2t-9}{t-5}$

5. $\frac{1}{(y+2)^2} + \frac{1}{y+2} - 6 = 0$

6. $\frac{6}{y^4} - \frac{1}{y^2} - 1 = 0$

7. $3 - \frac{2z}{z+1} - \frac{z^2}{(z+1)^2} = 0$

8. $1 - \frac{8}{x^2+1} + \frac{16}{(x^2+1)^2} = 0$

9. $x^{2/5} - 7x^{1/5} - 8 = 0$

10. $6w^{1/3} - 7w^{1/6} - 3 = 0$

11. $p^{1/4} - 12p^{-1/4} - 1 = 0$

12. $(v-1)^{1/2} - (v-1)^{1/4} - 20 = 0$

13. $12(x+3)^{2/3} + (x+3)^{1/3} - 1 = 0$

14. $x^{4/3} - 13x^{2/3} + 36 = 0$

15. $\sqrt{4r^2-2} + 5 = 0$

16. $\sqrt{6r^2+3} = 7$

17. $\sqrt[3]{2x-1} = 5$

18. $\sqrt[3]{3-5x} = 0$

19. $\sqrt[5]{2-5y} = -1$

20. $\sqrt[4]{q^2-4} = 2$

21. $\sqrt{x+1} + x - 1 = 0$

22. $3x + \sqrt{3x-1} = 1$

23. $\sqrt{2s-5} - \sqrt{s-3} = 1$

24. $\sqrt{7-t} = 3t$

25. $\sqrt{2u} - \sqrt{u+1} + 1 = 0$

26. $\sqrt{2x-7} = 1 + \sqrt{x-4}$

27. $\sqrt{4x-3} - \sqrt{2-2x} - 1 = 0$

28. $w + \sqrt{3w+1} = 3$

29. $\sqrt{2v-3} + \sqrt{v+2} = \sqrt{3v+3}$

30. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{4x+3}$

31. $(\sqrt{x}-1)^2 - 7(\sqrt{x}-1) + 10 = 0$

32. $r + \sqrt{r} - 20 = 0$

33. $|4x-1| = 2$

34. $|4x-3| = 8$

35. $|\frac{1}{4} - \frac{3}{2}u| = 1$

36. $|5v-4| = 7$

37. $|15-4y| = 0$

38. $|x-7| = 0$

39. $|2-3w| = -10$

40. $|16t-2| = -3$

En los problemas 41 y 42, encuentre las soluciones reales de la ecuación dada.

41. $|1-x^2| = 5$

42. $|2x^2+1| = 3$

Las fórmulas dadas en los problemas del 43 al 48 ocurren en las aplicaciones. Despeje la variable indicada en términos de las demás variables. (Suponga que todas las variables son números reales positivos).

43. Teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ para } a$$

44. Perímetro aproximado de una elipse

$$C = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \text{ para } b$$

45. Curvatura de una gráfica

$$\kappa = \frac{f''}{[1 + (f')^2]^{3/2}} \text{ para } f'$$

46. Movimiento elíptico: velocidad

$$v = R \sqrt{\frac{gR}{r}}, \text{ para } r$$

47. Movimiento elíptico: periodo

$$T = \frac{2\pi}{R\sqrt{gR}} r^{3/2}, \text{ para } r$$

48. Área de la superficie lateral de un cono

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}, \text{ para } r$$

En los problemas 49 al 52, use una calculadora para aproximar las soluciones de la ecuación dada.

49. $3x^{-2} - 2x^{-1} - 4 = 0$

50. $1.8y + 8\sqrt{y} - 5.6 = 0$

51. $2z^{2/3} - 7z^{1/3} = 0.5$

52. $\sqrt{0.2x^2 - 1} - 3 = 0$

53. La raíz cuadrada de 3 veces un número disminuido en 1 es 5. Halle el número.

54. La raíz cúbica de cinco veces un número aumentado en 3 es 2. Halle el número.

55. Un rombo es un cuadrilátero con 4 lados iguales s y lados opuestos paralelos. Las diagonales D y d son perpendiculares y se bisecan entre sí. (Véase figura 16). Utilice el teorema de Pitágoras para verificar que

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + d^2}$$

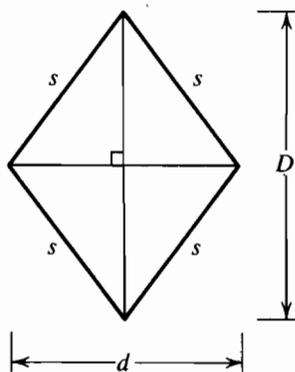


FIGURA 16

56. Randy está haciendo una cometa en el contorno de un rombo. Cada lado de la cometa debe tener 4 pies de largo y su palo para

la franja horizontal mide 3 pies. Utilice los resultados del problema 55 para determinar de qué longitud debe ser el palo vertical.

57. La longitud de la diagonal d de una caja rectangular de ancho a , altura h , y longitud l , está dada por

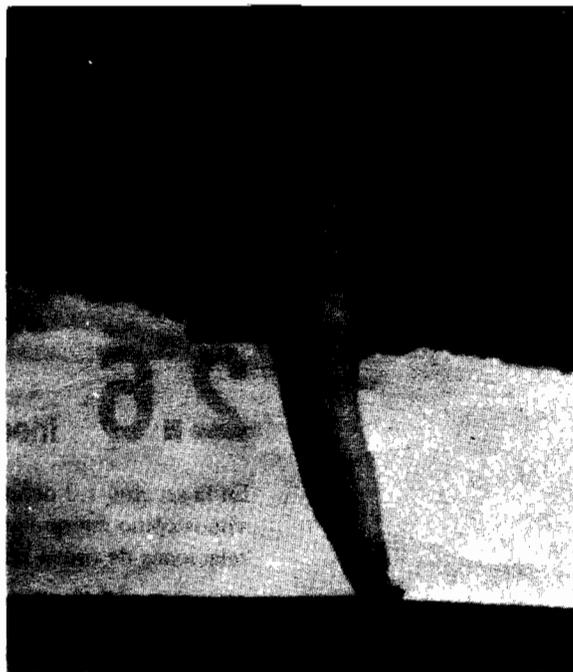
$$d = \sqrt{a^2 + h^2 + l^2}$$

Si la diagonal de una caja rectangular es de 200 cm, la altura es la mitad del ancho, y el largo es dos veces el ancho, encuentre las dimensiones de la caja.

58. Los meteorólogos utilizan la ecuación $D^3 = 216T^2$ como modelo para describir la dimensión e intensidad de cuatro clases de tormentas violentas -tornados, tronadas, huracanes y ciclones-, donde D es el diámetro de la tormenta en millas y T es el número de horas durante las cuales viaja la tormenta antes de disiparse. Despeje T . (Fuente: *Notas de Matemáticas de un Estudiante, NCTM*. Enero de 1987).

59. El peor monzón registrado en el mundo tuvo lugar entre el 13 y el 14 de noviembre de 1970 en el delta de las islas de Ganges en Bangladesh. Más de un millón de personas murieron. Dado que esta tormenta duró 24 horas, utilice la fórmula del problema 58 para determinar su diámetro.

60. En los Estados Unidos ocurren cerca de 150 tornados cada año. Si el diámetro de un tornado es de 2 millas, utilice la fórmula dada en el problema 58 para determinar cuánto tiempo se espera que dure.



61. Al gasear una gran cantidad de agua, por ejemplo un lago artificial, es útil saber cuánto tiempo le toma a una burbuja llegar a la superficie. Las burbujas gaseosas con un radio mayor de 0.5 cm suben en el agua con una velocidad v en metros por segundo dada por la fórmula

$$v = 1.02 \sqrt{gr}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (9.8m/s^2) y r es el radio de una burbuja esférica medida en metros. Suponga que un aeróforo localizado a una profundidad de 20 m produce burbujas de 2 cm de radio. ¿En cuánto tiempo tal burbuja llega a la superficie? (Nota: esta fórmula pronostica que las burbujas grandes ascienden más rápido que las pequeñas. Esto es cierto también para las burbujas de todos los tamaños, como usted lo puede verificar vertiendo un vaso de cualquier bebida carbonada).

62. Los estudios geológicos sobre la corteza terrestre indican que la litosfera fresca (roca fundida) que se apiña sobre los rebordes de los océanos se hunde a medida que éstos se enfrían y se alejan de la orilla. En planchas de estructura terrestre, la velocidad a la cual se hunde la litosfera se predice por la ecuación

$$Z = C\sqrt{T}, \quad 0 \leq T \leq 100$$

donde Z es la profundidad en metros con la cual se ha hundido la litosfera, T es la edad de la litosfera en millones de años y C es una constante. (El valor $C = 300$ se ajusta a los datos relativamente bien). Véase figura 17.

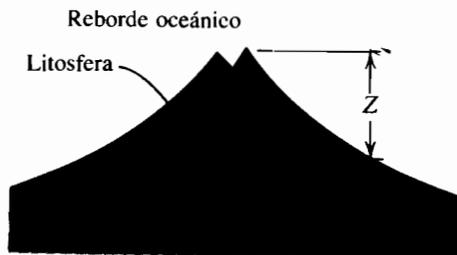


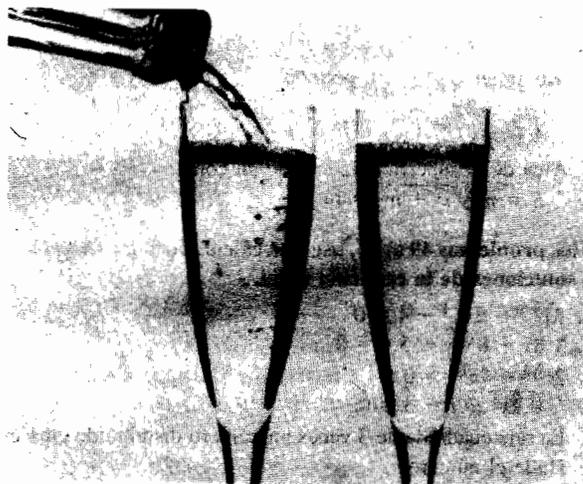
FIGURA 17

- (a) ¿Hasta dónde se ha hundido la litosfera después de 100 millones de años?
 (b) Resuelva la ecuación dada para T . ¿Qué edad tiene la litosfera que se ha hundido 500 m?

63. En 1948 Court afirmó que

$$K = (10.9\sqrt{v} + 9.0 - v)(33 - T)$$

era un mejor ajuste empírico a los datos recogidos por Siple y Passel para la razón de refrigeración del viento, que la fórmula que ellos mismos habían dado (véase problema 64 en la sección 2.2). Halle la velocidad del viento v , a la cual las dos fórmulas concuerden sobre la razón de refrigeración.



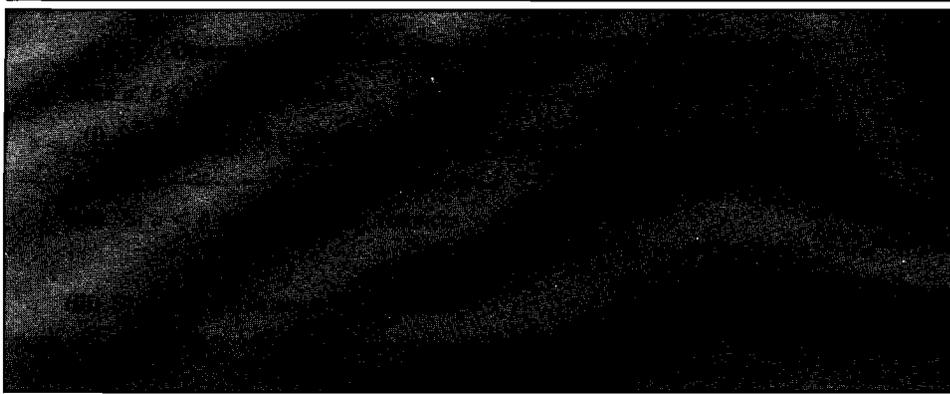
2.6 Inecuaciones lineales

En la sección 1.2 definimos las relaciones de orden como “mayor que” y “menor que” y vimos cómo interpretarlas en la recta de los números reales. Los enunciados que incluyen relaciones de orden tales como

$$3x - 7 > 5 \quad (16)$$

se llaman **inecuaciones**. Una **solución** de una inecuación es cualquier número que, cuando se lo sustituye por la variable, hace que el enunciado sea verdadero. Por ejemplo, si sustituimos $x = 5$ en (16), tenemos el enunciado verdadero $3(5) - 7 > 5$. Resolver una inecuación significa encontrar el conjunto de todos los números reales para los cuales el enunciado es verdadero. Se dice que dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

Como cuando se resuelven ecuaciones, resolvemos una inecuación encontrando una inecuación equivalente con solución obvia. Las siguientes operaciones dan como resultado inecuaciones equivalentes.



Las operaciones de (i) a (iii) también son aplicables con $>$ en lugar de $<$ y $<$ en lugar de $>$. Además, (i)-(iii) pueden formularse para las relaciones de orden \leq y \geq (véanse problemas 49 y 50). Para verificar (i), asuma que $a < b$; luego, de la discusión en la sección 1.2 se deduce que $b - a$ es positivo. Si le añadimos $c - c = 0$ a un número positivo, la suma es positiva. Por tanto,

$$\begin{aligned} b - a + (c - c) &= b + c - a - c \\ &= (b + c) - (a + c) \end{aligned}$$

es un número positivo. Entonces, tenemos $a + c < b + c$. Dejamos la comprobación de (ii) y (iii) como ejercicios (véanse problemas 51 y 52).

Nota de advertencia: cuando ambos lados de una inecuación se multiplican por un número negativo, entonces aplicando (iii) la dirección de la desigualdad se invierte. Olvidar invertir la dirección de una desigualdad es uno de los errores más comunes que se cometen cuando se resuelven inecuaciones.

INECUACIONES LINEALES

Cualquier inecuación que pueda escribirse de la forma

$$ax + b < 0, \quad a \neq 0 \tag{17}$$

donde a y b son números reales, se llama **inecuación lineal** en x . Si el símbolo $<$ en la ecuación (17) se reemplaza por \leq , $>$ o \geq , la inecuación resultante también se llama inecuación lineal. Utilizamos las operaciones (i)-(iii) para encontrar la solución de una inecuación lineal.

EJEMPLO 1 _____

Resuelva $8x + 4 < 16 + 5x$.

Solución. Obtenemos inecuaciones equivalentes, como sigue:

$$\begin{aligned} 8x + 4 &< 16 + 5x \\ 8x + 4 - 4 &< 16 + 5x - 4 && \leftarrow \text{Por (i)} \\ 8x - 5x &< 12 + 5x - 5x && \leftarrow \text{Por (i)} \end{aligned}$$

$$3x < 12$$

$$\frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(12)$$

$$x < 4.$$

← Por (ii)

Por tanto, las respuestas de $8x + 4 < 16 + 5x$ son todos los números reales menores que 4.

EJEMPLO 2

Resuelva $\frac{1}{2} - 3x \leq \frac{5}{2}$.

Solución. Las siguientes inecuaciones son equivalentes. (Usted debe ser capaz de explicar cada paso).

$$\frac{1}{2} - 3x \leq \frac{5}{2}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3x \leq -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$$

$$-3x \leq \frac{4}{2}$$

$$-3x \leq 2$$

$$-\frac{1}{3}(-3x) \geq -\frac{1}{3}(2)$$

$$x \geq -\frac{2}{3}$$

Se deduce que las soluciones de la inecuación dada son todos los números reales mayores o iguales que $-\frac{2}{3}$.

INECUACIONES SIMULTANEAS

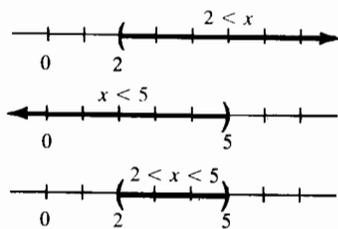
La **inecuación simultánea**

$$a < x < b$$

significa que tanto $a < x$ como $x < b$. Por ejemplo, el conjunto de números reales que satisfacen

$$2 < x < 5$$

es la intersección de los conjuntos $\{x | 2 < x\}$ y $\{x | x < 5\}$. Estos conjuntos se grafican en la figura 18. Para **graficar** un conjunto de números reales, oscurecemos los puntos en la línea de números reales que correspondan al conjunto dado.

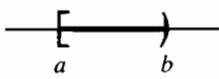


Utilizando inecuaciones básicas e inecuaciones simultáneas, podemos describir ciertos conjuntos de números reales llamados **intervalos**. A estos intervalos corresponden una notación y terminología de intervalo especiales que se muestran en el siguiente cuadro. Como lo veremos en los ejemplos siguientes, la notación de intervalo nos proporciona una manera eficaz de escribir las soluciones de muchas inecuaciones.

FIGURA 18

INTERVALO	NOTACION DE INTERVALO	NOMBRE	GRAFICA
$\{x a < x < b\}$	(a, b)	Intervalo abierto	
$\{x a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Intervalo cerrado	
$\{x a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Intervalo semiabierto	

(continúa)

INTERVALO	NOTACION DE INTERVALO	NOMBRE	GRAFICA
$\{x a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Intervalo semiabierto	
$\{x a < x\}$	(a, ∞)	Intervalo infinito	
$\{x x < b\}$	$(-\infty, b)$	Intervalo infinito	
$\{x x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	Intervalo infinito	
$\{x a \leq x\}$	$[a, \infty)$	Intervalo infinito	

En la tabla utilizamos los símbolos ∞ , leído "infinito", y $-\infty$, leído "menos infinito", para representar ciertos tipos de intervalos llamados **intervalos infinitos**. Estos símbolos no representan números reales. Por ejemplo, $(7, \infty)$ significa simplemente todos los números reales mayores que 7. Nótese también que un corchete cuadrado indica que el punto final respectivo se incluye en el intervalo, mientras que un paréntesis redondo indica que el punto final respectivo no se incluye en el intervalo.

EJEMPLO 3

Utilizando la notación de intervalo, podemos expresar las soluciones de los ejemplos 1 y 2 de la forma $(-\infty, 4)$ y $[-\frac{2}{3}, \infty)$, respectivamente. Las gráficas se muestran en la figura 19.

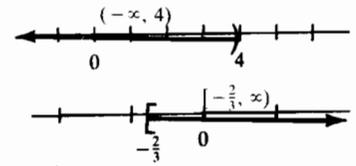


FIGURA 19

SOLUCION DE INECUACIONES SIMULTANEAS

Como lo muestran los siguientes ejemplos, usualmente podemos resolver inecuaciones simultáneas aislando la variable en la mitad. Las operaciones (i)-(iii) se aplican en ambas partes de la inecuación al mismo tiempo.

EJEMPLO 4

Resuelva $-7 \leq 2x + 1 < 19$. Dé las soluciones en notación de intervalo y trace la gráfica.

Solución. Obtenemos inecuaciones equivalentes como sigue:

$$\begin{aligned}
 & -7 \leq 2x + 1 < 19 \\
 & -7 - 1 \leq 2x + 1 - 1 < 19 - 1 \quad \leftarrow \text{Por (i)} \\
 & -8 \leq 2x < 18 \\
 & \frac{1}{2}(-8) \leq \frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(18) \quad \leftarrow \text{Por (ii)} \\
 & -4 \leq x < 9
 \end{aligned}$$

Así, las soluciones de la inecuación dada son todos los números del intervalo $[-4, 9)$. La gráfica se muestra en la figura 20.

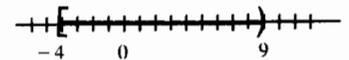


FIGURA 20

Nota de advertencia: se usa escribir inecuaciones simultáneas con el número menor a la izquierda. Por ejemplo, a pesar de que $5 > x > 2$ está técnicamente correcto, debe reescribirse como $2 < x < 5$ para mostrar el orden en la recta numérica. El siguiente ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 5

Resuelva $-1 < 1 - 2x < 3$. Dé las soluciones en notación de intervalo y trace la gráfica.

Solución. Debe explicar por qué las siguientes son inecuaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} -1 < 1 - 2x < 3 \\ -1 - 1 < -1 + 1 - 2x < -1 + 3 \\ -2 < -2x < 2 \end{aligned}$$

Aislamos la variable x de la mitad de la inecuación simultánea, multiplicando por $-\frac{1}{2}$, ya que la multiplicación por un número negativo invierte la dirección de las desigualdades:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(-2) > -\frac{1}{2}(-2x) > -\frac{1}{2}(2) \\ 1 > x > -1 \end{aligned}$$

Para expresar esta solución en notación de intervalo, primero la reescribimos poniendo el número menor a la izquierda:

$$-1 < x < 1$$

Por lo tanto, las soluciones pueden expresarse como el intervalo $(-1, 1)$, el cual se dibuja en la figura 21.

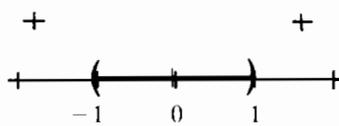


FIGURA 21

El ejemplo 6 ilustra una aplicación que incluye inecuaciones

EJEMPLO 6

A la señora Johnston se le pagan US\$15,000 al año más una comisión de 8% sobre sus ventas. ¿Qué ventas anuales corresponderían a un ingreso anual entre los US\$23,000 y los US\$27,000?

Solución. Si asignamos a x la cantidad en dólares de las ventas anuales de la señora Johnston, entonces $15,000 + 0.08x$ es igual a su ingreso anual en dólares. Entonces, queremos hallar x tal que

$$23,000 \leq 15,000 + 0.08x \leq 27,000$$

Resolvemos esta inecuación como sigue

$$\begin{aligned} 8000 &\leq 0.08x \leq 12,000 \\ 100,000 &\leq x \leq 150,000 \end{aligned}$$

Entonces, las ventas anuales de la señora Johnston deben estar entre US\$100,000 y US\$150,000 para que su ingreso anual oscile entre US\$23,000 y US\$27,000.

EJERCICIO 2.6

En los problemas 1 al 8, escriba la inecuación utilizando notación de intervalo y luego haga la gráfica del intervalo.

1. $x < 0$
2. $0 < x < 5$
3. $x \geq 5$
4. $-1 \leq x$
5. $8 < x \leq 10$
6. $-5 < x \leq -3$

7. $-2 \leq x < 1$

8. $x > -4$

En los problemas 9 al 14, diga si es falso o verdadero.

9. Si $a < b$, entonces $a - 16 < b - 16$. _____
10. Si $a < b$, entonces $-a < -b$. _____
11. Si $0 < a$, entonces $a < a + a$. _____

12. Si $a < 0$, entonces $a + a < a$. _____
 13. Si $1 < a$, entonces $\frac{1}{a} < 1$. _____
 14. Si $a < 0$, entonces $\frac{a}{-a} < 0$. _____

En los problemas 15 al 26, resuelva la inecuación e indique dónde se utilizan las operaciones (i)-(iii).

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 15. $x + 3 > -2$ | 16. $3x - 9 < 6$ |
| 17. $\frac{3}{2}x + 4 \leq 10$ | 18. $5 - \frac{5}{2}x \geq -4$ |
| 19. $\frac{1}{2} - 3x \leq 6x$ | 20. $-(1 - x) > 2x - 1$ |
| 21. $-7 < x - 2 < 1$ | 22. $3 \leq x + 4 \leq 10$ |
| 23. $7 < 3 - \frac{1}{2}x \leq 8$ | 24. $-3 < 4x < 0$ |
| 25. $0 < 2(4 - x) < 6$ | |
| 26. $-3 \leq \frac{4 - x}{4} < 7$ | |

En los problemas 27 a 42, resuelva la inecuación, exprese las soluciones en notación de intervalo y trace la gráfica.

- | | |
|--|---|
| 27. $2 + 3x < 0$ | 28. $\frac{1}{2} + 5x > 2x - \frac{3}{2}$ |
| 29. $2 + x \geq 5(x + 1)$ | 30. $-7x + 3 \leq 4 - x$ |
| 31. $\pi + 6 > 3x - 2$ | 32. $\sqrt{2} - 4 < \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ |
| 33. $5x - 8 < 2x - 1$ | |
| 34. $-10 < \frac{3}{2}x < 4$ | |
| 35. $-3 \leq -x < 2$ | 36. $0 < 3x - 7 < 1$ |
| 37. $-\frac{1}{2} < 2 - 4x < 0$ | 38. $2 \leq \frac{1}{2}x - 6 < 8$ |
| 39. $\sqrt{2} + 1 < 5x + 1 < 8$ | |
| 40. $100 + x < 41 - 6x < 121 + x$ | |
| 41. $x^2 \leq (x - 1)^2 + 5$ | |
| 42. $(x - 1)(x + 2) \leq (x + 1)(x - 2)$ | |

43. Si 7 veces un número se disminuye en 5, el resultado es menor que 47. ¿Qué puede concluirse sobre el número?
 44. James tiene dos puntajes de 71 y 82 sobre 100. ¿Cuánto debe sacar en el tercer examen para tener un promedio de 80 o más?
 45. A un tarro de 4 onzas de café instantáneo se le descuentan 50 centavos, y el tarro de 2.5 onzas se vende a US\$3. ¿A qué precio sería más económico el tarro más grande?
 46. Generalmente, se considera que una persona tiene fiebre si tiene una temperatura oral mayor de 98.6°F. ¿Qué temperaturas en la escala de Celsius indican fiebre? (Sugerencia: recuerde el ejercicio 2.1. que $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$ donde T_C es el grado Celsius y T_F es el grado Fahrenheit).
 47. Un taxi cobra 90 centavos por el primer cuarto de milla y 30 centavos por cada cuarto de milla adicional. ¿Qué distancia en cuartos de milla puede recorrer una persona que tiene entre US\$3 y US\$6?
 48. Un vendedor exitoso normalmente emplea entre 5 y 15 horas de las 40 horas semanales de trabajo en la oficina. ¿Cuánto tiempo ha contactado clientes fuera de la oficina?
 49. Escriba de nuevo la operación (i) para la relación de orden mayor o igual que (\geq)
 50. Escriba de nuevo la operación (iii) para la relación de orden mayor que ($>$)
 51. Pruebe la operación (ii) utilizando el hecho de que el producto de dos números positivos es positivo.
 52. Pruebe la operación (iii) utilizando el hecho de que el producto de un número positivo y uno negativo es negativo.
 53. Si $0 < a < b$, demuestre que $1/b < 1/a$. ¿Es necesaria la restricción de que a sea positivo? Explique.
 54. Si $0 < a < b$, demuestre que $a^2 < b^2$. ¿Cuál es la relación entre a^2 y b^2 si $a < b < 0$? si $ib < a < 0$?

2.7 inecuaciones con valor absoluto

Muchas aplicaciones importantes de inecuaciones incluyen también valores absolutos. Recuerde que en la sección 1.2 $|x|$ representa la distancia a lo largo de la recta numérica desde x hasta el origen. Así $|x| < b$ ($b > 0$) significa que la distancia desde x hasta el origen es menor que b . Podemos ver en la figura 22 que éste es el conjunto de números reales x tales que $-b < x < b$. Por otra parte, $|x| > b$ significa que la distancia desde x hasta el origen es mayor que b . Por tanto, como lo muestra la figura 23, $x > b$ o $x < -b$. Estas observaciones geométricas indican las siguientes propiedades del valor absoluto.

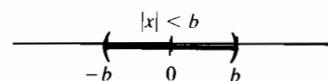


FIGURA 22

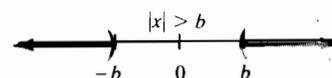
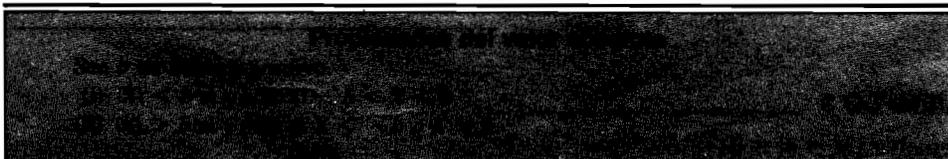


FIGURA 23



Las propiedades (i) y (ii) también se aplican con \leq en lugar de $<$ y \geq en lugar de $>$

EJEMPLO 1 _____

Resuelva $|3x - 7| < 1$ y grafique las soluciones.

Solución. Utilizando la propiedad (i), hacemos la identificación de que $X = 3x - 7$ y reemplazamos $|3x - 7| < 1$ por la inecuación simultánea equivalente. Luego, resolvemos:

$$\begin{aligned} -1 &< 3x - 7 < 1 \\ -1 + 7 &< 3x - 7 + 7 < 1 + 7 \\ 6 &< 3x < 8 \\ \frac{1}{3}(6) &< \frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(8) \\ 2 &< x < \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Las soluciones son todos los números del intervalo abierto $(2, \frac{8}{3})$. La gráfica se muestra en la figura 24.

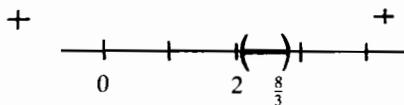


FIGURA 24

EJEMPLO 2 _____

Resuelva $|4 - \frac{1}{2}x| \geq 7$ y grafique las soluciones.

Solución. De la propiedad (ii), para \geq , hacemos la identificación de que $X = 4 - \frac{1}{2}x$. Concluimos que

$$|4 - \frac{1}{2}x| \geq 7$$

equivale a

$$4 - \frac{1}{2}x \leq -7 \quad \text{o} \quad 4 - \frac{1}{2}x \geq 7$$

resolvemos cada una de estas inecuaciones por separado. Tenemos primero

$$\begin{aligned} 4 - \frac{1}{2}x &\leq -7 \\ -\frac{1}{2}x &\leq -11 \\ x &\geq 22 \end{aligned}$$

En notación de intervalo esto es $[22, \infty)$. Luego, resolvemos

$$\begin{aligned} 4 - \frac{1}{2}x &\geq 7 \\ -\frac{1}{2}x &\geq 3 \\ x &\leq -6 \end{aligned}$$

En notación de intervalo esto se escribe $(-\infty, -6]$.

Puesto que cualquier número real que satisfaga bien sea a

$$4 - \frac{1}{2}x \leq -7 \quad \text{o} \quad 4 - \frac{1}{2}x \geq 7$$

también satisface $|4 - \frac{1}{2}x| \geq 7$, las soluciones son los números que están en la unión de los dos intervalos sin elementos comunes

$$(-\infty, -6] \cup [22, \infty)$$

La gráfica de estas soluciones se muestra en la figura 25.

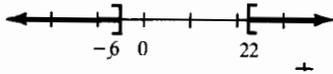


FIGURA 25

EJEMPLO 3 _____

Resuelva $|3x - 4| \leq 0$.

Solución. Puesto que el valor absoluto de una expresión nunca es negativo, los únicos valores que satisfacen la inecuación dada son aquellos para los cuales

$$|3x - 4| = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 4 = 0.$$

Entonces, la respuesta es $\frac{4}{3}$.

Recuerde de la sección 1.2 que $|x - a|$ representa la distancia a lo largo de la recta numérica desde x hasta a . Así, la inecuación

$$|x - a| < b$$

la cumplirán todos los números reales x cuya distancia de a sea menor que b . Esto es, las soluciones son todos los números del intervalo abierto de longitud $2b$ centrado en a . Este intervalo se muestra en la figura 26.

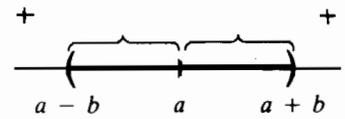


FIGURA 26

EJEMPLO 4

Utilice una inecuación para describir el conjunto de números reales que se encuentren a menos de 7 unidades de 2. Exprese las respuestas de esta inecuación en forma de intervalo y trace la gráfica.

Solución. Del análisis previo con $a = 2$ y $b = 7$ vemos que la inecuación es

$$|x - 2| < 7$$

Podríamos resolver esta inecuación utilizando la propiedad (i) o simplemente anotar que el intervalo descrito tiene punto medio 2 y longitud $2(7) = 14$. Como lo muestra la figura 27, esto se puede escribir como $(2 - 7, 2 + 7)$ ó $(-5, 9)$.

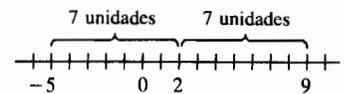


FIGURA 27

Recuerde de la sección 1.2 que el valor absoluto satisface

$$|ab| = |a||b|$$

para cualquier número real a y b . Esta propiedad se utiliza en el siguiente ejemplo, que ilustra un tipo de problema que se encuentra en cálculo.

EJEMPLO 5

Demuestre que $|2x + 6 - (2(3) + 6)| < \epsilon^*$ equivale a $|x - 3| < \epsilon/2$.

Solución. Primero simplificamos la expresión que está dentro de los símbolos del valor absoluto:

$$\begin{aligned} |2x + 6 - (2(3) + 6)| &< \epsilon \\ |2x + 6 - (12)| &< \epsilon \\ |2x - 6| &< \epsilon \\ |2(x - 3)| &< \epsilon \end{aligned}$$

Utilizando el hecho $|ab| = |a||b|$, obtenemos

$$\begin{aligned} |2| |x - 3| &< \epsilon \\ 2|x - 3| &< \epsilon \\ |x - 3| &< \epsilon/2 \end{aligned}$$

* El símbolo ϵ es la letra griega épsilon, y a menudo se utiliza para indicar una cantidad positiva pequeña.

EJERCICIO 2.7

En los problemas 1 al 20, resuelva la inecuación, exprese la solución utilizando la notación de intervalo y grafique las soluciones.

1. $|3x| \geq 18$
2. $|-5x| < 4$
3. $|x - 4| \leq 9$
4. $|3 + x| > 7$
5. $|2x - 7| > 1$
6. $\left|5 - \frac{1}{3}x\right| < \frac{1}{2}$
7. $|x + \sqrt{2}| \geq 1$
8. $|7x + 2| > 0$
9. $|-12 - 3x| < 6$
10. $|17x - 3| \leq -3$
11. $\left|\frac{5}{2}x - 3\right| < 0$
12. $|\sqrt{3}x - 1| > 2$
13. $|4x - 6| > 2$
14. $|3x - 5| \leq 4$
15. $|2.1 - x| > 1.4$
16. $|3.5x + 2.3| < 4.6$
17. $\left|\frac{3x - 1}{4}\right| < 6$
18. $\left|\frac{2 - 5x}{3}\right| \geq 5$
19. $|x - 5| < 0.01$
20. $|x - (-2)| < 0.001$

En los problemas 21 y 22, utilice dos inecuaciones con valor absoluto para resolver la inecuación simultánea dada.

21. $2 < |x - 3| < 5$
22. $1 < |2x + 4| < 6$

En los problemas 23 al 30, halle una inecuación cuya solución sea el conjunto de números reales que satisfagan la condición dada. Exprese cada conjunto utilizando notación de intervalo.

23. Mayor o igual que 2 unidades de -3
24. Menor que 5 unidades de 12
25. Menor que $\frac{1}{2}$ unidades de 3.5
26. Mayor que 7 unidades de $\frac{5}{8}$
27. Mayor que $\sqrt{3}$ unidades de π
28. Menor o igual a $\frac{7}{2}$ unidades de $\sqrt{2}$
29. Menor que δ unidades de a
30. Mayor que δ unidades de a

En los problemas 31 al 34, demuestre que las inecuaciones dadas son equivalentes.

31. $|(3x + 5) - (3(4) + 5)| < \epsilon;$
 $|x - 4| < \epsilon/3$

32. $|(2x - 1) - (2(1) - 1)| < \epsilon;$
 $|x - 1| < \epsilon/2$
33. $|(-4x + 1) - (-4(2) + 1)| < \epsilon;$
 $|x - 2| < \epsilon/4$
34. $|(2 - 5x) - (2 - 5(-2))| < \epsilon;$
 $|x - (-2)| < \epsilon/5$
35. Sean a y b números reales tales que $a < b$. Recuerde de la sección 1.2 que el punto medio m del segmento de recta que une a a y b se obtiene con $m = (a + b)/2$. Demuestre que las soluciones de $|x - m| < (b - a)/2$ son todos los números reales del intervalo abierto (a, b) .
36. Utilice el resultado del problema 35 para escribir el intervalo $(-3, 5)$ de la forma $|X| < c$.
37. Utilice el resultado del problema 35 para escribir el intervalo $(-7.2, 0)$ de la forma $|X| < c$.
38. El peso p de tres cuartas partes de los tarros de café llenados por un procesador de alimentos satisface la desigualdad

$$\left|\frac{p - 16.00}{0.05}\right| \leq 1$$

donde p se mide en onzas. Determine el intervalo en el cual se halla p .

39. Se especifica que una parte exacta de un motor pequeño tiene un diámetro de 0.623 cm. Para que la parte encaje correctamente, su diámetro debe estar a 0.005 cm del diámetro especificado. Escriba una inecuación con valor absoluto que tenga como soluciones todos los diámetros posibles de las partes que encajarán. Resuelva la inecuación para determinar esos diámetros.
40. Se diseña una balanza que sea precisa hasta 0.25 onzas. Si en la balanza se colocan juntas dos latas de sopa idénticas y se halla que tienen un peso combinado de 33.15 onzas, ¿cuál es el mayor y el menor peso posible de una de las latas?
41. La necesidad diaria de agua calculada para cierta ciudad está dada por

$$|c - 3,725,000| < 100,000$$

donde c es el número de galones de agua utilizados por día. Halle la mayor y la menor necesidad diaria de agua.

2.8 Inecuaciones cuadráticas y racionales

Ahora consideramos inecuaciones que incluyen ciertos tipos de expresiones cuadráticas o racionales.

INECUACIONES CUADRATICAS

Cualquier inecuación que pueda escribirse de la forma

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad a \neq 0 \quad (18)$$

donde a , b y c son números reales, se llama **inecuación cuadrática** en x . Si el símbolo $<$ en (18) se reemplaza por \leq , $>$ o \geq , la **inecuación** resultante también se denomina inecuación cuadrática.

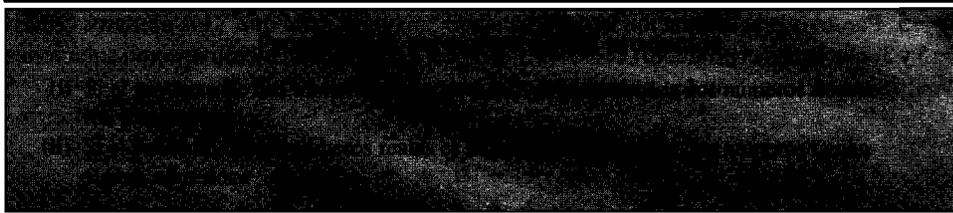
Los siguientes son ejemplos de inecuaciones cuadráticas

$$2x^2 - 3x \leq 5 \quad \text{y} \quad (x + 3)(x - 1) \geq 0$$

puesto que pueden escribirse, respectivamente, como

$$2x^2 - 3x - 5 \leq 0 \quad \text{y} \quad x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

Para resolver una inecuación cuadrática, encontramos útiles las siguientes propiedades de los números reales.



Por tanto, para resolver una inecuación como $(x + 3)(x - 1) > 0$, debemos determinar cuándo los dos factores son ambos positivos o ambos negativos, porque entonces su producto será positivo. Una manera de ocuparse de los signos de estos dos factores es haciendo un **diagrama de signos** (véase figura 28), como sigue.

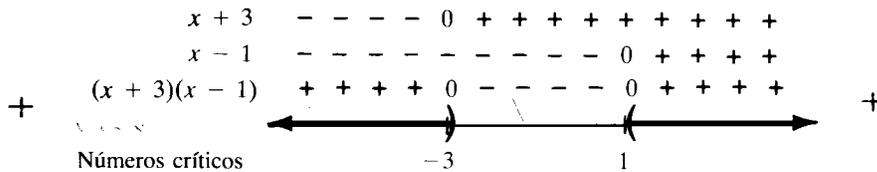


FIGURA 28

Primero señalamos sobre una recta numérica los puntos para los cuales los factores son cero (en este caso -3 y -1). Como lo muestra la figura 28, estos puntos, llamados **números críticos**, dividen la recta en intervalos. A continuación determinamos el signo de cada factor en cada uno de estos intervalos y utilizamos las propiedades de signos (i) y (ii). Ya que estos factores lineales no pueden cambiar de signo dentro de estos intervalos, basta con obtener el signo de cada factor solamente escogiendo un *valor de prueba* de cada intervalo.

Por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, -3)$, si utilizamos $x = -10$ como valor de prueba, encontramos que tanto $(x + 3)$ como $(x - 1)$ son negativos. Se deduce que su producto es positivo y se satisface la inecuación. Para el intervalo $(-3, 1)$, seleccionamos $x = 0$ como valor de prueba y encontramos que $(x + 3)$ es positivo y $(x - 1)$ es negativo. Así, el producto es negativo y la inecuación no se satisface. Para el tercer intervalo $(1, \infty)$, encontramos por un valor de prueba de $x = 2$ que tanto $(x + 3)$ como $(x - 1)$ son positivos. En consecuencia, su producto es positivo. Finalmente, debemos decidir si los números críticos son soluciones. Ya que $(x + 3)(x - 1)$ es igual a cero en los números críticos, la inecuación $(x + 3)(x - 1) > 0$ “mayor que” no se satisface. Por tanto, las soluciones las da la unión de los dos intervalos $(-\infty, -3)$ y $(1, \infty)$, que pueden escribirse como $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.

En la práctica, gran parte de la solución se puede realizar mentalmente y el resultado de cada cómputo registrarse en el diagrama de signos. Puesto que se puede escoger como valor de prueba cualquier número del intervalo, los valores de prueba no se escriben en el diagrama de signos.

En los siguientes ejemplos consideraremos las inecuaciones cuadráticas en las cuales la expresión cuadrática se descompone fácilmente. Para aplicar la propiedad de signo (i) o (ii), *debemos* tener todos los términos diferentes de cero al mismo lado del signo de la inecuación.

EJEMPLO 1 _____

Resuelva $x^2 + 2x - 15 \geq 0$.

Solución. Ya que todos los términos diferentes de cero están a un lado de la inecuación, comenzamos por factorizar:

$$(x - 3)(x + 5) \geq 0$$

A continuación desarrollamos un diagrama de signos (figura 29) con los números críticos 3 y -5. Puesto que la inecuación incluye un signo "mayor o igual que", los números críticos -5 y 3, que hacen el producto $(x - 3)(x + 5)$ igual a cero, deben incluirse como soluciones. Así, las soluciones son los números de la unión de $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$.

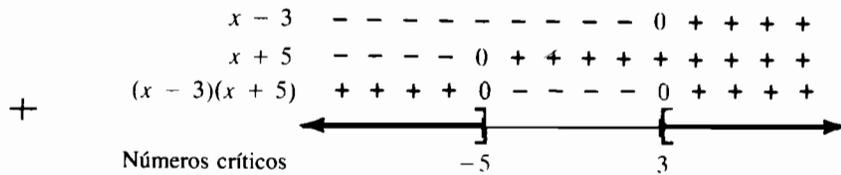


FIGURA 29

EJEMPLO 2 _____

Resuelva $x < 10 - 3x^2$.

Solución. Comenzamos por reescribir la inecuación poniendo todos los términos diferentes de 0 al mismo lado:

$$3x^2 + x - 10 < 0$$

Factorizando nos da

$$(3x - 5)(x + 2) < 0$$

En el diagrama de signos de la figura 30 vemos que las soluciones son los números del intervalo abierto $(-2, \frac{5}{3})$. Los números críticos no se incluyen. (¿Por qué?).

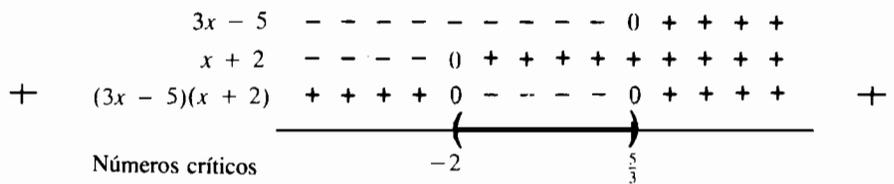


FIGURA 30

INECUACIONES RACIONALES

Una **inecuación racional** es una inecuación que está constituida por el cociente de dos polinomios, tales como

$$\frac{2x - 1}{x + 3} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} \leq 1$$

Para resolver una inecuación racional, encontramos muy útiles las siguientes propiedades adicionales de los números reales.



Como lo ilustran los siguientes ejemplos, también podemos utilizar un diagrama de signos para resolver una inecuación racional.

EJEMPLO 3

Resuelva

$$\frac{x + 1}{x + 3} \leq -1$$

Solución. Para utilizar las propiedades de signos (iii) o (iv), debemos tener todos los términos diferentes de cero al mismo lado de la inecuación (exactamente de la misma forma como lo hicimos en las inecuaciones cuadráticas). Así, agregamos 1 en ambos lados de la inecuación y luego combinamos términos para obtener una inecuación racional equivalente:

$$\begin{aligned} \frac{x + 1}{x + 3} + 1 &\leq 0 \\ \frac{x + 1}{x + 3} + \frac{x + 3}{x + 3} &\leq 0 \\ \frac{2x + 4}{x + 3} &\leq 0 \end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que $2x + 4 = 0$ cuando $x = -2$ y $x + 3 = 0$ cuando $x = -3$, preparamos la gráfica de signos que se muestra en la figura 31.

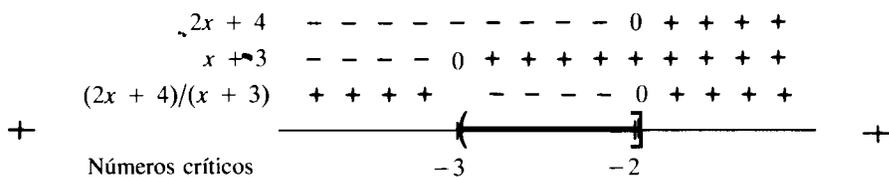


FIGURA 31

En esta gráfica podemos ver que

$$\frac{2x + 4}{x + 3} \leq 0$$

para x en $(-3, -2]$. El número crítico -3 no es una solución, puesto que $(2x + 4)/(x + 3)$ no está definido para $x = -3$, pero el número crítico -2 sí, ya que $(2x + 4)/(x + 3)$ es cero para $x = -2$

EJEMPLO 4

Resuelva

$$\frac{x(1-x)}{x+2} \geq 0$$

Solución. Ya que todos los términos diferentes de cero están a un lado de la inecuación, comenzamos por dibujar un diagrama de signos con los números críticos $-2, 0$ y 1 (véase figura 32).

El diagrama muestra que el factor $1-x$ es positivo para $x < 1$ y negativo para $x > 1$. Notamos también que $x(1-x)/(x+2)$ es indefinido para $x = -2$. Entonces, como lo indica la figura 32, las soluciones están dadas por $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$.

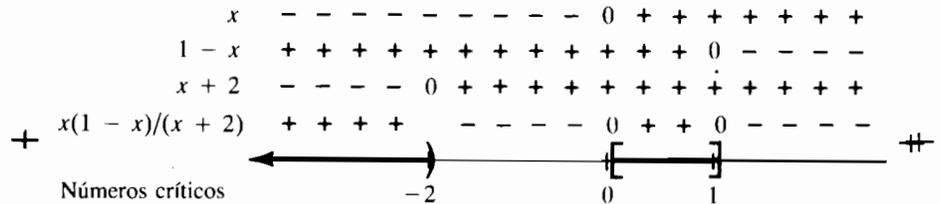


FIGURA 32

Como lo muestra el siguiente ejemplo, un diagrama de signos y las propiedades de signos (i)-(iv) se pueden utilizar para resolver otro tipo de inecuaciones, siempre que todos los términos diferentes de cero estén a un lado de la inecuación.

EJEMPLO 5

Resuelva $(x-4)^2(x+8)^3 > 0$.

Solución. Ya que todos los términos diferentes de cero están al mismo lado de la inecuación, comenzamos por situar los números críticos -8 y 4 en el diagrama de signos. Luego consideramos las potencias de cada factor lineal.

Vemos que, puesto que $(x-4)^2$ está elevado al cuadrado (una potencia par), nunca es negativo. Ya que $(x+8)^3$ es una potencia impar, tiene el mismo signo de $x+8$. Por tanto, como lo vemos en la figura 33, las soluciones son todos los números reales incluidos en $(-8, 4) \cup (4, \infty)$.

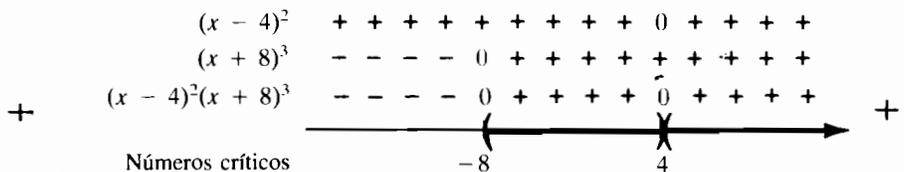


FIGURA 33

EJERCICIO 2.8

En los problemas 1 al 40, resuelva la inecuación y exprese las soluciones utilizando notación de intervalo.

1. $x^2 + 2x - 15 > 0$
2. $3x^2 - x - 2 \leq 0$
3. $x^2 - 8x + 12 < 0$

4. $6x^2 + 14x + 4 \geq 0$
5. $x^2 - 5x \geq 0$
6. $x^2 - 4x + 4 \geq 0$
7. $3x^2 - 27 < 0$
8. $4x^2 + 7x \leq 0$

9. $4x^2 - 4x + 1 < 0$
10. $12x^2 > 27x + 27$
11. $x^2 - 16 < 0$
12. $x^2 - 5 > 0$
[Sugerencia: $x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$.]
13. $x^2 - 12 \leq 0$
14. $9x > 2x^2 - 18$
15. $x^2 + 6x \leq -9$
16. $9x^2 + 30x > -25$
17. $\frac{x-3}{x+2} < 0$
18. $\frac{x+5}{x} \geq 0$
19. $\frac{2x+6}{x-3} \leq 0$
20. $\frac{3x-1}{x+2} > 0$
21. $\frac{x+1}{x-1} + 2 > 0$
22. $\frac{x-2}{x+3} \leq 1$
23. $\frac{2x-3}{5x+2} \geq -2$
24. $\frac{3x-1}{2x-1} < -4$
25. $\frac{5}{x+8} < 0$
26. $\frac{10}{2x+5} \geq 0$
27. $\frac{1}{x^2+9} < 0$
28. $\frac{1}{x^2-1} < 0$
29. $\frac{x(x-1)}{x+5} \geq 0$
30. $\frac{(1+x)(1-x)}{x} \leq 0$
31. $\frac{x^2-2x+3}{x+1} \leq 1$
32. $\frac{x}{x^2-1} > 0$
33. $-(x+1)(x+2)(x+3) < 0$
34. $-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3) \leq 0$
35. $(x^2-1)(x^2-4) \leq 0$
36. $(x-1)^2(x+3)(x+5) > 0$
37. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(x+5)^3 < 0$
38. $x^2(x-2)(x-3)^5 \geq 0$
39. $\frac{(x+3)^2(x+4)(x-5)^3}{x^2-x-20} > 0$
40. $\frac{9x^2-6x+1}{x^3-x^2} \leq 0$

En los problemas 41 al 44, resuelva la inecuación y exprese las soluciones utilizando notación de intervalo. Podría necesitar la fórmula cuadrática para factorizar la expresión cuadrática.

41. $x^2 - x - 1 > 0$
42. $6x^2 < 3x + 5$
43. $\frac{5x-2}{x^2+1} \leq 1$
44. $\frac{x^2}{x-1} \geq -1$
45. ¿Para qué valores de x es $x^2 < x$? $x^2 > x$?
46. ¿Para qué valores de x es $1/x < x$? $x < 1/x$?
47. Si $x^2 \leq 1$, ¿es necesariamente verdadero que $x \leq 1$? Explique.
48. Si $x^2 \geq 4$, ¿es necesariamente verdadero que $x \geq 2$? Explique.
49. Un macizo rectangular va a ser dos veces más largo que ancho. Si el área circundada debe ser de más de 98m^2 , ¿qué puede concluir sobre el ancho del macizo?
50. El número de diagonales d , en un polígono con n lados, está dado por

$$d = \frac{(n-1)n}{2} - n$$

- ¿Para qué polígonos pasará de 35 el número de diagonales?
51. El número total de puntos en una formación triangular, con n filas está dado por

$$t = \frac{n(n+1)}{2}$$

¿Cuántas filas puede tener la formación si el número total de puntos debe ser menor de 5,050?

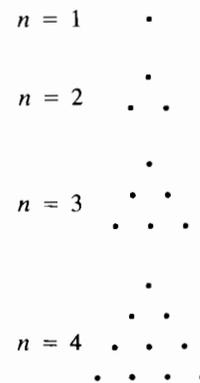


FIGURA 34

52. Los lados de un cuadrado se extienden para formar un rectángulo. Como lo muestra la figura 35, un lado se extiende 2 cm y el otro 5 cm. Si el área del rectángulo resultante es menor de 130cm^2 , ¿cuáles son las posibles longitudes de un lado del cuadrado original?

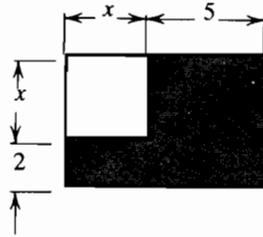


FIGURA 35

53. Una resistencia de 5 ohmios y una resistencia variable se instalan en paralelo. La resistencia resultante R_T está dada por $R_T = 5R/(5 + R)$. Determine los valores de la resistencia variable R para los cuales la resistencia resultante R_T será mayor de 2 ohmios.
54. La intensidad I en lumens de cierta fuente de luz en un punto a r centímetros de la fuente está dada por $I = 625/r^2$. ¿A qué distancias de la fuente de luz la intensidad será menor de 25 lumens?

CONCEPTOS IMPORTANTES

Ecuaciones

raíz
 identidad
 ecuación condicional
 ecuaciones equivalentes
 ecuación lineal
 ecuación cuadrática
 ecuación polinómica
 Solución
 solución extraña
 verificación de una solución
 Completación del cuadrado

Fórmula cuadrática

discriminante
 Teorema de Pitágoras
 Números complejos
 parte real
 parte imaginaria
 conjugado complejo
 Inecuaciones

inecuaciones equivalentes
 inecuación simultánea
 inecuación con valor absoluto
 inecuación lineal

inecuación cuadrática
 inecuación racional
 Notación de intervalo
 intervalo abierto
 intervalo cerrado
 intervalo semiabierto
 intervalo infinito
 diagrama de signos
 números críticos

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 26, resuelva la ecuación dada.

1. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = x - \frac{1}{3}$

2. $4(1 - x) = x - 3(x + 1)$

3. $4 - \frac{1}{t} = 2 + \frac{3}{t}$

4. $\frac{4}{r+1} - 5 = 4 - \frac{3}{r+1}$

5. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{5}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$

6. $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{3}{x + 1}$

7. $(1 - y)(y - 1) = y^2$

8. $x(2x - 1) = 3$

9. $4x^2 + 10x - 24 = 0$

10. $3x^2 + x - 10 = 0$

11. $16x^2 + 9 = 24x$

12. $x^2 - 17 = 0$

13. $2x^2 - 6x - 3 = 0$

14. $4x^2 + 20x + 25 = 0$

15. $2x^2 + 100 = 0$

17. $x^3 - 8 = 0$

19. $x^4 + 4x^2 - 8 = 0$

21. $x^{1/4} - 2x^{1/2} + 1 = 0$

22. $8x^{2/3} - 9x^{1/3} + 1 = 0$

23. $\sqrt[3]{x^2 - 17} = 4$

25. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x-6}$

26. $x + 3 - 28x^{-1} = 0$

16. $x^2 + 2x + 4 = 0$

18. $x^3 + 8 = 0$

20. $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

24. $3 + \sqrt{3x+1} = x$

En los problemas 27 al 34, resuelva la inecuación dada y grafique las soluciones.

27. $2x - 5 \geq 6x + 7$

28. $7 \leq 3 - 2x < 11$

29. $|3x - 4| < 5$

31. $2x^2 - 9x \leq 18$

33. $x^3 > x$

30. $|5 - 2x| \geq 7$

32. $\frac{2x - 6}{x - 1} \geq 1$

34. $(x^2 - x)(x^2 + x) \leq 0$

En los problemas 35 al 40, despeje la variable indicada en términos de las variables restantes. (Suponga que todas las variables representan números reales positivos).

35. Área de la superficie de un paralelepípedo rectangular

$$A = 2(ab + bc + ac), \text{ para } b$$

36. Conversión de temperatura

$$C = \frac{5}{9}(F - 32), \text{ para } F$$

37. Ecuación de la lente

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \text{ para } F$$

38. Volumen de una esfera

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ para } r$$

39. Ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ para } x$$

40. Movimiento de un proyectil

$$y = x - \frac{9.8}{v_0^2} x^2, \text{ para } x$$

En los problemas 41 al 48, realice la operación indicada y escriba la respuesta de la forma $a + bi$.

41. $(6 - 5i) + (4 + 3i)$

42. $(8 + 2i) - (5 - i)$

43. $(3 + 2i)(4 - 5i)$

44. $(3 + 5i)^2$

45. $\frac{1}{4 - 2i}$

46. $\frac{i}{5 + i}$

47. $\frac{2 - 5i}{3 + 4i}$

48. $\frac{15 - 7i}{7i}$

En los problemas 49 al 52, despeje x y y .

49. $(3x - yi)i = 4(1 + yi)$

50. $(1 + i)^2 = (x - yi)i$

51. $\frac{1}{i} = (2 - 3i) + (x + yi)$

52. $i^2 = -(y + xi)$

53. Si la suma de dos números es 33 y su cociente es $\frac{3}{8}$, encuentre los dos números.

54. Dos aviones, en aire quieto, vuelan a una velocidad de 180 mph. Un avión parte de Los Angeles y viaja en dirección del viento hacia Phoenix. El segundo avión parte de Phoenix al mismo tiempo y viaja contra el viento hacia Los Angeles. Si la distancia entre las ciudades es de 400 millas y los aviones se cruzan a 250 millas de Los Angeles, halle la velocidad del viento.

55. En cuatro exámenes de igual valor, un estudiante tiene un puntaje promedio de 76. Si el examen final vale el doble de

cualquiera de los 4 exámenes, encuentre el puntaje que el estudiante debe sacar en el examen final para tener un promedio total de 80.

56. Dos autos viajan 40 millas. Un auto viaja a 5 mph más rápidamente que el otro y hace el viaje en 16 minutos menos de tiempo. Halle las velocidades de los dos autos.
57. La distancia desde Minneápolis hasta Des Moines es de aproximadamente 250 millas: 100 millas en Minnesota y 150 millas en Iowa. Anteriormente (mayo de 1987), Iowa había elevado su límite de velocidad interestatal a 65 mph, mientras que el límite de velocidad de Minnesota era aún de 55 mph. En estas circunstancias, suponga que una mujer desea viajar de Minneápolis a Des Moines en 4 horas. Si planea conducir a 65 mph en Iowa, ¿a qué velocidad debe ir en Minnesota?
58. Ethan puede escribir en máquina 100 direcciones en 5 horas. Comienza y trabaja solo por 2 horas. Luego Sean comienza a ayudarlo con otra máquina de escribir y terminan la labor en otros 90 minutos. ¿Cuánto tiempo gastaría Sean escribiendo en máquina las 100 direcciones solo?
59. Se va a construir una acera alrededor de una faja circular. El diámetro de la faja es de 20 m. Si el área de la acera es de 44π m², determine el ancho de la acera.
60. Si los dígitos de un número de dos cifras se invierten, la razón del número original con respecto al nuevo es igual a $\frac{5}{6}$. ¿Cuál es el número original?
61. El bote de Frank navega a una velocidad de 20 mph en agua tranquila. Si ella recorre la misma distancia en 3 horas contra la corriente de la que puede recorrer en 2 horas en dirección de la corriente, ¿cuál es la velocidad de la corriente?
62. El piso de una casa es un rectángulo 5 m más largo que el doble de su ancho. Se planea una ampliación que incrementará el área total de la casa a 135 m². Si el ancho de la ampliación se aumenta en 4 m, halle las dimensiones originales de la casa.
63. Se corta un borde de ancho uniforme de un pedazo de tela rectangular. El pedazo de tela resultante es de 20 por 30 cm. (véase figura 36). Si el área original era el doble de la actual, halle el ancho del borde que se cortó.

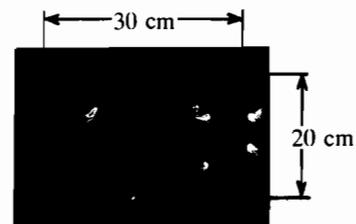


FIGURA 36

64. Típicamente, el tamaño de la pantalla de un televisor rectangular se mide a lo largo de la diagonal. Si la pantalla tiene 3.4 pulgadas más de largo que de ancho y el tamaño de la pantalla que se da es de 19 pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la pantalla?
65. Un cohete de juguete se lanza directamente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 72 pies/s. Su altura s en

pies por encima del suelo después de t segundos está dada por $s = -16t^2 + 72t$. ¿Durante qué intervalo de tiempo el cohete estará a más de 80 pies del suelo?

66. Una enfermera tiene 2 L de una solución de 3% de ácido bórico. ¿Qué cantidad de una solución de 10% se debe agregar para tener una solución de 4%?
67. El señor Diamond compró dos bonos por un total de US\$30,000. Un bono paga 6% de interés y el otro paga 8%. El interés anual del bono de 8% excede al interés anual del de 6%, en US\$1,000. Halle el costo de cada bono.
68. Teri había trabajado en una firma aeroespacial por 21 años cuando María comenzó a laborar allí. Si Teri se jubila cuando tiene 5 veces la antigüedad de María, ¿cuánto tiempo ha trabajado cada una en la firma?
69. La Sra. Applebee compró una serie de cajas musicales para su almacén, por un total de US\$400. Si cada caja de música hubiera costado US\$4 más, habría adquirido 5 cajas de música menos por la misma cantidad de dinero. ¿Cuántas compró?
70. La regla de Young para convertir la dosis para adultos de una droga en dosis para niños asume una relación entre edad y dosis, y se utiliza más frecuentemente para niños entre los 3 y los 12 años:

$$\frac{\text{edad del niño}}{\text{edad del niño} + 12} \times \text{dosis de adulto} = \text{dosis de niño.}$$

¿A qué edad la dosis del adulto es 4 veces la del niño?

71. Los ingenieros que se ocupan de los riesgos de un alud miden la solidez de una banquisa de nieve martillando un tubo de metal especialmente diseñado en la nieve y viendo hasta dónde penetra. Le asignan a la banquisa de nieve un número de apisonamiento R , dado por la fórmula

$$R = H + T + nfH/p$$

donde H es la masa del martillo, T es la masa del tubo, n es el número de golpes del martillo, f es la distancia que el martillo baja por cada golpe y p es la penetración total después de n golpes (véase figura 37). Típicamente, T y H tienen 1 kg cada una y f tiene alrededor de 50 cm. Si el número de apisonamiento de la banquisa de nieve es 150, ¿hasta dónde penetrará el tubo después de un golpe?

72. El tamaño de una máquina automotriz se mide por el volumen de aire presionado hacia arriba o desplazado por el movimiento de los pistones. Este volumen está dado por la fórmula

$$V = N\pi S(B/2)^2$$

donde N es el número de pistones, S es la distancia vertical o carrera que cada pistón mueve y B es el diámetro o taladro de un pistón (véase figura 38).

- (a) Halle el tamaño en pulgadas cúbicas de un V-8 (máquina de 8 cilindros) con un taladro de 4 pulgadas y una carrera de 3 pulgadas.
- (b) La máquina de 6 cilindros en 1909 de Thomas Flyer tenía un taladro y una carrera de 5.5 pulgadas. Halle su tamaño. (Nota: las máquinas antiguas eran grandes debido a su baja eficacia).

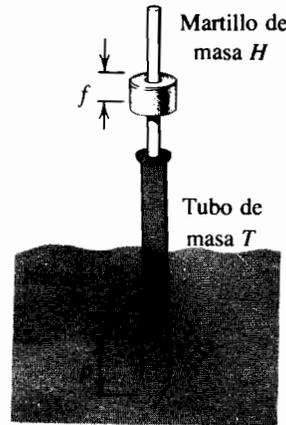


FIGURA 37

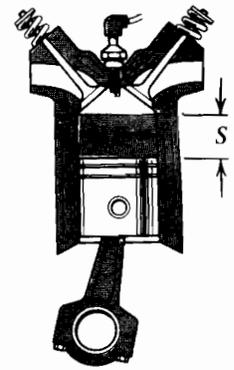


FIGURA 38

- (c) El Oldsmobile Limited de 1911 desplazó 706.9 pulgadas³ con un taladro de 5 pulgadas y una carrera de 6 pulgadas. ¿Cuántos cilindros tenía?



Oldsmobile de 1911

- (d) Los automóviles veloces "aumentarán" la potencia de un carro aumentando el tamaño del taladro y la longitud de la carrera. Si la carrera se aumenta en $\frac{1}{4}$ de pulgada y el taladro en $\frac{1}{8}$ de pulgada en la máquina descrita en la parte (a), ¿cuánto desplazamiento se gana?
73. La fórmula de Vincent para la temperatura de la piel humana P_v en grados Celsius es

$$P_v = 30.1 + 0.2t - (4.12 - 0.13t)v$$

donde t es la temperatura del aire en grados Celsius y v es la velocidad del viento en metros por segundo.

- (a) ¿A qué temperaturas t en aire quieto ($v = 0$) es menor la temperatura de la piel que la sangre (37°C)?
- (b) ¿Hay una velocidad de viento a la cual tanto la temperatura t como la temperatura de la piel P sea igual a la temperatura de la sangre (37°C)? Explique su respuesta.
- (c) Según está fórmula, ¿a qué temperaturas t la velocidad del viento hace que se aumente la temperatura de la piel? (Su-

gerencia: la velocidad del viento aumentará la temperatura del cuerpo cuando el coeficiente de v sea positivo).

74. Un arquitecto de estadios ha diseñado un parqueadero para 20,000 autos con 16 salidas a la calle. En condiciones ideales se asume que los autos saldrán suavemente a 10 mph, utilizando las 16 salidas, con un espacio de 10 pies entre cada auto.
- Si el auto común tiene 15 pies de largo, ¿en cuánto tiempo se desocupará el parqueadero? [*Sugerencia:* convierta 10 mph a pies por minuto].
 - Derive una fórmula general que exprese el tiempo T en minutos en el que C autos saldrán de un parqueadero, utilizando N salidas a la calle, con un espacio de s pies entre autos, todos moviéndose a v millas por hora, si el auto común tiene L pies de longitud. Incluya el factor que convierte millas por hora en pies por minuto.
 - Resuelva la fórmula deducida en la parte (b) para N .
 - Halle el número de salidas a la calle requeridas para 10,000 autos, cada uno de 15 pies de largo, de manera que salgan en no más de 30 minutos a 10 mph con 10 pies entre cada auto.
75. La gravedad específica de un material está definida como la razón de masa del material con respecto a la masa de un volumen igual de agua a 4°C. (Es necesario especificar la temperatura porque el agua se expande si se calienta por encima o se enfría por debajo de los 4°C). A principios del siglo XX, Thiesen, Scheel y Dieselhorst encontraron la siguiente fórmula empírica para la gravedad específica G del agua como una función de la temperatura T en grados Celsius:

$$G = 1 - \frac{(T - 4)^2}{118,931 + 1366.75T - 4.137^2}, \quad 0 \leq T \leq 30$$

- Halle la gravedad específica del agua cuando $T = 30^\circ\text{C}$.
 - La gravedad específica del agua medida en su punto de ebullición (100°C) es 0.95838. ¿Qué daría como valor la fórmula?
 - Según la fórmula, ¿a qué temperatura es la gravedad específica del agua igual a 0.999?
76. Puesto que el agua es más densa que el hielo, un banco de hielo flotante que se está congelando sobre una piedra grande puede sobrenadar la piedra grande si el banco de hielo crece lo sufi-

ciente como para sobrepasar el peso de la piedra. Esto ocurrirá cuando la masa del hielo más la masa de la piedra sean menores que la masa del mismo volumen de agua. Drake y McCann (1982) diseñaron este fenómeno, adoptando una piedra esférica y un banco de hielo en forma de disco (véase figura 39).

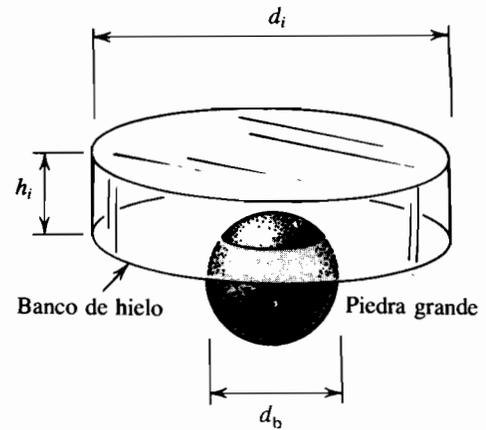


FIGURA 39

- Designe a d_b y d_i como representantes del diámetro de la piedra grande y el diámetro del banco de hielo, respectivamente. Designe h_i como la altura del banco de hielo y ρ_b y ρ_i como las densidades de la piedra grande, y el banco de hielo respectivamente. Escriba una fórmula para la masa total del banco de hielo más la piedra grande.
- Designe a ρ_w como la densidad del agua. Escriba la fórmula para la masa del mismo volumen del agua.
- Demuestre que si el banco de hielo va a sobrenadar la piedra grande, entonces

$$d_i \geq \left[\frac{2}{3} \frac{d_b^3}{h_i} \left(\frac{\rho_b - \rho_w}{\rho_w - \rho_i} \right) \right]^{1/2}$$

(*Sugerencia:* para $0 \leq a \leq b$, $a^{1/2} \leq b^{1/2}$).

- Utilice los valores $\rho_b = 2,600 \text{ kg/m}^3$, $\rho_w = 1,030 \text{ kg/m}^3$, $\rho_i = 0.9 \rho_w$, y $h_i = 1 \text{ m}$ para hallar el diámetro de la piedra más grande a la cual un cubo de hielo de 30 m de diámetro puede sobrenadar.

3.1 Sistema de coordenadas cartesianas, relaciones y gráficas

Anteriormente vimos que cada número real puede asociarse exactamente con un punto en la recta numérica. Ahora examinemos una correspondencia entre puntos en el plano y pares ordenados de números reales.

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Un **sistema cartesiano** o **sistema rectangular** o **sistema de coordenadas*** se forma en un plano con dos rectas numéricas perpendiculares que se intersecan en el punto que le corresponde al número 0 en cada recta. Este punto de intersección se llama **origen** y se denota con O . A menudo, las rectas numéricas horizontales y verticales se llaman el **eje x** y el **eje y** , respectivamente. Los ejes dividen el plano en cuatro regiones, llamadas **cuadrantes**, que se numeran como lo muestra la figura 1(a). Como vemos en la figura 1(b) las escalas en el eje x y en el eje y no necesariamente son iguales. Un plano que contenga el sistema de coordenadas rectangular se llama **plano cartesiano**, **plano de coordenadas** o **plano xy** .

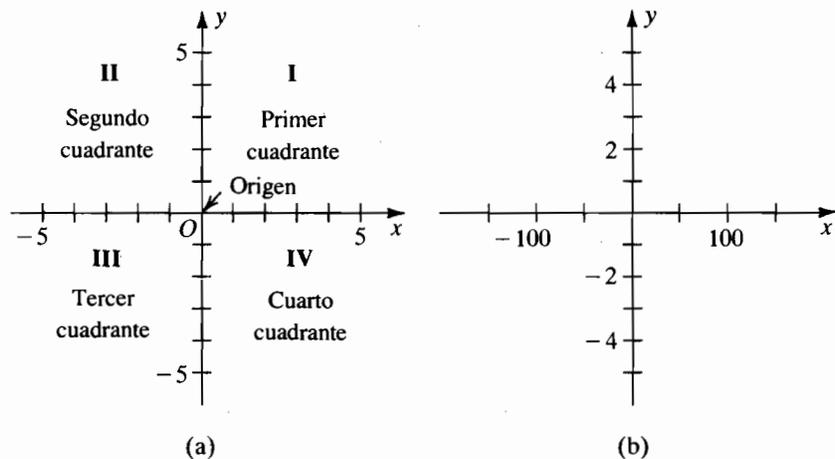


FIGURA 1

LA ABSCISA Y LA ORDENADA

Sea P un punto en el plano cartesiano. Asociamos un par ordenado de números reales con P , trazando una línea vertical desde P hasta el eje x , y una línea horizontal desde P hasta el eje y . Si la línea vertical interseca el eje x en a y la línea horizontal interseca el eje y en b , asociamos el par ordenado (a, b) con el punto P (véase figura 2). Y, viceversa, a cada par ordenado (a, b) de números reales le corresponde un punto P en el plano. Este punto se ubica en la intersección de la línea vertical y pasa a través de a en el eje x y la recta horizontal pasa

* Este sistema se llamó así en honor del filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650).

a través de b en el eje y . De aquí en adelante, nos referiremos a un par ordenado como un **punto** que denotaremos como $P(a, b)$ o, simplemente, (a, b) *. Llamamos a a la **abscisa**, o **coordenada x** de P , y a b la **ordenada**, o **coordenada y** , de P . (Véase figura 2).

Los signos algebraicos de las coordenadas x y y de cualquier punto (x, y) en cada uno de los cuatro cuadrantes se indican en la figura 3. Se considera que los puntos que hay en cualquiera de los ejes no están en ninguno de los cuadrantes. Cuando localizamos un punto correspondiente a un par ordenado de números en un plano cartesiano y lo representamos utilizando un punto, decimos que **marcamos** el punto.

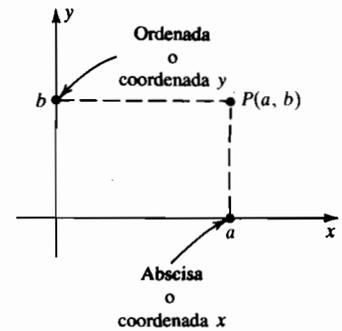


FIGURA 2

EJEMPLO 1 _____

Marque los puntos $A(1, 2)$, $B(-4, 3)$, $C(-\frac{3}{2}, -2)$, $D(0, 4)$ y $E(3.5, 0)$. Especifique en qué cuadrante se localiza cada punto.

Solución. Los 4 puntos se marcan en el plano cartesiano en la figura 4. El punto A está en el cuadrante I, el B en el II, y el C en el III. Los puntos D y E , que se localizan en los ejes y y x respectivamente, no están en ningún cuadrante.

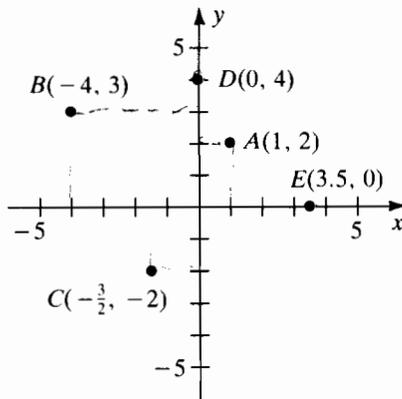


FIGURA 4

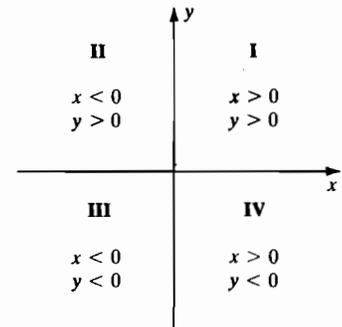


FIGURA 3

RELACIONES Y GRAFICAS

En general, a cualquier conjunto de pares ordenados de números reales se llama una **relación** y al correspondiente conjunto de puntos en el plano se llama **gráfica de la relación**.

EJEMPLO 2 _____

Grafique la relación $S = \{(-1, 2), (0, 4), (3, -\frac{5}{2}), (-3, -1)\}$.

Solución. En la figura 5 hemos marcado los 4 puntos que corresponden a los pares ordenados de la relación S .

EJEMPLO 3 _____

Grafique la relación $T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, |y| = 1\}$.

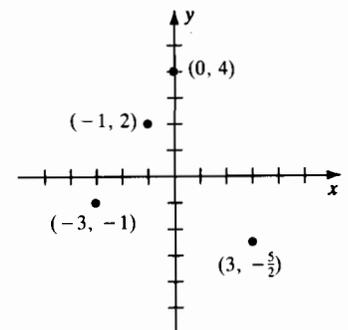


FIGURA 5

* Esta es la misma notación utilizada para designar un intervalo abierto. Debe estar claro considerando el contexto de la discusión si estamos considerando un punto (a, b) o un intervalo abierto (a, b) .

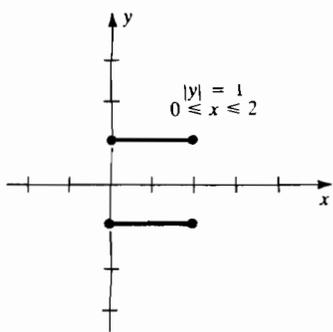


FIGURA 6

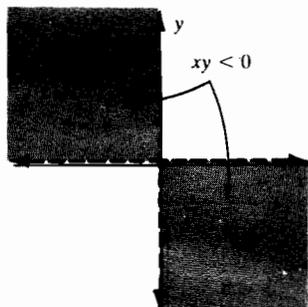


FIGURA 7

Solución. Primero, recuerde que $|y| = 1$ implica que $y = 1$ o $y = -1$. Así, para graficar la relación T , marcamos los puntos cuyas coordenadas x sean números del intervalo $[0, 2]$ y cuyas coordenadas y sean 1 ó -1 . (Véase figura 6).

EJEMPLO 4

Trace el conjunto de puntos (x, y) en el plano que satisfaga cada una de las siguientes condiciones: (a) $xy < 0$ y (b) $|y| \geq 2$.

Solución

- (a) El producto de dos números es negativo cuando uno de los números es positivo y el otro negativo. Así, $xy < 0$ cuando $x > 0$ y $y < 0$ o cuando $x < 0$ y $y > 0$. Vemos en la figura 3 que $xy < 0$ para todos los puntos (x, y) en los cuadrantes II y IV. Por tanto, podemos representar el conjunto de puntos (x, y) para los cuales $xy < 0$ por medio de las regiones sombreadas de la figura 7. Los ejes de coordenada se representan por medio de líneas interrumpidas para indicar que los puntos sobre estas líneas no se incluyen en la solución.
- (b) En la sección 2.7 vimos que $|y| \geq 2$ puede expresarse como $y \leq -2$ o $y \geq 2$. Puesto que x no está restringido, los puntos (x, y) para los cuales $y \leq -2$ o $y \geq 2$ pueden representarse por medio de las regiones sombreadas de la figura 8. Utilizamos líneas continuas al borde de la región sombreada para indicar que estos puntos sí se incluyen en la solución.

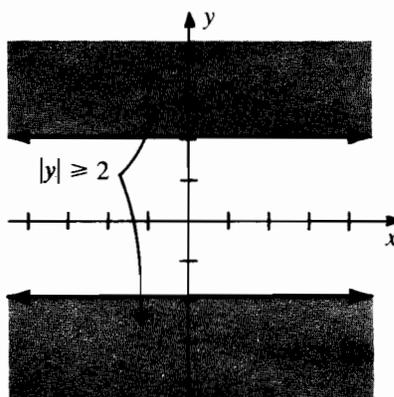


FIGURA 8

GRAFICA DE UNA ECUACION

En los dos ejemplos anteriores examinamos gráficas de relaciones definidas por desigualdades. Ahora consideramos relaciones definidas por una ecuación que relaciona dos variables x y y . Al conjunto de puntos en el plano que corresponde a los pares ordenados (x, y) en la relación se llama **gráfica de la ecuación**.

EJEMPLO 5

Grafique la ecuación $y = x^2$.

Solución. Ya que, en general, la gráfica de una ecuación consta de un número infinito de puntos, marcamos unos cuantos y los unimos por medio de una curva uniforme, como lo muestra la figura 9.

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

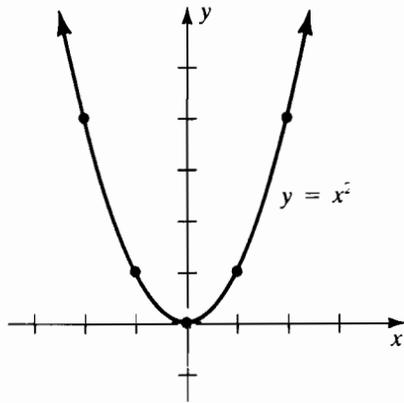


FIGURA 9

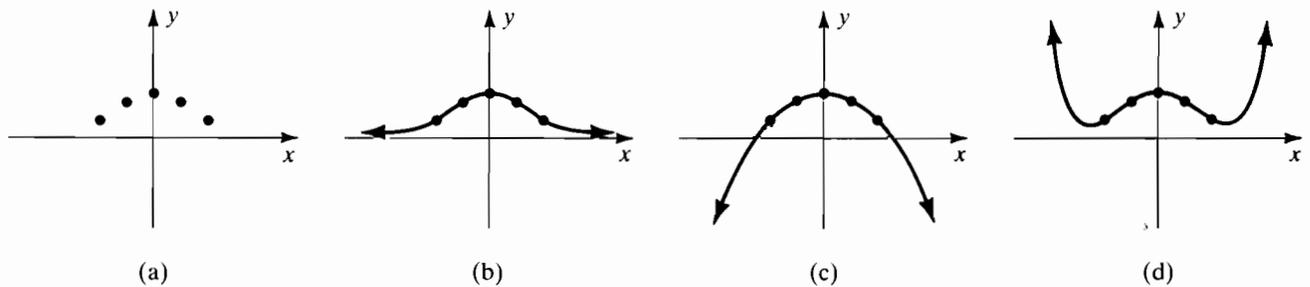


FIGURA 10

Cinco puntos unidos por medio de diferentes curvas uniformes.

Nota de advertencia: pueden surgir varios problemas con la técnica de la demarcación de puntos. Debe marcar los puntos que sean suficientes para poder discernir la forma de la gráfica. Pero, ¿qué significa “puntos suficientes”? ¿seis?, ¿veinte? (Véase figura 10).

Por supuesto, la respuesta depende tanto de la ecuación que esté graficando como de su experiencia. A medida que adquiera experiencia en matemáticas, encontrará que a menudo hay formas de graficar una ecuación marcando el mínimo número de puntos. Además, no todas las gráficas son “curvas uniformes”. (Véase figura 11).

Debido al puntiagudo pico del origen, la curva que une los puntos en la figura 11 (b) no se considera “suave”. Por tanto, tenga cuidado cuando marque los puntos.

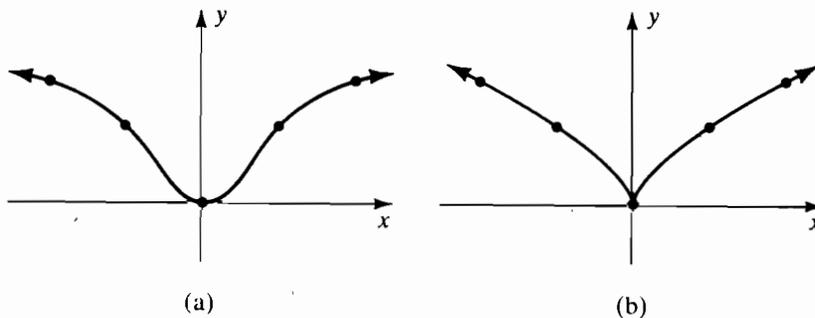


FIGURA 11

Cinco puntos unidos por medio de una curva (a) suave; (b) no suave.

EJEMPLO 6

Grafique la ecuación $y = \sqrt{x}$.

Solución. Para obtener valores reales para y , observamos que x no puede ser negativo. Marcamos los puntos correspondientes a los pares ordenados enumerados en la tabla correspondiente y, como en el ejemplo 5, los unimos por medio de una curva suave (véase figura 12).

x	
0	0
1	1
2	$\sqrt{2} \approx 1.41$
3	$\sqrt{3} \approx 1.73$
4	2

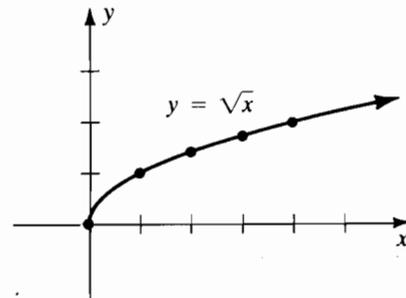


FIGURA 12

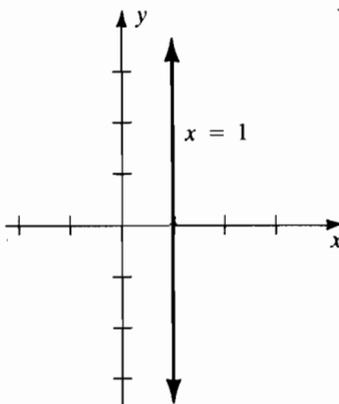


FIGURA 13

EJEMPLO 7

Grafique la ecuación $x = 1$.

Solución. La coordenada x de cada punto que satisfaga esta ecuación debe ser igual a 1. Puesto que y no aparece explícitamente en la ecuación, se entiende que la coordenada y de un punto que satisfaga la ecuación puede ser cualquier número real. Como lo vemos en la figura 13, la gráfica de $x = 1$ es una línea vertical a una unidad a la derecha del eje y .

INTERSECTOS

Localizar los puntos en los cuales la gráfica de una ecuación atraviesa los ejes coordenados puede ser útil para trazar su gráfica. Los **intersectos en x** de la gráfica de una ecuación son las coordenadas x de los puntos en los cuales la gráfica atraviesa el eje x . Ya que cada punto del eje x tiene una coordenada $y = 0$, los intersectos en x (si hay) pueden determinarse en la ecuación dada asignando $y = 0$ y despejando x . A su vez, los **intersectos en y** de la gráfica de una ecuación son las coordenadas y de los puntos en los cuales la gráfica atraviesa el eje y . Estos valores pueden encontrarse asignando $x = 0$ en la ecuación y despejando y . (Véase figura 14).

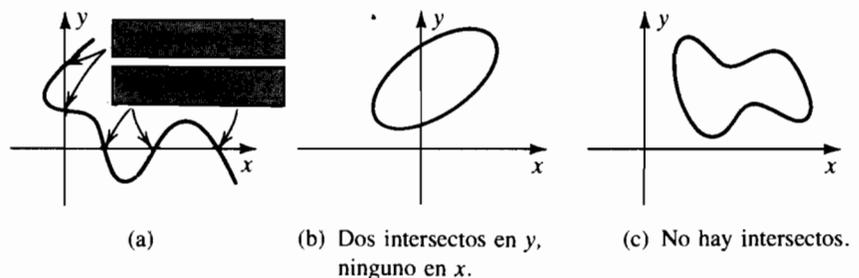


FIGURA 14

SIMETRIA

Una gráfica puede también tener **simetría**. La figura 9 muestra que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y , ya que la porción de la gráfica que se localiza en el segundo cuadrante es la imagen especular de la porción de gráfica del primer cuadrante. Como lo ilustra la figura 15, una gráfica es **simétrica con respecto al eje y** si cada vez que (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, y)$ es también un punto de la gráfica. Una gráfica es simétrica con respecto al eje x si cada vez que (x, y) es un punto de la gráfica, $(x, -y)$ es también un punto en la gráfica. Finalmente, una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si cada vez que (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, -y)$ es también un punto de la gráfica. Cuando graficamos una ecuación, podemos determinar si su gráfica posee cualquiera de estas simetrías, *antes* de marcar puntos.

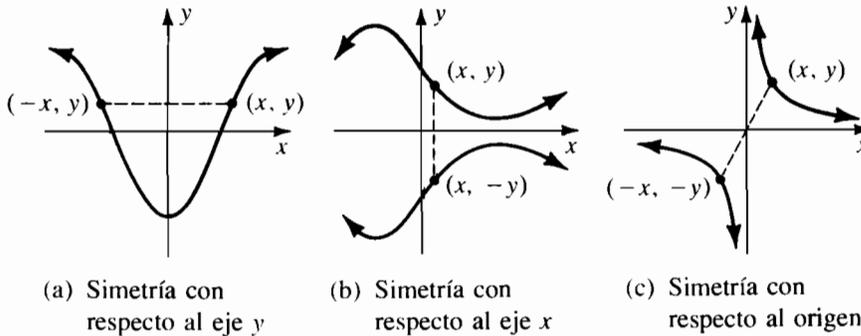
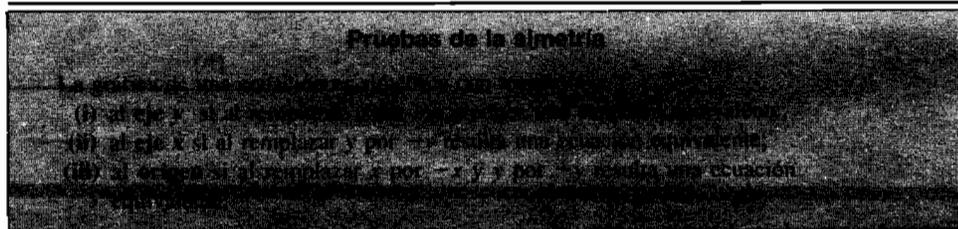


FIGURA 15



La ventaja de utilizar la simetría al graficar debe ser manifiesta: si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y , entonces necesitamos marcar solamente puntos para $x \geq 0$, ya que los puntos de la gráfica para $x < 0$ se obtienen tomando las imágenes especulares, a través del eje y de los puntos del primero y cuarto cuadrantes.

EJEMPLO 8

Remplazando x por $-x$ en $y = x^2$ y utilizando $(-x)^2 = x^2$, vemos que

$$y = (-x)^2 \text{ es equivalente a } y = x^2$$

Esto prueba lo que está manifiesto en la figura 9: la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y .

El siguiente ejemplo ilustra cómo utilizar estos nuevos instrumentos como ayudas para la graficación.

EJEMPLO 9

Grafique la ecuación $x + y^2 = 10$.

Solución.

Intersectos: asignando $y = 0$ en la ecuación inmediatamente da $x = 10$. Así, el intersección en x es 10. Cuando $x = 0$, obtenemos $y^2 = 10$, lo cual implica que $y = -\sqrt{10}$ o $y = \sqrt{10}$. Los intersección en y son entonces, $-\sqrt{10}$ y $\sqrt{10}$.

Simetría: la gráfica es simétrica con respecto al eje x ya que, reemplazando y por $-y$, encontramos que

$$x + (-y)^2 = 10 \text{ es equivalente a } x + y^2 = 10$$

Marcación de puntos: los registros de la tabla adjunta se obtuvieron asignándole valores a y . Notamos que, debido a la simetría, solamente necesitamos considerar $y \geq 0$. Los puntos coloreados en la figura 16(a) en el tercero y cuarto cuadrantes se obtuvieron tomando las imágenes especulares de los puntos que se marcaron en el primero y segundo cuadrantes.

Utilizando toda la información anterior, obtenemos la gráfica de la figura 16(b).

x	y
9	1
6	2
1	3
-6	4

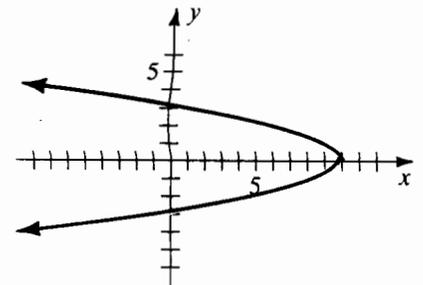
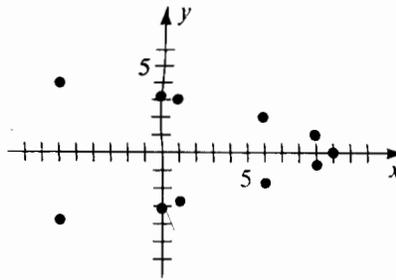


FIGURA 16

(a)

(b)

EJERCICIO 3.1

En los problemas 1 al 4, marque los puntos dados.

- (2, 3), (4, 5), (0, 2), (-1, -3)
- (1, 4), (-3, 0), (-4, 2), (-1, -1)
- $(-\frac{1}{2}, -2)$, (0, 0), $(-1, \frac{3}{4})$, (3, 3)
- (0, 0.8), (-2, 0), (1.2, -1.2), (-2, 2)

En los problemas 5 al 16, determine el cuadrante en el cual se localizan los puntos dados si (a, b) está en el cuadrante 1.

- | | |
|----------------|----------------|
| 5. $(-a, b)$ | 6. $(a, -b)$ |
| 7. $(-a, -b)$ | 8. (b, a) |
| 9. $(-b, a)$ | 10. $(-b, -a)$ |
| 11. (a, a) | 12. $(b, -b)$ |
| 13. $(-a, -a)$ | 14. $(-a, a)$ |
| 15. $(b, -a)$ | 16. $(-b, b)$ |

17. Marque los puntos dados en los problemas 5 al 16, si (a, b) es el punto mostrado en la figura 17.

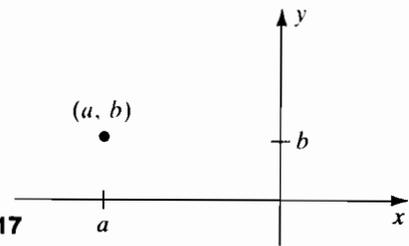


FIGURA 17

18. Dé las coordenadas de los puntos mostrados en la figura 18.

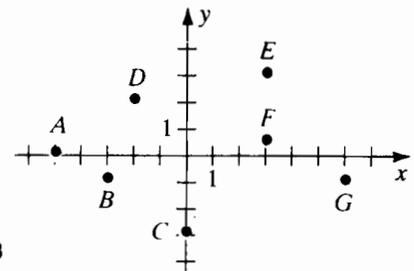


FIGURA 18

En los problemas 19 al 24, grafique la relación dada.

- 19. $\{(x, y) \mid xy = 0\}$
- 20. $\{(x, y) \mid xy \leq 0\}$
- 21. $\{(x, y) \mid xy > 0\}$
- 22. $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, y = 2\}$
- 23. $|x| > 4$
- 24. $|y| \leq 1$

En los problemas 25 al 32, pruebe la simetría con respecto a los ejes x y y y el origen. No grafique.

- 25. $y = x^5 - x^3 + 2x$
- 26. $y = 7x^3 + 8x - 2$
- 27. $y = (x^3 - x)^2$
- 28. $y = x\sqrt{x^2 + 1}$
- 29. $x^{2/3} + y^{2/3} = 9$
- 30. $x^2y + 3x^2 = y$
- 31. $xy = 4$
- 32. $x^2y = 1$

En los problemas 33 al 70 grafique la ecuación dada. Halle intersecciones. Use simetría cuando sea posible.

- 33. $x = -3$
- 34. $y = 4$
- 35. $y = x$
- 36. $y = -x$
- 37. $x - y = 1$
- 38. $2x + 3y = 6$
- 39. $y = -x^2$
- 40. $y^2 = x$
- 41. $y = x^2 - 3$
- 42. $y = x^2 + 1$
- 43. $y = (x + 1)^2$
- 44. $y = (x - 1)^2$
- 45. $y^2 - x = 9$
- 46. $y^2 = 16(x + 4)$
- 47. $y = x^3$
- 48. $y = -x^3$
- 49. $y^3 = x$
- 50. $y = x^4$
- 51. $y^2 = x^2$
- 52. $y^2 = x^3$
- 53. $y = |x|$
- 54. $|y| = x$
- 55. $|x + y| = 0$
- 56. $|x - y| = 0$
- 57. $|x - y| = 2$
- 58. $x = |y| - 2$
- 59. $y^2 = 9$
- 60. $x^2 - 16 = 0$
- 61. $(x - 1)(y + 2) = 0$
- 62. $(2x + 9)(5 - y) = 0$
- 63. $x^2 = x$
- 64. $y^2 - 3y - 10 = 0$
- 65. $x^2 + y^2 = 0$

- 66. $x^2 + y^2 = 4$
- 67. $x^2 + 4y^2 = 16$
- 68. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
- 69. $x^2 - y^2 = 1$
- 70. $y^2 - x^2 = 9$

En los problemas 71 al 74, utilice la simetría para completar la gráfica.

- 71. La gráfica es simétrica con respecto al eje y .
- 72. La gráfica es simétrica con respecto al eje x .

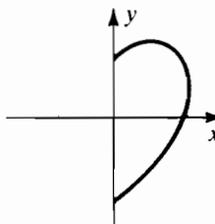


FIGURA 19

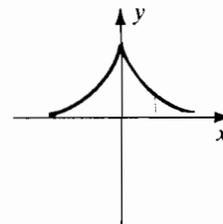


FIGURA 20

- 73. La gráfica es simétrica con respecto al origen.
- 74. La gráfica es simétrica con respecto al eje y .

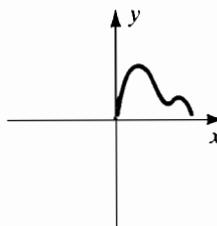


FIGURA 21

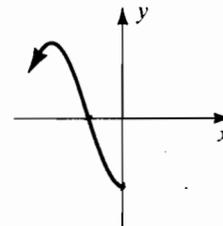


FIGURA 22

3.2 Fórmula de la distancia y de la circunferencia

En esta sección desarrollamos una fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cuyas coordenadas se conocen. Luego aplicamos esta fórmula al problema de encontrar la ecuación de la circunferencia.

FORMULA DE LA DISTANCIA

Suponga que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos que no están en una línea vertical ni en una horizontal. Luego, como lo muestra la figura 23, P_1 , P_2 , y $P_3(x_1, y_2)$

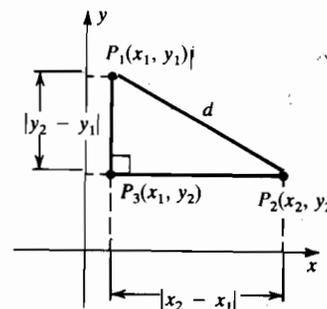


FIGURA 23

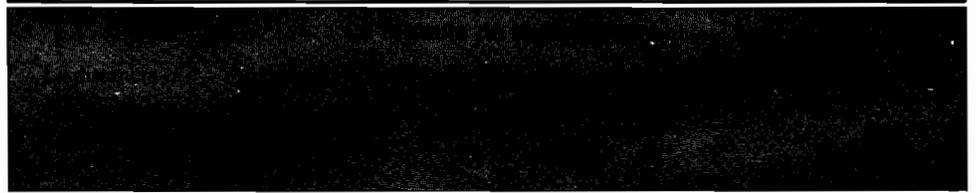
son vértices de un triángulo rectángulo. La longitud del lado $P_3 P_2$ es $|x_2 - x_1|$, y la longitud del lado $P_1 P_3$ es $|y_2 - y_1|$. Si denotamos la longitud de $P_1 P_2$ con d , tenemos

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \quad (1)$$

del teorema de Pitágoras. Puesto que el cuadrado de cualquier número real es igual al cuadrado de su valor absoluto, podemos quitar los signos de valor absoluto en (1). Se deduce, entonces, de (1) que

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A pesar de que derivamos esta ecuación para dos puntos que no están sobre una recta vertical o una horizontal, se aplica también en estos casos.



Puesto que $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$, no importa qué punto se utilice primero en la fórmula de la distancia: esto es

$$d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$$

EJEMPLO 1

Halle la distancia entre $A(8, -5)$ y $B(3, 7)$.

Solución

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(3 - 8)^2 + (7 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

La distancia se ilustra en la figura 24.

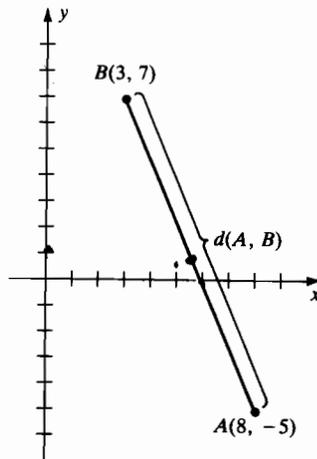


FIGURA 24

EJEMPLO 2

Determine si los puntos $P_1(7, 1)$, $P_2(-4, -1)$ y $P_3(4, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución. Por la geometría plana sabemos que un triángulo es un triángulo rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del lado restante. Ahora, por la fórmula de la distancia, encontramos

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(-4 - 7)^2 + (-1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(P_2, P_3) &= \sqrt{(4 - (-4))^2 + (5 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(P_3, P_1) &= \sqrt{(7 - 4)^2 + (1 - 5)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Ya que

$$\begin{aligned} [d(P_3, P_1)]^2 + [d(P_2, P_3)]^2 &= 25 + 100 \\ &= 125 \\ &= [d(P_1, P_2)]^2 \end{aligned}$$

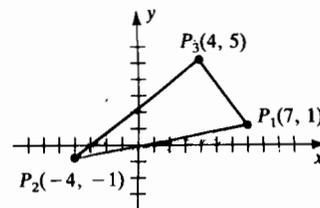


FIGURA 25

se deduce que P_1, P_2 y P_3 son los vértices de un triángulo rectángulo con un ángulo recto en P_3 (véase figura 25).

CIRCUNFERENCIAS

La fórmula de la distancia puede utilizarse para hallar una ecuación del conjunto de todos los puntos equidistantes del punto dado.

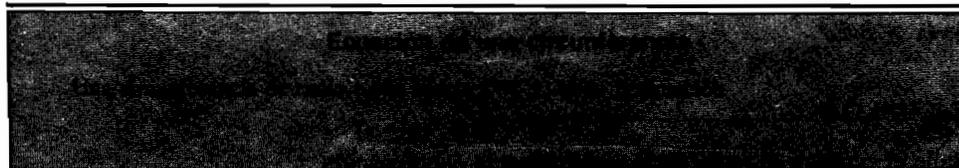
DEFINICION 1

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos P en el plano que están a una distancia fija r dada, llamada **radio**, de un punto fijo C dado, llamado **centro**.

En la figura 26 hemos graficado una circunferencia de radio r centrada en el punto $C(h, k)$. Por la definición 1, sabemos que un punto $P(x, y)$ está en esta circunferencia si y sólo si

$$d(P, C) = r, \quad \text{o} \quad \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

Ya que $(x - h)^2 + (y - k)^2$ es siempre no negativo, obtenemos una ecuación equivalente cuando ambos lados se elevan al cuadrado.



La ecuación (3) se llama **forma estándar** de la ecuación de una circunferencia. Cuando $h = 0$ y $k = 0$, vemos por la ecuación (3) que la ecuación de una circunferencia de radio r con centro en el origen está dada por

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(Véase figura 27).

EJEMPLO 3

Halle el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$.

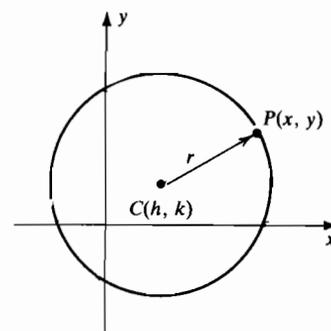


FIGURA 26

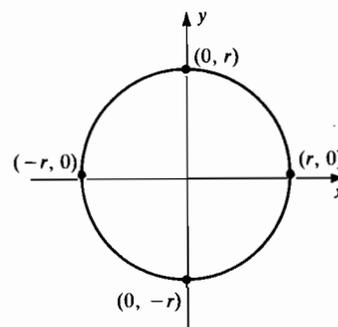


FIGURA 27

Solución. Si escribimos esta ecuación de la forma estándar (3),

$$(x - 3)^2 + (y - (-2))^2 = 7^2$$

vemos que $h = 3$, $k = -2$ y $r = 7$. Por tanto, la circunferencia está centrada en $(3, -2)$ y tiene radio 7.

EJEMPLO 4 _____

Halle la ecuación de la circunferencia centrada en $C(-5, 4)$ con radio $\sqrt{2}$.

Solución. Utilizando la forma estándar (3) con $h = -5$, $k = 4$ y $r = \sqrt{2}$, obtenemos

$$(x - (-5))^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{2})^2$$

o
$$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 2$$

EJEMPLO 5 _____

Halle la ecuación de la circunferencia con centro en $C(4, 3)$ que pasa por $P(1, 4)$.

Solución. Identificando $h = 4$ y $k = 3$, tenemos por (3)

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = r^2 \quad (4)$$

Ya que $P(1, 4)$ se localiza en la circunferencia (véase figura 28), sus coordenadas deben satisfacer (4). Así,

$$(1 - 4)^2 + (4 - 3)^2 = r^2, \quad \text{o} \quad 10 = r^2$$

y así, la ecuación en la forma estándar es

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

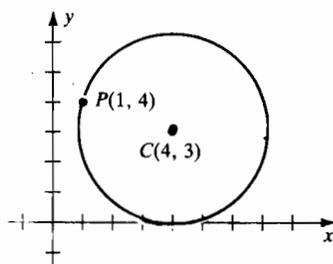


FIGURA 28

En el siguiente ejemplo utilizamos la técnica de *completar el cuadrado* para hallar el centro y el radio de una circunferencia. Recuerde de la sección 2.3 que añadiendo $(B/2)^2$ a la expresión $x^2 + Bx$ da como resultado $x^2 + Bx + (B/2)^2$, el cual es el cuadrado perfecto de $(x + B/2)^2$.

EJEMPLO 6 _____

Halle el centro y el radio de la circunferencia con ecuación

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0$$

Solución. Podemos hallar el centro y el radio de la circunferencia reescribiendo la ecuación dada de la forma estándar $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Reorganizando términos, tenemos

$$(x^2 + 10x + \frac{100}{4}) + (y^2 - 2y + \frac{4}{4}) = -17$$

Ahora completamos el cuadrado de cada expresión en paréntesis, añadiendo $(10/2)^2$ en la primera y $(-2/2)^2$ en la segunda. Note que debemos tener cuidado al añadir estos números en ambos lados de la ecuación.

$$[x^2 + 10x + (\frac{10}{2})^2] + [y^2 - 2y + (\frac{-2}{2})^2] = -17 + (\frac{10}{2})^2 + (\frac{-2}{2})^2$$

$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 9$$

$$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

De esta ecuación se deduce que la circunferencia está centrada en $(-5, 1)$ y tiene radio 3 (véase figura 29).

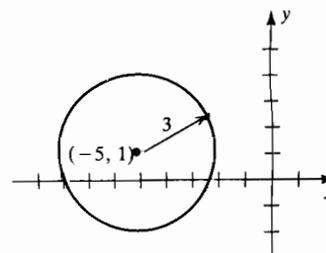


FIGURA 29

EJEMPLO 7

Halle el centro y el radio de una circunferencia con ecuación

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y + 2 = 0$$

Solución. Primero reorganizamos la ecuación como

$$(3x^2 - 18x \quad) + (3y^2 + 6y \quad) = -2$$

Luego, dividimos ambos lados de la ecuación por 3 para que el coeficiente de x^2 y y^2 sea 1 para cada uno:

$$(x^2 - 6x \quad) + (y^2 + 2y \quad) = -\frac{2}{3}$$

Completando el cuadrado nos da

$$[x^2 - 6x + (\frac{-6}{2})^2] + [y^2 + 2y + (\frac{2}{2})^2] = -\frac{2}{3} + (\frac{-6}{2})^2 + (\frac{2}{2})^2$$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{2}{3} + 9 + 1$$

o
$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = \frac{28}{3}$$

Esta es la ecuación de una circunferencia con centro $(3, -1)$ y radio $\sqrt{\frac{28}{3}}$.

Podemos ver que no todas las ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

necesariamente representan una circunferencia. (Véanse problemas 39 y 40).

FORMULA DEL PUNTO MEDIO

En la sección 1.2 vimos que el punto medio de un segmento de recta entre dos números a y b de la recta numérica es el *promedio* $(a + b)/2$. En el plano xy , cada coordenada del punto medio M de un segmento de recta que une dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es el promedio de las coordenadas correspondientes de los extremos.

Para probar esto, podemos ver en la figura 30 que los triángulos P_1CM y MDP_2 son congruentes, puesto que los ángulos correspondientes son iguales y $d(P_1, M) = d(M, P_2)$. Por tanto,

$$d(P_1, C) = d(M, D)$$

o
$$y - y_1 = y_2 - y$$

Despejando y en la última ecuación, da

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

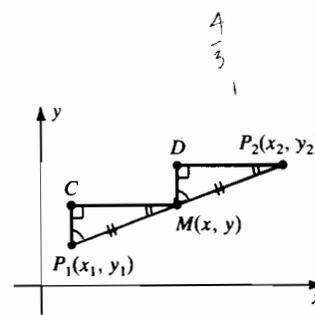


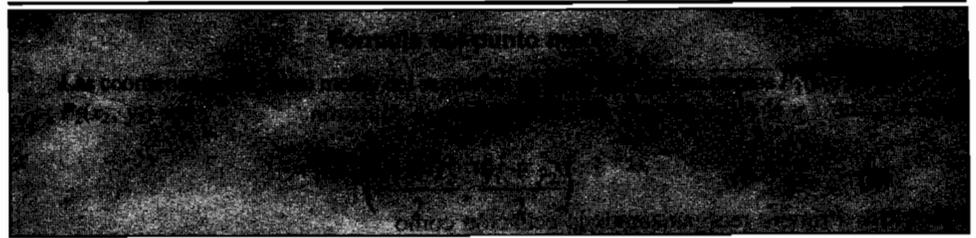
FIGURA 30

De la misma manera $d(C, M) = d(D, P_2)$

de modo que $x - x_1 = x_2 - x$

y, por tanto $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Resumimos los resultados.



EJEMPLO 8

Halle las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une $A(-2, 5)$ y $B(4, 1)$.

Solución. Según la fórmula del punto medio (5), las coordenadas del punto medio están dadas por

$$\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{5 + 1}{2} \right)$$

ó $(1, 3)$. Este punto se señala en la figura 31.

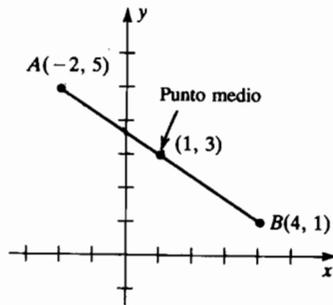


FIGURA 31

EJEMPLO 9

Halle una ecuación de la circunferencia con los puntos $A(2, -3)$ y $B(6, 1)$ en los extremos de un diámetro.

Solución. El centro del círculo es el punto medio del diámetro que une A y B . Así, según la fórmula del punto medio (5), las coordenadas del centro son

$$\left(\frac{2 + 6}{2}, \frac{-3 + 1}{2} \right) = (4, -1)$$

El radio es la distancia desde el centro $(4, -1)$ hasta el punto $(2, -3)$ en la circunferencia:

$$r = \sqrt{(4 - 2)^2 + [-1 - (-3)]^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

Por tanto, una ecuación de la circunferencia es

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 8$$

(Véase figura 32).

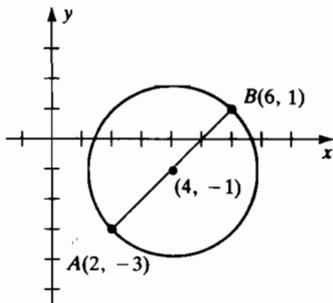


FIGURA 32

EJERCICIO 3.2

En los problemas 1 al 6, halle la distancia entre los puntos.

1. $A(1, 2), B(-3, 4)$
2. $A(-1, 3), B(5, 0)$
3. $A(2, 4), B(-4, -4)$
4. $A(-12, -3), B(-5, -7)$
5. $A(-\frac{3}{2}, 1), B(\frac{5}{2}, -2)$
6. $A(-\frac{5}{3}, 4), B(-\frac{2}{3}, -1)$

En los problemas 7 al 10, determine si los puntos A, B y C son vértices de un triángulo rectángulo.

7. $A(8, 1), B(-3, -1), C(10, 5)$
8. $A(-2, -1), B(8, 2), C(1, -11)$
9. $A(2, 8), B(0, -3), C(6, 5)$
10. $A(4, 0), B(1, 1), C(2, 3)$
11. Determine si los puntos $A(0, 0), B(3, 4)$ y $C(7, 7)$ son vértices de un triángulo isósceles.
12. Encuentre todos los puntos en el eje y que estén a 5 unidades del punto $(4, 4)$.
13. Considere el segmento de recta que une $A(-1, 2)$ y $B(3, 4)$.
 - (a) Halle una ecuación que exprese el hecho de que un punto $P(x, y)$ es equidistante de A y B .
 - (b) Describa geoméricamente el conjunto de puntos descritos por la ecuación de la parte (a).
14. Utilice la fórmula de la distancia para determinar si los puntos $A(-1, -5), B(2, 4)$ y $C(4, 10)$ se localizan en una línea recta.

En los problemas 15 al 20, halle el punto medio del segmento de recta que une A y B .

15. $A(4, 1), B(-2, 4)$
16. $A(\frac{2}{3}, 1), B(\frac{7}{3}, -3)$
17. $A(-1, 0), B(-8, 5)$
18. $A(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), B(-\frac{5}{2}, 1)$
19. $A(2a, 3b), B(4a, -6b)$
20. $A(x, x), B(-x, x + 2)$

En los problemas 21 al 24, halle B si M es el punto medio del segmento de recta que une A y B .

21. $A(-2, 1), M(\frac{3}{2}, 0)$
22. $A(4, \frac{1}{2}), M(7, -\frac{5}{2})$
23. $A(5, 8), M(-1, -1)$
24. $A(-10, 2), M(5, 1)$
25. Halle la distancia desde el punto medio del segmento de recta que une $A(-1, 3)$ y $B(3, 5)$ hasta el punto medio del segmento de recta que une $C(4, 6)$ y $D(-2, -10)$.
26. Halle todos los puntos en el eje x que estén a 3 unidades del punto medio del segmento de recta que une $A(5, 2)$ y $B(-5, -6)$.
27. Los puntos $A(1, 0), B(5, 0), C(4, 6)$ y $D(8, 6)$ son vértices de un paralelogramo. Demuestre que las diagonales del paralelogramo se bisecan entre sí.

28. Halle los puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(y_2, y_2)$, y $P_3(x_3, y_3)$ en el segmento de recta que une $A(3, 6)$ y $B(5, 8)$, que divide el segmento de recta en 4 partes iguales.

En los problemas 29 al 38 halle el centro y el radio de la circunferencia dada.

29. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 49$
30. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$
31. $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 5$
32. $(x + 5)^2 + (y + 8)^2 = \frac{1}{4}$
33. $x^2 + y^2 + 8y = 0$
34. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
35. $x^2 + y^2 - 18x - 6y - 10 = 0$
36. $x^2 + y^2 - 16y + 3x + 63 = 0$
37. $8x^2 + 8y^2 + 16x + 64y - 40 = 0$
38. $5x^2 + 5y^2 + 25x + 100y + 50 = 0$

En los problemas 39 y 40, demuestre que la ecuación dada no representa una circunferencia.

39. $x^2 + y^2 + 2y + 9 = 0$
40. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y + 7 = 0$

En los problemas 41 al 50 halle una ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

41. Centro $(0, 0)$, radio 1
42. Centro $(1, -3)$ radio 5
43. Centro $(0, 2)$, radio $\sqrt{2}$
44. Centro $(-9, -4)$, radio $\frac{7}{2}$
45. Extremos de un diámetro en $(-1, 4)$ y $(3, 8)$
46. Extremos de un diámetro en $(4, 2)$ y $(-3, 5)$
47. Centro $(0, 0)$, pasando por $(-1, -2)$
48. Centro $(4, -5)$, pasando por $(7, -3)$
49. Centro $(5, 6)$, tangente al eje x
50. Centro $(-4, 3)$, tangente al eje y

En los problemas 51 al 56, grafique la relación dada

51. $x^2 + y^2 \geq 9$
52. $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 \leq 25$
53. $1 < x^2 + y^2 < 4$
54. $x^2 + y^2 > 2y$
55. $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 0$
56. $x^2 = -y^2$

57. Las ciudades de Kansas y Chicago no están conectadas directamente por medio de una autopista interestatal, pero cada ciudad está conectada con St. Louis y Des Moines (véase figura 33). Des Moines está aproximadamente a 40 millas al oriente y a 180 millas al norte de la ciudad de Kansas, St. Louis está aproximadamente a 230 millas al oriente y 40 millas al sur de la ciudad de Kansas, y Chicago está aproximadamente a 360 millas al oriente y 200 millas al norte de la ciudad de Kansas. Suponga que esta parte del occidente medio es un plano liso y que las autopistas que conectan las ciudades son líneas rectas. ¿Cuál ruta de la ciudad de Kansas a Chicago, que atraviese a St. Louis o Des Moines es más corta?

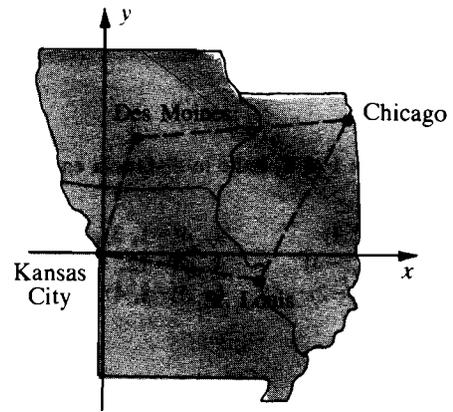


FIGURA 33

3.3 Ecuaciones de la recta

PENDIENTE

Cualquier par de puntos distintos en el plano determina una recta única. Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos tales que $x_1 \neq x_2$, entonces el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (6)$$

se llama **pendiente** de la recta determinada por estos dos puntos. Es común llamar a $y_2 - y_1$ **incremento en y** y a $x_2 - x_1$ **incremento en x**. La pendiente de una recta es, entonces,

$$m = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x} \quad (7)$$

En la figura 34 comparamos las gráficas de las rectas con pendientes positivas, negativas, cero e indefinidas. En la figura 34(a) vemos que una recta con pendiente positiva ($m > 0$) *crece* a medida que x aumenta. En la figura 34(b) vemos que una recta con pendiente negativa ($m < 0$) *decrece* a medida que x aumenta. Una recta con pendiente cero ($m = 0$) es horizontal (véase figura 34(c)).

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos en una recta vertical, entonces, $x_1 = x_2$ y entonces $x_2 - x_1 = 0$. Por tanto, la pendiente de esta recta es indefinida (véase figura 34(d)).

En general, puesto que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

no importa a cuál de los dos puntos se llame $P_1(x_1, y_1)$ y a cuál se llame $P_2(x_2, y_2)$ en (6).

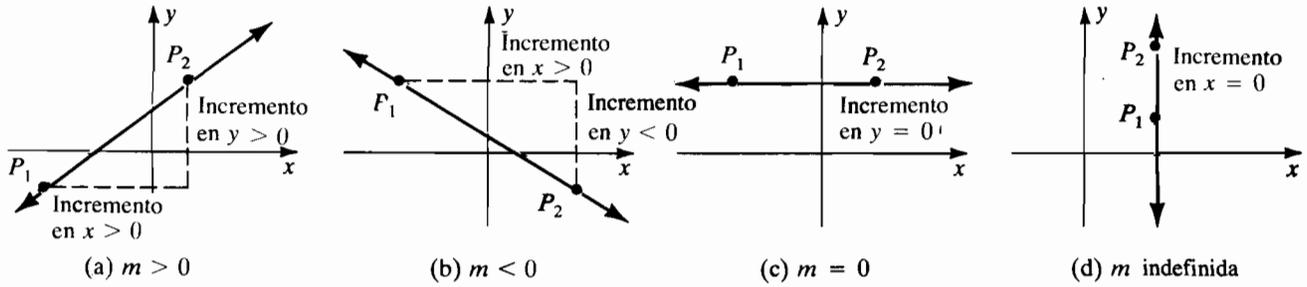


FIGURA 34

Cualquier par de puntos distintos en una recta determinará la misma pendiente. Para probar esto, considere los triángulos semejantes $P_1Q_1P_2$ y $P_3Q_2P_4$ mostrados en la figura 35. Puesto que sabemos que razones de los lados correspondientes son iguales, tenemos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

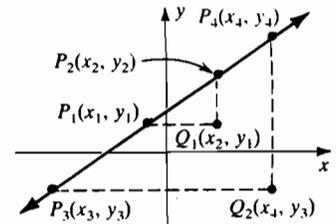


FIGURA 35

Por tanto, la pendiente de la recta es independiente de la escogencia de puntos en la recta. A pesar de que este argumento se basó en la colocación de P_1, P_2, P_3 y P_4 sobre la recta, la discusión sigue siendo válida para cualquier colocación de estos 4 puntos.

EJEMPLO 1

Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 6)$ y $(3, -4)$. Grafique la recta.

Solución. Sean $(-2, 6)$ el punto $P_1(x_1, y_1)$ y $(3, -4)$ el punto $P_2(x_2, y_2)$. La pendiente de la recta a través de estos puntos es

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 6}{3 - (-2)} \\ &= \frac{-10}{5} = -2 \end{aligned}$$

Por tanto, la pendiente es -2 y la recta que pasa por P_1 y P_2 se muestra en la figura 36.

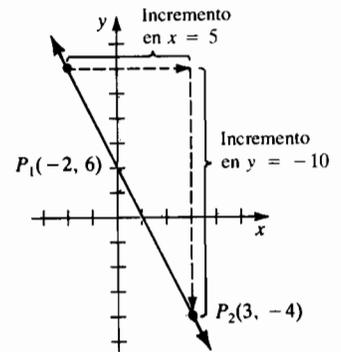


FIGURA 36

Note en el ejemplo 1 que si hubiéramos asignado a $P_1(x_1, y_1)$ el punto $(3, -4)$ y a $P_2(x_2, y_2)$ el punto $(-2, 6)$, entonces la ecuación (6) habría dado la misma pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - (-4)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

EJEMPLO 2

Grafique la recta que pasa por el par de puntos dado y determine su pendiente.

- (a) $(-4, -1)$ y $(5, 2)$
- (b) $(-3, 3)$ y $(4, -4)$
- (c) $(-5, 2)$ y $(-5, -4)$

Solución. En la figura 37 se marcan los puntos y se grafican las rectas. Las pendientes se calculan utilizando (6).

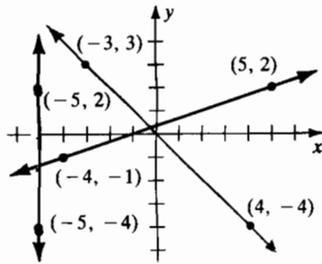


FIGURA 37

$$(a) m = \frac{2 - (-1)}{5 - (-4)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$(b) m = \frac{-4 - 3}{4 - (-3)} = \frac{-7}{7} = -1$$

(c) Puesto que $(-5, 2)$ y $(-5, -4)$ determinan una recta vertical, la pendiente es indefinida.

EJEMPLO 3

Grafique la recta con pendiente $-\frac{5}{3}$ que pasa a través del punto $P(-2, 3)$.

Solución. Primero escribimos la pendiente como $-5/3$. Luego, utilizando el punto $P(-2, 3)$ como vértice, construimos un triángulo rectángulo moviendo 3 unidades a la *derecha* (ya que el incremento en x es $+3$) hasta el punto $Q(1, 3)$. De Q nos trasladamos 5 unidades hacia *abajo* (ya que el incremento en y es -5) hasta el punto $R(1, -2)$, el cual es otro punto de la recta trazado en la figura 38(a).

Alternativamente, podríamos haber considerado la pendiente como $5/(-3)$ y haber construido el triángulo moviendo 3 unidades a la *izquierda* (ya que el incremento en x es -3) hasta el punto $S(-5, 3)$. De S movemos 5 unidades hacia *arriba* (ya que el incremento en y es $+5$) hasta el punto $T(-5, 8)$. La recta se grafica ahora pasando por P y T , como se muestra en la figura 38(b).

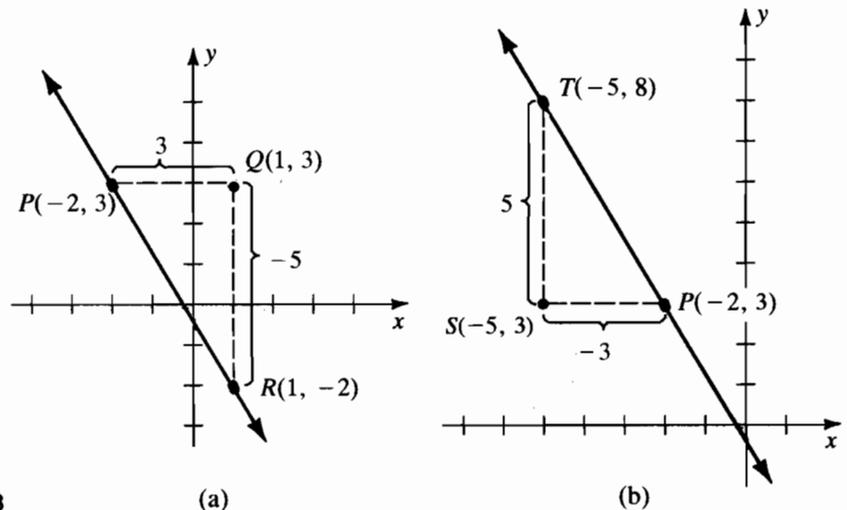


FIGURA 38

ECUACIONES DE RECTAS

Ahora estamos en condiciones de encontrar una ecuación de una recta L . Para comenzar, suponga que la recta L mostrada en la figura 39 tiene pendiente m y pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$. Si $P(x, y)$ denota cualquier punto sobre L con $x \neq x_1$, entonces podemos escribir según (6).

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación puede reescribirse de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (8)$$

Note que las coordenadas de todos los puntos sobre L , incluyendo $P_1(x_1, y_1)$, satisfacen (8). Al contrario, si las coordenadas de un punto satisfacen (8), entonces el punto debe localizarse sobre L . Puesto que (8) se determinó conociendo la pendiente y un punto, decimos que es la **forma punto-pendiente** para la ecuación de una recta o, simplemente:

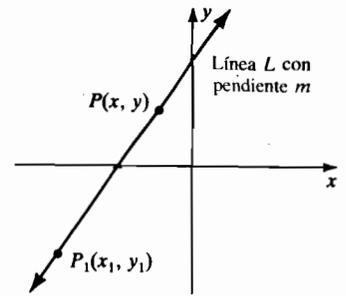


FIGURA 39

EJEMPLO 4 _____

Halle una ecuación de la recta con pendiente 4 que pasa por $(-\frac{1}{2}, 2)$.

Solución. Siendo $m = 4$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, y $y_1 = 2$, obtenemos de la ecuación (9) la ecuación de punto-pendiente

$$y - 2 = 4[x - (-\frac{1}{2})] \quad \text{--- } 4x + \frac{1}{2}$$

Simplificando, nos da

$$y - 2 = 4(x + \frac{1}{2}), \quad \text{o} \quad y = 4x + 4$$

EJEMPLO 5 _____

Halle una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4, 3)$ y $(-2, 5)$.

Solución. Primero, calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

$$m = \frac{5 - 3}{-2 - 4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Luego, según (9) con $x_1 = 4$ y $y_1 = 3$, tenemos

$$\begin{aligned} y - 3 &= -\frac{1}{3}(x - 4) \\ 3y - 9 &= -x + 4 \\ x + 3y - 13 &= 0 \end{aligned}$$

o despejando y ,

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$$

Debemos verificar que se obtendrá la misma ecuación si las coordenadas x y y del punto $(-2, 5)$ se utilizan para x_1 y y_1 en (9).

Cualquier recta no vertical debe cortar el eje y . Si este punto de intersección es $(0, b)$, entonces b es el intersección en y de la recta. Se puede obtener una ecuación de la recta con pendiente m e intersección y en b según (9). Sustituyendo $x_1 = 0$ y $y_1 = b$ da

$$y - b = m(x - 0)$$

Esta ecuación se simplifica en lo siguiente.

137

EJEMPLO 6

Halle una ecuación de la recta con pendiente $\frac{2}{5}$ e intersección y en -3 .

Solución. Utilizando $m = \frac{2}{5}$ y $b = -3$ en la ecuación (10), tenemos

$$y = \frac{2}{5}x + (-3), \quad \text{o} \quad y = \frac{2}{5}x - 3$$

Puede demostrarse también que la gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = mx + b$ es una recta con pendiente m e intersección b en el eje y .

RECTAS HORIZONTALES Y VERTICALES

Vimos en la figura 34(c) que una recta horizontal tiene pendiente $m = 0$. Por lo tanto, se puede obtener, según (9), la ecuación de una recta horizontal que pasa por un punto (a, b) :

$$y - b = 0(x - a), \quad \text{o} \quad y = b$$

Una recta vertical que pasa por (a, b) tiene pendiente indefinida, pero todos los puntos de la recta tienen la misma coordenada x . Esta observación lleva al siguiente resultado.

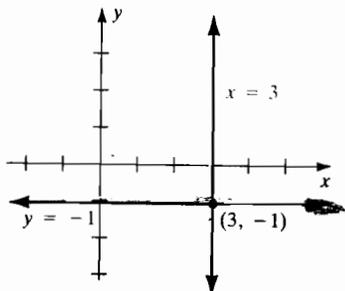


FIGURA 40

EJEMPLO 7

Halle ecuaciones para las rectas horizontales y verticales que pasan por $(3, -1)$. Grafique las rectas.

Solución. Cualquier punto de la recta vertical que pasa por $(3, -1)$ tiene a 3 como coordenada x . De la misma manera, cualquier punto de la recta horizontal que pasa por $(3, -1)$ tiene coordenada -1 en y . La ecuación de esta recta es $y = -1$. Ambas rectas se grafican en la figura 40.

ECUACION LINEAL

Las ecuaciones (9), (10), (11) y (12) son casos especiales de la **ecuación lineal general**

$$ax + by + c = 0 \quad (13)$$

donde a y b no son ambos cero. Y, viceversa, cuando a y b no son ambos cero, la gráfica de (13) es una recta. Por ejemplo, si $b \neq 0$, entonces despejando y en (13) da la ecuación pendiente-intersección $y = (-a/b)x + (-c/b)$. Sin embargo, si $b = 0$ y $a \neq 0$, la ecuación resultante $x = -c/a$ representa una recta vertical.

EJEMPLO 8 _____

Halle la pendiente y el intersección en y de la recta $3x - 7y + 5 = 0$.

Solución. Despejamos y en la ecuación lineal:

$$\begin{aligned} 3x - 7y + 5 &= 0 \\ 7y &= 3x + 5 \\ y &= \frac{3}{7}x + \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Según (10), vemos que la pendiente de la recta es $m = \frac{3}{7}$ y el intersección en y es $b = \frac{5}{7}$.

Si los intersecciones en x y en y son diferentes, la gráfica de la recta puede dibujarse pasando por los puntos correspondientes sobre los ejes x y y .

EJEMPLO 9 _____

Grafique la recta $3x - 2y + 8 = 0$.

Solución. Primero establecemos que $x = 0$ para hallar el intersección en y :

$$\begin{aligned} 3(0) - 2y + 8 &= 0 \\ -2y + 8 &= 0 \\ 2y &= 8 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Luego establecemos que $y = 0$ para hallar el intersección en x :

$$\begin{aligned} 3x - 2(0) + 8 &= 0 \\ 3x + 8 &= 0 \\ 3x &= -8 \\ x &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

La gráfica, que se muestra en la figura 41, se dibuja pasando por $(0, 4)$ y $(-\frac{8}{3}, 0)$.

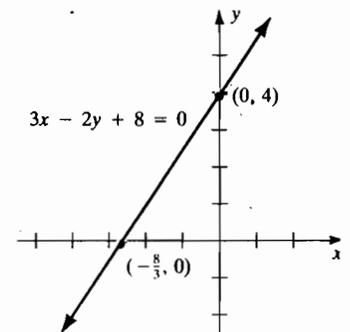
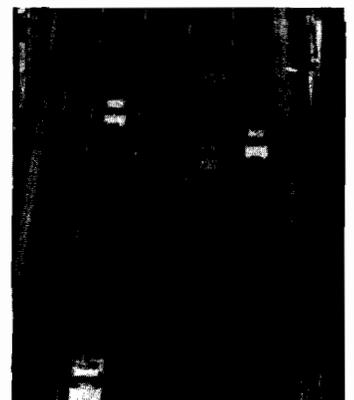


FIGURA 41

RECTAS PARALELAS

Dejamos como ejercicio probar el siguiente resultado sobre **rectas paralelas** (véase problema 57).



EJEMPLO 10 _____

Las ecuaciones

$$3x + y = 2 \quad \text{y} \quad 6x + 2y = 15$$

pueden escribirse de las formas pendiente-intersecto

$$y = -3x + 2 \quad \text{y} \quad y = -3x + \frac{15}{2}$$

respectivamente. Vemos que la pendiente de cada recta es -3 . Por tanto, las rectas son paralelas (véase figura 42).

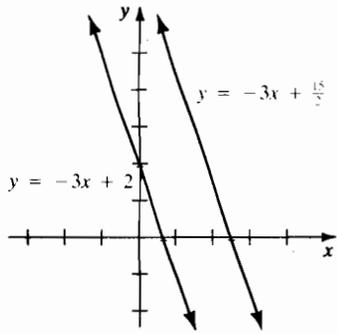


FIGURA 42

RECTAS PERPENDICULARES

Puede demostrarse que cuando dos rectas con pendientes definidas son *perpendiculares*, entonces sus pendientes son recíprocas y de signo contrario. (Véase problema 58).

EJEMPLO 11 _____

Halle la ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ que es perpendicular a la recta $4x - 3y + 6 = 0$. Grafique las rectas.

Solución. Expresamos la ecuación dada de la forma pendiente-intersecto de:

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 6 &= 0 \\ 3y &= 4x + 6 \\ y &= \frac{4}{3}x + 2 \end{aligned}$$

Según (10), sabemos que esta recta tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La pendiente de una recta perpendicular a ella será el recíproco negativo de $\frac{4}{3}$, ó $-\frac{3}{4}$. Por tanto, la recta que estamos buscando tiene pendiente $-\frac{3}{4}$ e intersección y en -3 . Su ecuación es

$$y = -\frac{3}{4}x - 3$$

y su gráfica es la recta de color de la figura 43.

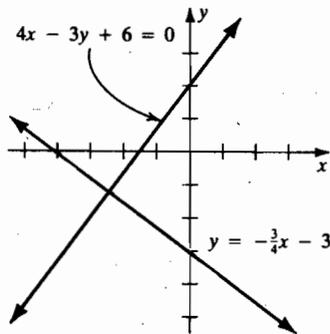


FIGURA 43

EJERCICIO 3.3 _____

En los problemas 1 al 6, halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

- | | |
|-----------------------|--|
| 1. $(3, -7), (1, 0)$ | 2. $(-4, -1), (1, -1)$ |
| 3. $(5, 2), (4, -3)$ | 4. $(1, 4), (6, -2)$ |
| 5. $(-1, 2), (3, -2)$ | 6. $(8, -\frac{1}{2}), (2, \frac{3}{2})$ |

En los problemas 7 al 12, grafique la recta que pasa por $(1, 2)$ con la pendiente dada.

- | | |
|------------------|--------------------|
| 7. $\frac{2}{3}$ | 8. $\frac{1}{10}$ |
| 9. 3 | 10. -2 |
| 11. -1 | 12. $-\frac{3}{2}$ |

En los problemas 13 al 30, halle una ecuación de la recta indicada.

13. Pasa por el punto (5, 6) con pendiente 2
14. Pasa por el punto (2, -2) con pendiente -1
15. Pasa por el punto (0, 4) con pendiente $\frac{1}{2}$
16. Pasa por los puntos (5, -6) y (4, 0)
17. Pasa por el punto (1, -3) con pendiente 4
18. Pasa por los puntos (2, 3) y (6, -5)
19. Pasa por los puntos (1, 8) y (1, -3)
20. Pasa por los puntos (0, 7) y (7, -2)
21. Pasa por los puntos (2, 2) y (-2, -2)
22. Pasa por los puntos (4, -3) con pendiente 0
23. Pasa por el punto (-3, 1) con pendiente $-\frac{2}{3}$
24. Pasa por los puntos (-2, 0) y (-2, 6)
25. Pasa por los puntos (0, -3) y (-1, 4)
26. Pasa por el punto (0, -5) con pendiente $\frac{1}{2}$
27. Pasa por el punto (0, 0) con pendiente m
28. Pasa por los puntos (0, 0) y (a, b)
29. Con intersección x en 7 e intersección y en -2
30. Con intersección x en -3 e intersección y en 5

En los problemas 31 al 36, halle la pendiente y el intersección en y de la recta dada.

- | | |
|---------------------------------|-----------------------|
| 31. $2x - 4y - 7 = 0$ | 32. $x + y + 1 = 0$ |
| 33. $-3x + y = 8$ | 34. $-4x - 2y = 0$ |
| 35. $\frac{1}{2}x - 3y + 2 = 0$ | 36. $ax + by + c = 0$ |

En los problemas 37 al 42, haga la gráfica de la recta dada.

- | | |
|------------------------|-----------------------------|
| 37. $3x - 4y + 12 = 0$ | 38. $\frac{1}{2}x - 3y = 3$ |
| 39. $2x - 3y = 9$ | 40. $-4x - 2y + 6 = 0$ |
| 41. $2x + 5y - 8 = 0$ | 42. $y = -\frac{2}{3}x + 1$ |
43. Halle la ecuación de la recta que pasa por (-2, 4) y es paralela a $3x + y - 2 = 0$.
 44. Halle la ecuación de la recta que pasa por (1, -3) y es paralela a $2x - 5y + 4 = 0$.
 45. Halle la ecuación de la recta que pasa por (2, -3) y es perpendicular a $x - 3y + 1 = 0$.
 46. Halle la ecuación de la recta que pasa por (0, -2) y es perpendicular a $3x + 4y + 5 = 0$.
 47. Halle la ecuación de la recta que pasa por (-5, 4) que es perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y (3, 7).
 48. Halle la ecuación de la bisectriz perpendicular del segmento de recta que une $(\frac{1}{2}, 10)$ y $(\frac{3}{2}, 4)$.
 49. Halle la ecuación de la recta L mostrada en la figura 44.
 50. Una recta tangente a una circunferencia en un punto P de la circunferencia es perpendicular a la recta que pasa por P y por el centro de la circunferencia. Halle la ecuación de la tangente L mostrada en la figura 45.

En los problemas 51 al 54, determine cuáles de las rectas dadas son paralelas entre sí y cuáles perpendiculares entre sí.

51. (a) $3x - 5y + 9 = 0$
(b) $5x = -3y$

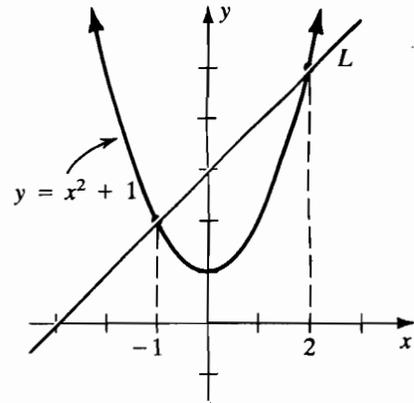


FIGURA 44

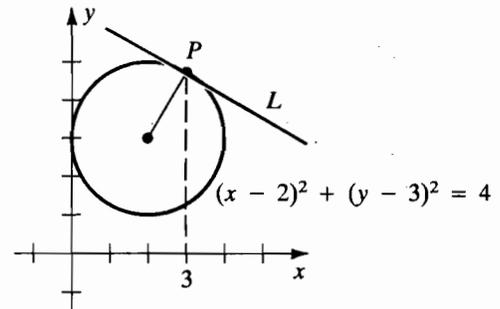


FIGURA 45

- (c) $-3x + 5y = 2$
- (d) $3x + 5y + 4 = 0$
- (e) $-5x - 3y + 8 = 0$
- (f) $5x - 3y - 2 = 0$
52. (a) $2x + 4y + 3 = 0$
(b) $2x - y = 2$
(c) $x + 9 = 0$
(d) $x = 4$
(e) $y - 6 = 0$
(f) $-x - 2y + 6 = 0$
53. (a) $3x - y - 1 = 0$
(b) $x - 3y + 9 = 0$
(c) $3x + y = 0$
(d) $x + 3y = 1$
(e) $6x - 3y + 10 = 0$
(f) $x + 2y + 8 = 0$
54. (a) $y + 5 = 0$
(b) $4x + 6y - 3 = 0$
(c) $x = 7$
(d) $12x - 9y + 7 = 0$
(e) $2x - 3y - 2 = 0$
(f) $3x + 4y - 11 = 0$

En los problemas 55 y 56, use la gráfica de la recta dada para calcular su pendiente.

55.

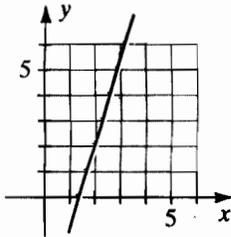


FIGURA 46

56.

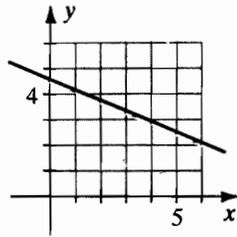


FIGURA 47

57. Pruebe que las rectas no verticales L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si tienen pendientes iguales. [Sugerencia: use la figura 48 y triángulos semejantes].

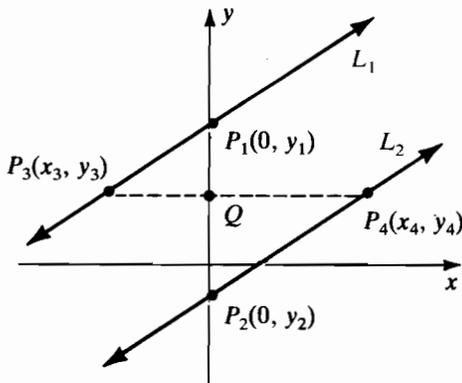


FIGURA 48

58. Pruebe que dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario. [Sugerencia: utilice la figura 49 y el teorema de Pitágoras].

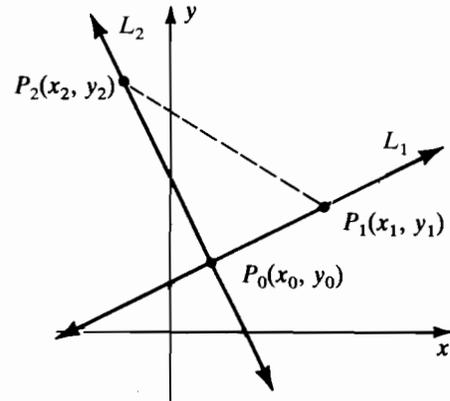


FIGURA 49

59. En 1897 el profesor de física A. E. Dolbear propuso que la temperatura T , en grados Fahrenheit, en un termómetro de "cricket" (o de grillo) está dada por

$$T = \frac{1}{4}x + 40$$

donde x es el número de chillidos del grillo por minuto. Si el número de chillidos del grillo por minuto se aumenta en 10, halle el correspondiente aumento de temperatura.

3.4 Funciones y notación de funciones

DEFINICION DE FUNCION

Al usar personas y objetos del mundo que nos rodea, es fácil establecer una *regla de correspondencia* que asocie o haga parejas de los miembros de un grupo con los miembros de otro. Por ejemplo, para cada nombre que aparece en el directorio de Los Angeles hay un número, a cada bebé le corresponde una madre, a cada auto registrado en el estado de California le corresponde un número de placa, a cada libro le corresponde un autor, a cada lanzador de los Dodgers le corresponde un registro de partidos ganados y perdidos, etc. En matemáticas estamos interesados en una clase de correspondencia muy especial, llamada función.

DEFINICION 2

Una **función** de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que le asigna a cada elemento x en X uno y sólo un elemento y en Y . El conjunto X se llama **dominio** de la función.

A menudo utilizamos un diagrama, como el de la figura 50 para ilustrar la correspondencia de todos los elementos del conjunto X con algunos o todos los elementos del conjunto Y . La figura 50 indica también la característica fundamental de una función: a cada elemento x en el conjunto X le corresponde un *único* elemento y en el conjunto Y .

En el resto de este capítulo asumiremos que tanto X como Y son subconjuntos del conjunto R de números reales.

EJEMPLO 1

- (a) La tabla (a), que se muestra aquí, define una regla de correspondencia entre los números del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y los números del conjunto $\{5, 7, 9, 11, 13\}$. Esta correspondencia es una función, ya que uno y sólo un número x se asocia con un número y . El conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ es el dominio de la función. Observe que apareamos todos los elementos de X con sólo algunos de los elementos del conjunto $Y = \{5, 7, 9, 11, 13\}$.
- (b) La tabla (b) de la derecha define una regla de correspondencia entre el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y el conjunto $\{4, 5, 6, 7\}$. Esta correspondencia no es una función porque hay dos números —a saber, 6 y 7— en el conjunto $\{4, 5, 6, 7\}$ asociados con el número 3 en el conjunto $\{1, 2, 3\}$.

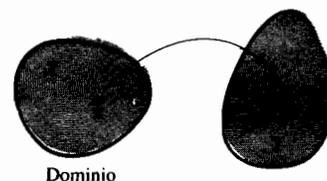


FIGURA 50

x	y
1	→ 5
2	→ 7
3	→ 9
4	→ 11

x	y
1	→ 4
2	→ 5
3	→ 6
	↘ 7

(a)

(b)

DEFINICION ALTERNATIVA

Puesto que una regla de correspondencia generará pares de elementos, podemos definir una función de una manera alternativa:

Una **función** es un conjunto de pares ordenados (x, y) tales que no hay dos pares ordenados diferentes del conjunto que tienen el mismo primer elemento.

EJEMPLO 2

El conjunto de pares ordenados $\{(1, 3), (3, 5), (6, 7), (8, 7)\}$ es equivalente a la correspondencia mostrada en la tabla adjunta. Puesto que a cada valor de x le corresponde uno y sólo un valor de y , el conjunto de pares ordenados representa una función. Observe que es perfectamente aceptable hacer corresponder el mismo valor de y a más de un valor de x .

x	y
1	→ 3
3	→ 5
6	→ 7
8	↗ 7

Una función usualmente se denota con una letra como f o g . Luego, podemos representar una función f de un conjunto X a uno Y por medio de la notación $f: X \rightarrow Y$ o por medio de un diagrama (véase figura 51). El número y del conjunto Y mostrado en la figura 51 que está asociado con x por medio de la función f se escribe

$$y = f(x)$$

lo cual se lee “ y es igual a f de x ”. También se dice que el número $f(x)$ es el **valor** de la función f en x o la **imagen** de x sobre f .

A menudo una función se define por medio de una fórmula explícita, por ejemplo $f(x) = x^2$. Si el dominio de f es el conjunto R de números reales, entonces $f: R \rightarrow R$, ya que el cuadrado de un número real es un número real. Para hallar valores de f , sustituimos números

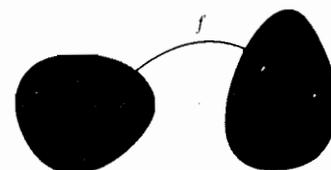


FIGURA 51

reales para x en la fórmula $f(x) = x^2$. Por ejemplo, el valor de la función que corresponde a $x = 3$ es

$$f(3) = (3)^2 = 9$$

y el valor de la función en $x = -4$ es

$$f(-4) = (-4)^2 = 16$$

En términos de notación de intervalo, el dominio de $f(x) = x^2$ se escribe como $(-\infty, \infty)$.

En términos exactos, la función f es la regla dada por $y = f(x)$, mientras que $f(x)$ es simplemente un número asociado con x . Sin embargo, frecuentemente ignoremos esta distinción y nos referiremos a la "función $f(x)$."

Una función también puede compararse con una computadora. Un número x es la *entrada* a la "máquina" y el **valor funcional** $f(x)$ correspondiente es el *resultado* obtenido después de que la máquina ha obrado sobre x , como lo ilustra la figura 52.

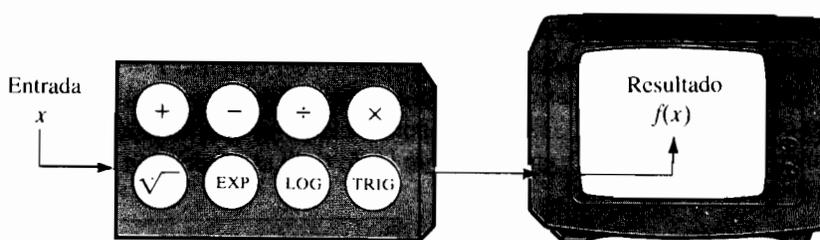


FIGURA 52

EJEMPLO 3

Halle los valores de $f(x) = \sqrt{x+4}$ correspondientes a $x = 0, 5, 8, \text{ y } 12$.

Solución. Esta "máquina" de funciones toma un valor de x tal como $x = 0$, le suma un número 4, y luego saca la raíz cuadrada de esta suma. Este proceso se ilustra en la figura 53. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2 \\ f(5) &= \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3 \\ f(8) &= \sqrt{8+4} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \text{y} \\ f(12) &= \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

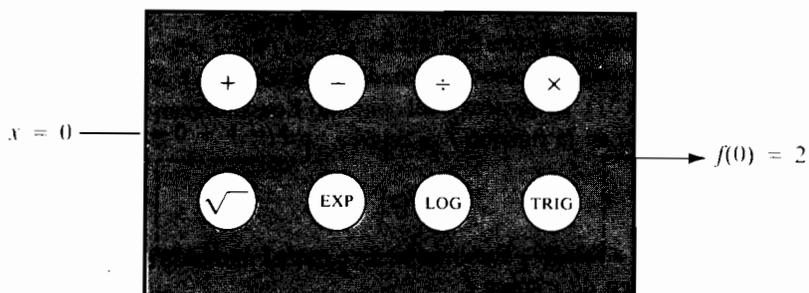


FIGURA 53

VARIABLES DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Puesto que el valor de la variable y en $y = f(x)$ siempre depende de la elección de x , decimos que y es la **variable dependiente**. Por el contrario, la elección de x es independiente de y , por tanto, x se llama **variable independiente**.

EJEMPLO 4 _____

Si $f(x) = x^2 - x + 1$, halle $f(-1)$, $f(x + h)$, y $f(x^2 + 1)$.

Solución. Reemplazamos la variable independiente x por -1 , $x + h$ y $x^2 + 1$ a su vez. Para enfatizar este reemplazo, escribimos la función original como

$$f(\quad) = (\quad)^2 - (\quad) + 1$$

Por tanto, para las entradas dadas, tenemos

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - (-1) + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x + h) &= (x + h)^2 - (x + h) + 1 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(x^2 + 1) &= (x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1) + 1 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 - 1 + 1 \\ &= x^4 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

El cociente diferencia

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

donde h es un número real diferente de cero, juega un papel muy importante en el estudio del cálculo.

EJEMPLO 5 _____

Si $f(x) = x^2 - x + 1$ y $h \neq 0$, halle

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

y simplifique.

Solución. Según el ejemplo 4, tenemos

$$f(x + h) = x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 1$$

y entonces

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= (x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= 2xh + h^2 - h \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{2xh + h^2 - h}{h} \\ &= \frac{h(2x + h - 1)}{h} \\ &= 2x + h - 1\end{aligned}$$

RANGO

En nuestra analogía con la máquina, el dominio de una función es el conjunto de todas las entradas reales que dan resultados reales. El conjunto de resultados se llama *rango* de la función. Formalmente, definimos el **rango** de una función f con dominio X como el resultado $\{f(x) \mid x \in X\}$. Por ejemplo, el rango de la función $f(x) = x^2$ es el conjunto de números reales no negativos.

Cuando una función se define por medio de una fórmula,

se considera que el dominio es el conjunto de números reales para los cuales la fórmula tiene sentido en el sistema de los números reales.

A menudo a este conjunto se denomina *dominio implícito o natural* de la función. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos.

EJEMPLO 6 _____

Halle el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+4}$.

Solución. Puesto que el radicando $x+4$ debe ser no negativo, el dominio se determina por medio de la inequación $x+4 \geq 0$; esto es, el dominio es el conjunto de $\{x \mid x \geq -4\}$. Utilizando notación de intervalo, escribimos el dominio como $[-4, \infty)$.

EJEMPLO 7 _____

Halle el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Solución. Un cociente de dos números reales es un número real a menos que el denominador sea cero. Por tanto, el dominio de la función f consiste en todos los números reales x *excepto* los que satisfacen

$$x^2 - 4 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x = 2$ y $x = -2$. Por tanto, el dominio de la función es el conjunto $\{x \mid x \neq \pm 2\}$.

EJEMPLO 8 _____

El dominio de la función

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

es el conjunto R de números reales, puesto que no hay número real x para el cual $x^2 + 4 = 0$.

EJEMPLO 9

Halle el dominio y el rango de $g(x) = 5 + \sqrt{x - 3}$.

Solución. El dominio, determinado por el requerimiento $x - 3 \geq 0$, es $\{x \mid x \geq 3\}$. Puesto que $\sqrt{x - 3} \geq 0$ para $x \geq 3$, tenemos $5 + \sqrt{x - 3} \geq 5$ para estos mismos valores de x . Por tanto, el rango de g es $\{y \mid y \geq 5\}$.

Como lo ilustra el siguiente ejemplo, el problema de determinar si un número simple r está en el rango de la función $y = f(x)$, es equivalente a resolver la ecuación $f(x) = r$.

EJEMPLO 10

Determine si 7 está en el rango de $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

Solución. El dominio de f es el intervalo $[1, \infty)$. Ahora, resolviendo $f(x) = 7$ da

$$\begin{aligned} \sqrt{x - 1} &= 7 \\ x - 1 &= 49 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Por tanto, el número 7 está en el rango de f , ya que 50 está en su dominio y

$$\begin{aligned} f(50) &= \sqrt{50 - 1} \\ &= \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Una regla que defina una función puede incluir más de una fórmula. Una función definida de esta manera se llama **función definida a trozos**. Por ejemplo,

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

no son dos funciones sino una función en la cual la regla se da en dos partes o trozos. En este caso, una parte se utiliza en los números reales negativos y la otra en los números reales no negativos. Por ejemplo, puesto que -4 es negativo, la regla indica que elevando al cuadrado el número:

$$g(-4) = (-4)^2 = 16$$

y puesto que 6 es positivo, le sumamos 1:

$$g(6) = 6 + 1 = 7$$

FUNCIONES CONSTANTES

Si c representa un elemento de cualquier conjunto, entonces a la función f definida por $f(x) = c$ para todos los x del dominio de f se llama **función constante**. Por ejemplo, suponga que el dominio de f es el conjunto R de números reales y $f(x) = 5$. Entonces,

$$f(0) = 5, \quad f(-1) = 5, \quad f(\sqrt{2}) = 5, \quad f(\pi) = 5, \quad f(2.57) = 5, \quad \text{etc.}$$

APLICACIONES

Muchas fórmulas de la geometría y la ciencia definen funciones. Por ejemplo, el área A de un cuadrado es una función de la longitud de un lado. Si x denota la longitud de un lado de un cuadrado, entonces $A = x^2$. El área A y la longitud de la circunferencia C de un círculo son funciones de su radio r : $A = \pi r^2$ y $C = 2\pi r$. La distancia s con la que un cuerpo cae bajo la influencia de la gravedad es una función de tiempo: $t: s = 16t^2$.

En el estudio de aplicaciones en cursos de matemáticas subsecuentes (por ejemplo, cálculo), a menudo es necesario establecer una relación funcional entre dos variables, interpretando datos escritos. Considere el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 11

Se bombea agua en un tanque cónico cuya altura es de 12 pies y cuyo radio es de 4 pies. Exprese el volumen del agua en cualquier momento, como una función de su profundidad.

Solución. El tanque cónico se ilustra en la figura 54(a), y un corte transversal del tanque se muestra en la figura 54(b).

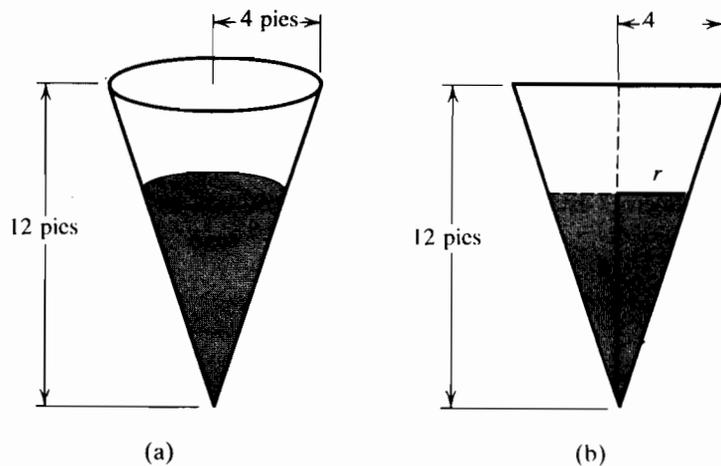


FIGURA 54

(a) Tanque cónico; (b) corte transversal.

Hemos introducido las variables r y h para denotar el radio y la profundidad del agua, respectivamente. Ahora vemos que el volumen del agua es el volumen de un cono circular recto. De la geometría sabemos que el volumen de tal cono está dado por

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad (14)$$

Puesto que los triángulos rectángulos mostrados en la figura 54(b) son semejantes, las longitudes de sus lados son proporcionales: $r/h = 4/12$. Sustituyendo $r = \frac{1}{3}h$ en (14) nos da entonces el volumen del agua en cualquier momento como una función de profundidad h :

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{3}h\right)^2 h, \quad \text{o} \quad V = \frac{\pi}{27} h^3$$

EJEMPLO 12

Expresa el área A de un círculo como una función de la longitud de su circunferencia C .

Solución. El área A y la longitud de la circunferencia C de un círculo son funciones del radio del círculo:

$$A = \pi r^2 \quad \text{y} \quad C = 2\pi r$$

Ahora, de la segunda de estas ecuaciones obtenemos $r = C/2\pi$. Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación de A como una función de C :

$$A = \pi(C/2\pi)^2, \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{4\pi}C^2$$

EJERCICIO 3.4

En los problemas 1 al 6, determine si la correspondencia dada por el conjunto de pares ordenados (x, y) es una función.

1. $\{(1, 2), (2, -3), (3, 4), (-4, -1), (1, 5)\}$
2. $\{(-1, 5), (7, 2), (3, -4)\}$
3. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$
4. $\{(4, 2), (-4, 3), (8, 6), (5, 4)\}$
5. $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$
6. $\{(3, 2), (-6, 2), (-3, 9), (-6, 9)\}$
7. Si $f(x) = x^2 - 1$, halle $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, y $f(-2)$.
8. Si $f(x) = x^2 + x$, halle $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, y $f(-2)$.
9. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, halle $f(0)$, $f(3)$, $f(-1)$, y $f(5)$.
10. Si $f(x) = \sqrt{2x+4}$, halle $f(0)$, $f(4)$, $f(\frac{1}{2})$, y $f(-\frac{1}{2})$.
11. Si $f(x) = 3x/(x^2+1)$, halle $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, y $f(-1)$.
12. Si $f(x) = x^2/(x^3-1)$, halle $f(0)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{2})$, y $f(\frac{1}{2})$.
13. Si $f(x) = 3x^3 - x$, halle $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a^2)$, $f(1/a)$, y $f(-a)$.
14. Si $f(x) = 2x^4 - x^2$, halle $f(b)$, $f(b+1)$, $f(b^2)$, $f(1/b)$, y $f(-b)$.
15. Si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

halle $f(2)$ y $f(-7)$.

16. Si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq \pm 1 \\ 3, & x = -1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

halle $f(-1)$, $f(1)$, y $f(3)$.

17. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 1 \\ -x^3, & x < 1 \end{cases}$$

halle $f(1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, y $f(-2)$.

18. Si

$$f(x) = \begin{cases} -10, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 10, & x > 0 \end{cases}$$

halle $f(1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, y $f(-2)$.

En los problemas 19 al 22, halle

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde $h \neq 0$ es una constante.

19. $f(x) = x^2$

20. $f(x) = x^2 + 3x - 7$

21. $f(x) = x^3$

22. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

En los problemas 23 y 24, halle

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

donde $x \neq a$.

23. $f(x) = \frac{x-1}{x}$

24. $f(x) = x^3 - x + 1$

En los problemas 25 al 34, halle el dominio de la función.

25. $f(x) = \sqrt{2x+3}$

26. $f(x) = \sqrt{15-5x}$

27. $f(x) = \frac{x^2}{x^4-16}$

28. $f(x) = \frac{3}{x^2+6x+5}$

29. $f(x) = \frac{x}{x^2+25}$

30. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

31. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}$

32. $f(x) = \frac{5}{x\sqrt{x+4}}$

33. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2-x}}$

34. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+6}$

En los problemas 35 al 42, halle el dominio y el rango de la función.

35. $f(x) = 3x - 15$

36. $f(x) = x^2 + 4$

37. $f(x) = x^3$

38. $f(x) = \sqrt{x-5}$

39. $f(x) = -1 + \sqrt{2x-6}$

40. $f(x) = \sqrt{3x+2}$

41. $f(x) = \sqrt{16-x}$

42. $f(x) = |x| - 10$

43. ¿Para qué valores de x es $f(x) = \sqrt{x-4}$ igual a 4?44. ¿Para qué valores de x es $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ igual a 0?45. ¿Para qué valores de x es

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$$

igual a -8 ?, ¿a 4?

46. Determine si los números 5 y -5 están en el rango de la función $g(x) = x(x-4)$.
47. Expresé el perímetro P de un cuadrado como una función de su área A .
48. Expresé el área A de un círculo como una función de su diámetro d .
49. Expresé el área A de un triángulo equilátero como una función de la longitud s de un lado.
50. Expresé el área A de un triángulo equilátero como una función de la altura h del triángulo.
51. Expresé el volumen de un cubo como una función del área A de su base.
52. Expresé el área de la superficie de un cilindro circular recto de volumen 1 m^3 como una función de su radio r .
53. Con un pedazo de cartulina rectangular se hace una caja abierta, recortando un cuadrado de longitud x de cada esquina y doblando luego los lados hacia arriba. Si la cartulina mide 2 pies por 3 pies (figura 55), exprese el volumen V de la caja como una función de x .

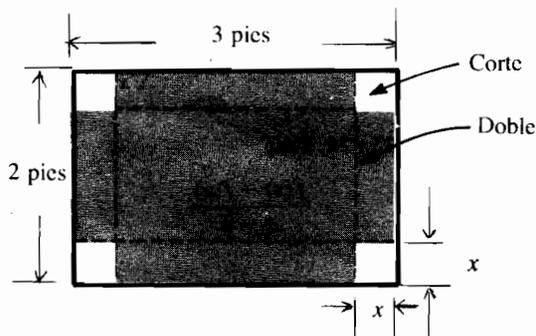


FIGURA 55

54. Con un pedazo de metal de 1 por 20 pies se hace una canal con un corte transversal rectangular, doblando hacia arriba cantidades x iguales del lado de 1 pie (véase figura 56). Expresé el volumen V de la canal como una función de x .
55. Se va a construir una caja rectangular abierta con una base cuadrada de longitud x y un volumen de $16,000\text{ cm}^3$. Expresé el área de la superficie S de la caja como una función de x .

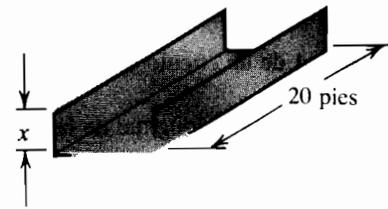


FIGURA 56

56. Se hace un recipiente cerrado en forma de cilindro circular de radio r . El recipiente debe tener un volumen de $4\pi\text{ m}^3$. Si el costo por metro cuadrado del material para la superficie lateral es el doble del costo del que se utilizó para la parte superior y el costo por metro cuadrado del material para la parte inferior es 4 veces el costo del que se utilizó para la superior, exprese el costo total C de construcción del recipiente como una función de r .
57. Se va a cercar un pedazo rectangular de tierra de forraje y se va a dividir en dos porciones iguales por medio de un cercado adicional paralelo a dos lados. La porción de tierra tiene $3,000\text{ m}^2$. Expresé la cantidad de cercado F en términos de la longitud x mostrada en la figura 57.

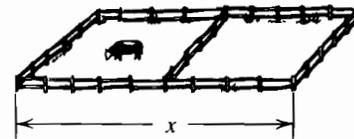


FIGURA 57

58. Una persona de 6 pies de altura camina hacia un farol de 20 pies, como se muestra en la figura 58. Expresé la longitud L de su sombra como una función de su distancia x desde el farol.

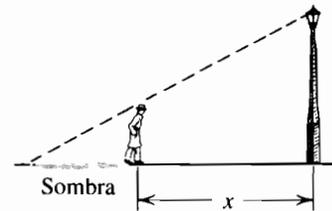


FIGURA 58

59. La ventana que se muestra en la figura 59 consta de un rectángulo con un semicírculo en la parte superior. Expresé el área A de la ventana como una función del ancho x indicado, si se sabe que el perímetro de la ventana es de 20 m.

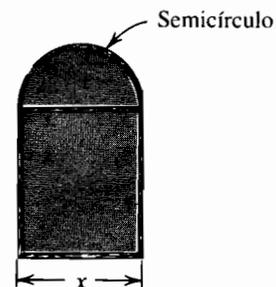


FIGURA 59

60. Un alambre de longitud L se corta en x unidades de un extremo. Un pedazo de alambre se dobla en forma de círculo y el otro se dobla en forma de cuadrado. Expresa la suma S de las áreas, como una función de x .
61. Dos calles se intersecan como se muestra en la figura 60. A las 12.00 p.m., el auto A atraviesa el intersección y se dirige hacia el sur con una velocidad constante de 50 mph. Al mismo tiempo, el auto B está a 4 millas este del intersección y viaja hacia el occidente con una velocidad constante de 30 mph. Siendo $t = 0$ la representación de las 12.00 p.m., exprese la distancia d entre los dos autos como una función de tiempo $t > 0$.

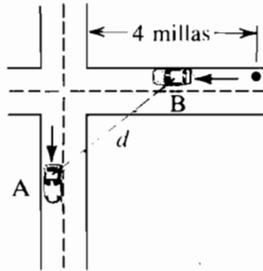


FIGURA 60

62. Los extremos de un abrevadero de 12 pies de largo forman triángulos isósceles. Los lados iguales de los triángulos tienen 4 pies de largo, y el lado restante tiene x pies de largo. (Véase figura 61). Expresa el volumen V del abrevadero como una función de x .

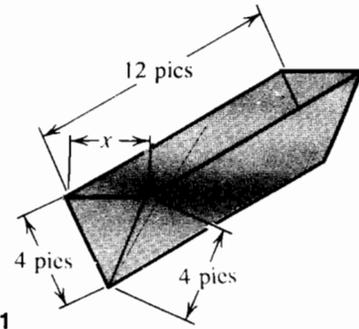


FIGURA 61

63. Se debe construir una pista de atletismo con dos segmentos rectos y dos semicirculares, como lo muestra la figura 62. El radio de cada segmento semicircular es r . La longitud de la pista debe ser de 1 km. Expresa el área A cubierta por la pista como una función de r .

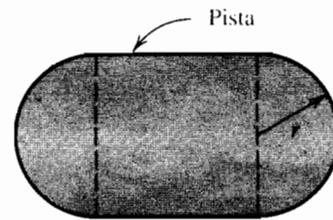


FIGURA 62

3.5 Gráficas de funciones

A menudo se utiliza una función para describir problemas o fenómenos en campos tales como el de la ciencia, la ingeniería y el comercio. Para interpretar y utilizar datos obtenidos de tal función, encontramos que es útil presentar los datos en forma de gráfica (véase figura 63)

En un plano xy , se define la **gráfica de una función** $y = f(x)$ como la gráfica de la relación

$$\{(x, y) | y = f(x), x \text{ en el dominio de } f\}.$$

En otras palabras, la gráfica de una función f es el conjunto de puntos (x, y) en el plano cuyas coordenadas satisfacen $y = f(x)$.

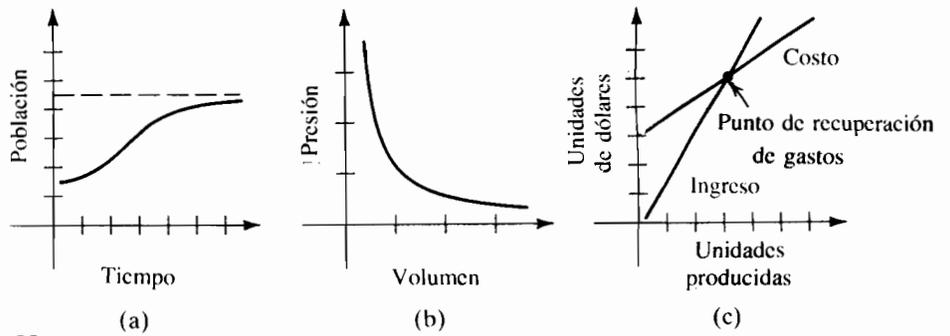


FIGURA 63

EJEMPLO 1

La gráfica de la función f definida por la tabla adjunta consta de cuatro puntos mostrados en la figura 64.

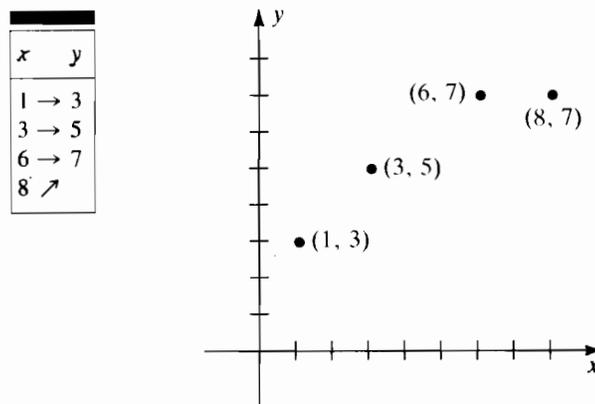


FIGURA 64

INTERSECTOS

Para graficar una función definida por la ecuación $y = f(x)$, usualmente es buena idea determinar primero si la gráfica de f tiene algunos intersectos. Recuerde que el eje y es la recta $x = 0$. Por tanto, si 0 está en el dominio de f , el **intersección en y** de su gráfica es el número $f(0)$. (Véase figura 65(a)). De la misma manera, el eje x es la recta $y = 0$. Por tanto, para hallar los **intersecciónes en x** de la gráfica de $y = f(x)$, debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$. Los números que satisfacen esta ecuación se llaman también *ceros* de f . Los *ceros reales* de f son los intersecciónes en x de su gráfica. En la figura 65(b), vemos que $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0$. Por tanto, x_1 , x_2 , y x_3 son los intersecciónes en x de la gráfica de la función f .

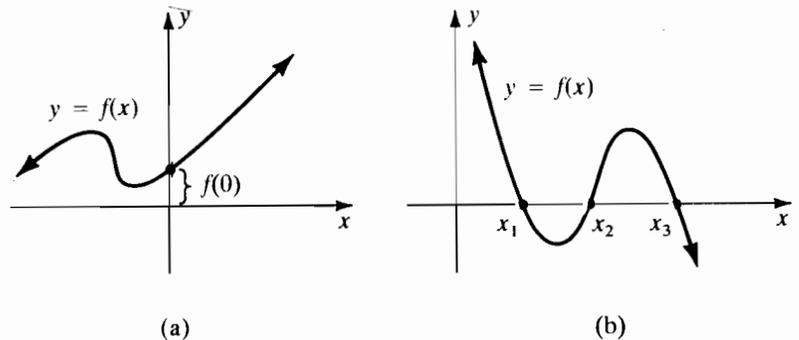


FIGURA 65

Para obtener otros puntos de la gráfica de una función $y = f(x)$, podemos escoger los números x_1, x_2, \dots, x_n en su dominio, calcular $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, y luego marcar los puntos correspondientes $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_n, f(x_n))$. Tenga presente que un valor funcional $f(x)$ es una distancia dirigida desde el eje x (véase figura 66).

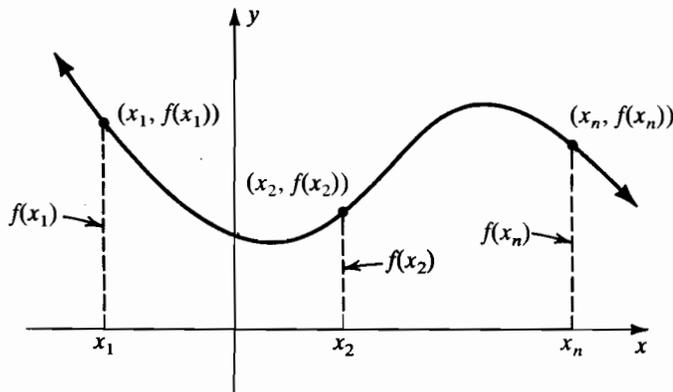


FIGURA 66

EJEMPLO 2

Grafique la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución. El intersección en y es $f(0) = -3$. Para hallar los intersecciónes en x , resolvemos

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

o
$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

Por tanto, puesto que $f(x) = 0$ cuando $x = -1$ o $x = 3$, los intersecciónes en x son -1 y 3 . Marcando los puntos de la tabla adjunta, obtenemos la gráfica en la figura 67.

x	$f(x)$
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

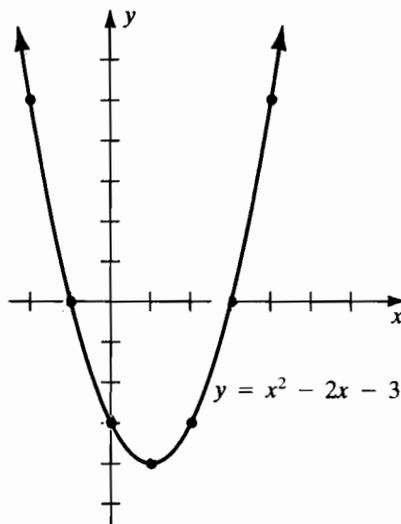


FIGURA 67

Si la gráfica de una función $y = f(x)$ se dibuja con precisión, usualmente es posible ver el dominio y el rango de f (figura 68). El dominio de f es cualquier intervalo u otro conjunto de números reales en el eje x ; y el rango de f es cualquier intervalo u otro conjunto de números reales, en el eje y . En el ejemplo 2, el dominio de la función dada es el conjunto R de números reales; esto es, el intervalo $(-\infty, \infty)$. El rango de la función parece ser, según la gráfica de la figura 67, $[-4, \infty)$.

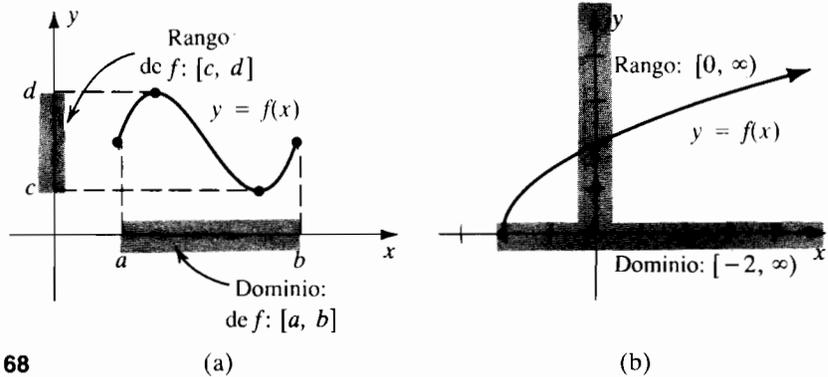


FIGURA 68

(a)

(b)

PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Por la definición de una función sabemos que por cada x en el dominio de f corresponde un valor *único* $f(x)$ en el rango. Esto significa que cualquier recta vertical que interseque la gráfica de f puede hacerlo máximo en un punto. Y, viceversa, si cada recta vertical interseca la gráfica de una relación en a lo sumo un punto, entonces la relación es una función. Esta última afirmación se llama **prueba de la recta vertical** para una función.

EJEMPLO 3

- (a) En la figura 69 vemos que cualquier recta vertical interseca la gráfica de la relación definida por $y = x^2$, en máximo un punto. Por tanto, por medio de la prueba de la recta vertical, la relación determina una función $y = f(x) = x^2$.
- (b) Como lo muestra la figura 70, una recta vertical puede intersecar la gráfica de la relación determinada por $x^2 + y^2 = 4$ en más de un punto. Por tanto, la relación no determina una función $y = f(x)$.

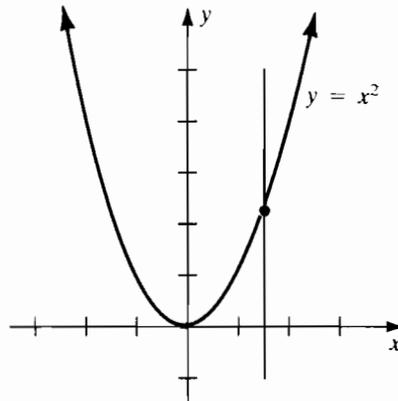


FIGURA 69

Gráfica de una función

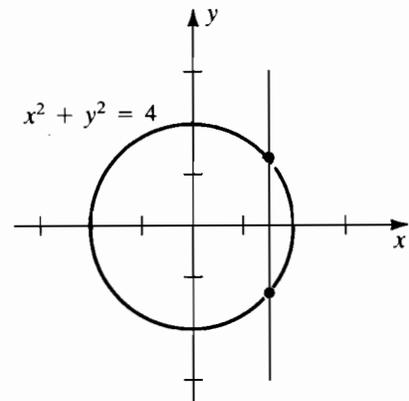


FIGURA 70

No es la gráfica de una función

FUNCIONES LINEALES

Uno de los más simples pero más importantes tipos de funciones es la función lineal. Cualquier función de la forma

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0 \tag{15}$$

donde a y b son constantes, se denomina **función lineal**. Puesto que $f(x)$ es un número real para cualquier opción de x , concluimos que el dominio de (15) es el conjunto de números reales. Si escribimos (15) de la forma $y = ax + b$, reconocemos, por (10) de la sección 3.3, la ecuación de una línea recta con pendiente a e intersección b en y .

EJEMPLO 4

Grafique la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Solución. El intersección en y de la gráfica es $b = -\frac{3}{2}$; esto es $f(0) = -\frac{3}{2}$. Recuerde que para graficar una línea recta, sólo necesitamos dos puntos. A pesar de que podríamos sustituir cualquier valor de x en $f(x)$ para obtener otro punto, determinaremos el intersección en x de la gráfica. Estableciendo que $f(x) = 0$, tenemos

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

lo cual da $x = 3$. Por tanto, el intersección en x es 3. La gráfica de la recta en la figura 71 se traza pasando por los puntos $(0, -\frac{3}{2})$ y $(3, 0)$.

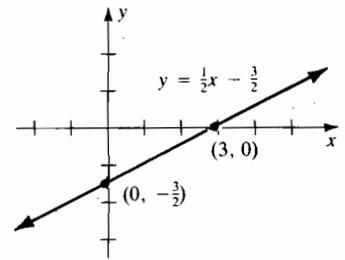


FIGURA 71

EJEMPLO 5

Grafique la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Solución. Esta función se determina en tres partes. Dibujamos, a su vez,

la recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,

el punto $(0, 0)$ y,

la recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

La gráfica de f se muestra en la figura 72.

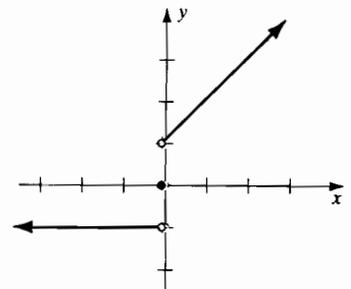


FIGURA 72

EJEMPLO 6

Grafique la función de valor absoluto $f(x) = |x|$.

Solución. Utilizando la definición de valor absoluto dada en la sección 1.2, podemos reescribir f como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Por consiguiente, la gráfica de f consta de dos partes. Dibujamos, a su vez, la recta $y = x$ para $x \geq 0$ y la recta $y = -x$ para $x < 0$. La gráfica se muestra en la figura 73.

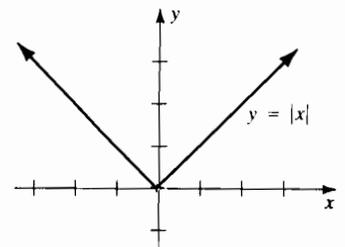


FIGURA 73

SIMETRIA

En la sección 3.1 tratamos la simetría de una gráfica con respecto al eje y , al eje x y al origen. La gráfica de una función puede ser simétrica con respecto al eje y o al origen, pero la gráfica de una función diferente de la función cero *no puede* ser simétrica con respecto al eje x . (¿Por qué no?). Si la gráfica de una función f es simétrica con respecto al eje y , decimos que f es una **función par**. Se dice que una función cuya gráfica es simétrica con respecto al origen es una **función impar**. Para las funciones, las siguientes pruebas de simetría son equivalentes a las pruebas (i) y (iii), respectivamente, de la p. 125 (véase figura 74).

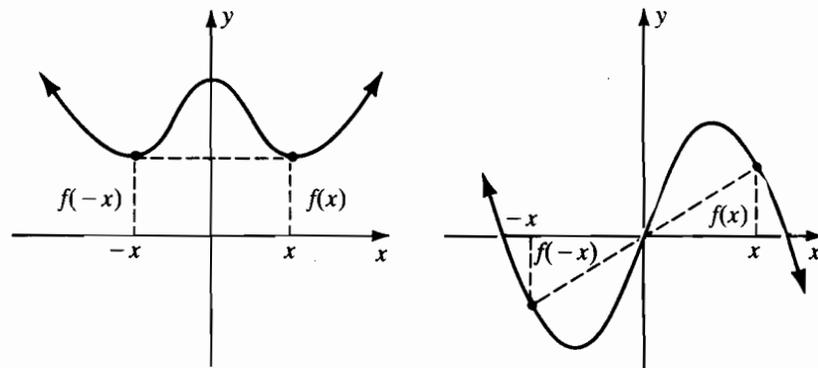
(a) Función par $f(-x) = f(x)$ (b) Función impar $f(-x) = -f(x)$

FIGURA 74



Una inspección a la figura 67 en el ejemplo 2 muestra que f no es ni par ni impar. Notamos también que $f(-x)$ no es igual ni a $f(x)$ ni a $-f(x)$. Por otra parte, en la figura 73 en el ejemplo 6, vemos que la función de valor absoluto es una función par, ya que su gráfica es simétrica con respecto al eje y . En este caso, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

EJEMPLO 7

Grafique la función $f(x) = x^3$.

Solución. Puesto que $f(0) = 0$ y ya que $f(x) = x^3 = 0$ implica que $x = 0$, vemos que los intersecciones en x y en y son los mismos, es decir, 0. Esto significa que la gráfica de f pasa por el origen. Además,

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \\ &= -x^3 \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

muestra que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen. Por tanto, f es una función impar. Utilizando estos resultados sobre los interseectos y la simetría y marcando los puntos de la tabla adjunta nos da la gráfica en la figura 75

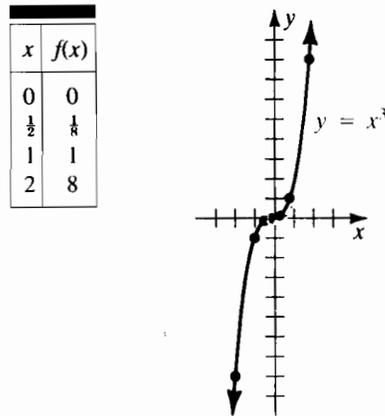


FIGURA 75

EJEMPLO 8

Grafique la función $f(x) = x^{2/3}$.

Solución. Podemos ver que la función puede escribirse también de la forma

$$f(x) = (x^{1/3})^2 = (\sqrt[3]{x})^2$$

Puesto que es posible hallar la raíz cúbica de cualquier número real, el dominio de f es el conjunto R de números reales. Como en el ejemplo 7, los interseectos en x y en y son 0. Ahora, en

$$\begin{aligned} f(-x) &= (\sqrt[3]{-x})^2 \\ &= (-\sqrt[3]{x})^2 \\ &= (\sqrt[3]{x})^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

vemos que f es una función par. Marcando los puntos de la tabla y utilizando los interseectos y la simetría con respecto al eje y , obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 76.

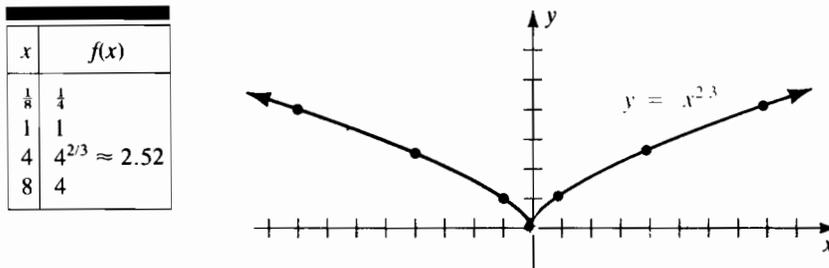


FIGURA 76

EJERCICIO 3.5

En los problemas 1 al 40, grafique la función dada y halle los intersejos. Utilice la simetría cuando sea posible.

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1. $f(x) = 3$ | 2. $f(x) = -1$ |
| 3. $f(x) = x$ | 4. $f(x) = x - 5$ |
| 5. $f(x) = 2x + 1$ | 6. $f(x) = -3x + 6$ |
| 7. $f(x) = \sqrt{x}$ | 8. $f(x) = 3 + \sqrt{x}$ |
| 9. $f(x) = \sqrt{x-2}$ | 10. $f(x) = \sqrt{4-x}$ |
| 11. $f(x) = x^{1/3}$ | 12. $f(x) = \sqrt[3]{x-8}$ |
| 13. $f(x) = -x^2$ | 14. $f(x) = 10x^2$ |
| 15. $f(x) = x^2 + 1$ | 16. $f(x) = 4 - x^2$ |
| 17. $f(x) = x^2 - 2x$ | 18. $f(x) = x^2 + x$ |
| 19. $f(x) = x^2 - 4x + 4$ | 20. $f(x) = x^2 - 5x + 4$ |
| 21. $f(x) = -x^3$ | 22. $f(x) = x^3 - 1$ |
| 23. $f(x) = 1 - x^3$ | 24. $f(x) = x^3 - x$ |
-
- | | |
|--|--|
| 25. $f(x) = \begin{cases} 4, & x \geq 3 \\ -1, & x < 3 \end{cases}$ | |
| 26. $f(x) = \begin{cases} 3, & x > 3 \\ x, & -3 \leq x \leq 3 \\ -3, & x < -3 \end{cases}$ | |
| 27. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ | 28. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ |
| 29. $f(x) = x - 3$ | 30. $f(x) = x - 3 $ |
| 31. $f(x) = x + 2 $ | 32. $f(x) = x + 2$ |
| 33. $f(x) = \frac{1}{ x }$ | 34. $f(x) = \frac{ x }{x}$ |
| 35. $f(x) = \frac{1}{x}$ | 36. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ |
| 37. $f(x) = x^4$ | 38. $f(x) = (x-1)^4$ |
| 39. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ | 40. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ |

En los problemas 41 al 46, halle los intersejos de la gráfica de la función dada.

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 41. $f(x) = (x + 2)^2 - 49$ | 42. $f(x) = x^4 - 16$ |
| 43. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{2-x}}$ | 44. $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 14}{2x - 8}$ |
| 45. $f(x) = \frac{6x - 4}{x}$ | 46. $f(x) = \frac{30}{x^2 + 5}$ |

En los problemas 47 al 54, determine si la gráfica dada es la gráfica de una función.

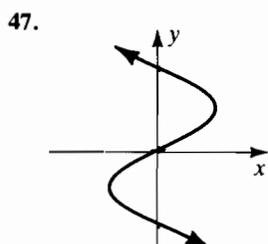


FIGURA 77

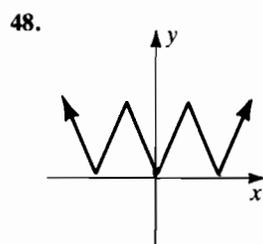


FIGURA 78

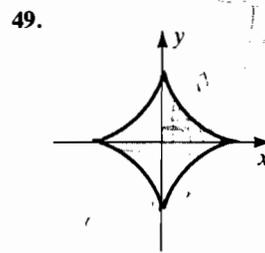


FIGURA 79

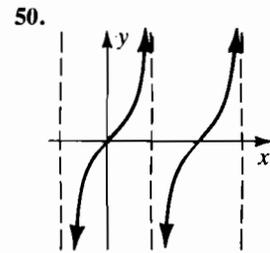


FIGURA 80

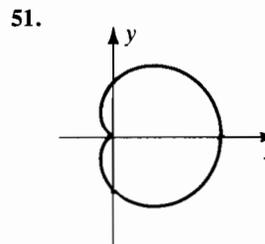


FIGURA 81

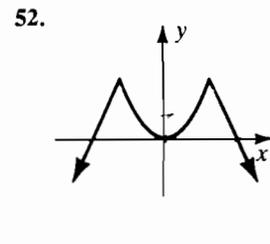


FIGURA 82

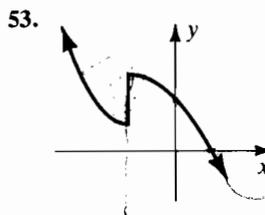


FIGURA 83

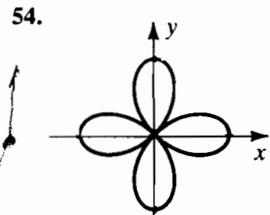


FIGURA 84

En los problemas 55 al 58, la gráfica dada es la gráfica de una función f . Según la figura, determine el dominio y el rango de f .

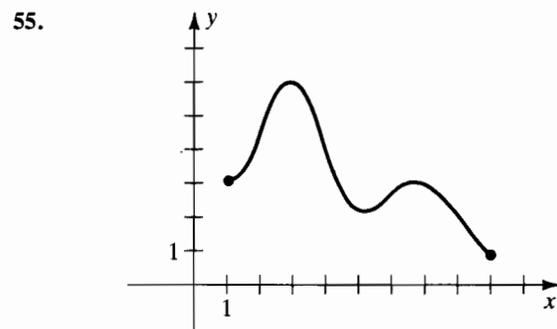


FIGURA 85

56.

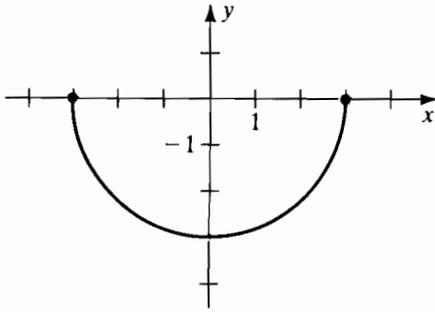


FIGURA 86

57.

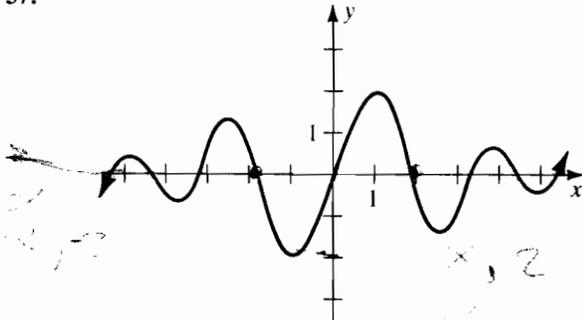


FIGURA 87

58.

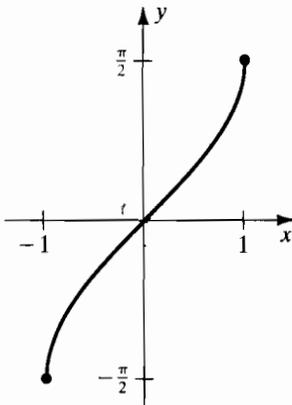


FIGURA 88

En los problemas 59 y 60, complete la gráfica (a) si f es una función par (b) si f es una función impar.

59.

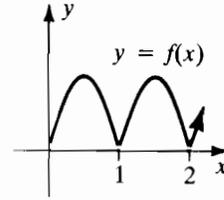


FIGURA 89

60.

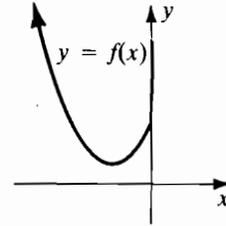


FIGURA 90

61. El resultado de la función **parte entera** $f(x) = [x]$ se define como el mayor entero n para el cual $n \leq x$. Halle $f(-3.5)$, $f(-3)$, $f(-1.4)$, $f(0)$, $f(1.7)$, $f(2.30)$, $f(2.8)$ y $f(3.1)$.
62. Trace la gráfica de la función parte entera del problema 61.
63. Sea $f(x) = [x]$ la función parte entera definida en el problema 61. Trace la gráfica de $y = [x + 1]$.
64. Un metro tiene aproximadamente 3.28 pies. Determine funciones para convertir metros a pies y pies a metros.
65. *La depreciación directa, o lineal*, supone que un artículo pierde *todo* su valor inicial de A dólares durante un periodo de n años en una cantidad A/n cada año. Si un artículo que cuesta US\$20,000 cuando está nuevo es depreciado linealmente por un periodo de 25 años, determine una función lineal dando su valor V en dólares después de x años ($0 \leq x \leq 25$). ¿Cuál es el valor después de 10 años?
66. El valor en dólares de un computador está dado por la función lineal

$$V(x) = 500,000 \left(1 - \frac{x}{40} \right), \quad 0 \leq x \leq 40$$

en donde x se mide en años. ¿Cuál es el valor inicial del computador?, ¿en qué momento el valor del computador es la mitad de su valor inicial?, ¿en qué momentos el computador ha perdido tres cuartas partes de su valor inicial?, ¿cuándo no vale nada?

67. En cálculos de *interés simple*, la cantidad devengada S es una función lineal de tiempo medido en años: $S = P + Prt$. Calcule S pasados 15 años, si el capital es $P = 100$ y la tasa anual de interés es $r = 4\%$. ¿En qué momento es $S = 220$?
68. La relación entre grados Celsius T_C y grados Fahrenheit T_F es una función lineal. Expresar T_C como una función de T_F si $(32^\circ\text{F}, 0^\circ\text{C})$ y $(212^\circ\text{F}, 100^\circ\text{C})$ son puntos de la gráfica de T_C . ¿Qué es $T_C(140)$?
69. La relación entre grados Kelvin T_K y grados Celsius T_C es una función lineal. Expresar T_K como una función de T_C si $(27^\circ\text{C}, 300^\circ\text{K})$ y $(40^\circ\text{C}, 313^\circ\text{K})$ son puntos de la gráfica de T_K . Se define cero absoluto como 0°K . ¿Qué es cero absoluto en la escala Celsius?, ¿en la escala Fahrenheit?

3.6 Operaciones con funciones

Las funciones pueden combinarse a través de las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división para producir nuevas funciones. Para dos funciones f y g , la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se define como sigue.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x) \neq 0)$$

DOMINIOS

El dominio de cada una de las funciones $f + g$, $f - g$, fg , y f/g es la *intersección* del dominio de f con el dominio de g . En el caso del cociente f/g , debemos excluir, además, los valores de x para los cuales el denominador $g(x)$ es 0.

EJEMPLO 1

Para $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$, tenemos

$$(f + g)(x) = (x^2 + 4x) + (x^2 - 9) = 2x^2 + 4x - 9$$

$$(f - g)(x) = (x^2 + 4x) - (x^2 - 9) = 4x + 9$$

$$(fg)(x) = (x^2 + 4x)(x^2 - 9) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x$$

$$\text{y} \quad (f/g)(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}$$

En el ejemplo 1 notamos que $x = 3$ y $x = -3$ no están en el dominio de $(f/g)(x)$.

EJEMPLO 2

Si sumamos

$$f(x) = \sqrt{1-x}, \quad x \leq 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$$

obtenemos

$$(f + g)(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+2}$$

El dominio de esta nueva función es el intervalo $[-2, 1]$, el cual es el conjunto de números comunes a ambos dominios.

SUMA DE COORDENADAS y

La gráfica de la suma de dos funciones f y g que tienen el mismo dominio puede obtenerse por medio de la **suma de coordenadas y** . Puesto que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, vemos en la figura 91 que la coordenada y de un punto (x_1, y_1) , en la gráfica de $f + g$ es simplemente la suma de las coordenadas y de los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_1, g(x_1))$ en las gráficas de f y g , respectivamente.

EJEMPLO 3

Si $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$, grafique $(f + g)(x)$

Solución. Primero, notamos que el dominio de

$$(f + g)(x) = x + \sqrt{x}$$

es $[0, \infty)$. La figura 92(a) muestra las gráficas de f y g para $x \geq 0$. Como se indicó, en cualquier valor dado de x podemos obtener la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de $f + g$, sumando y_1 y y_2 . La gráfica de la suma se muestra en la figura 92(b).

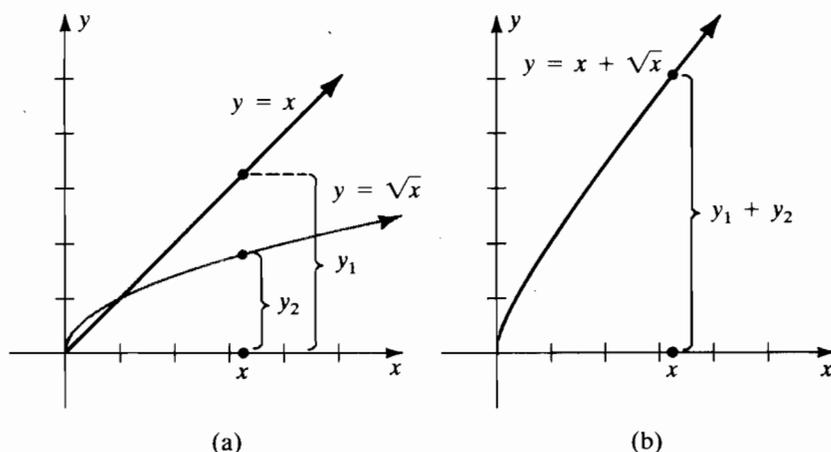
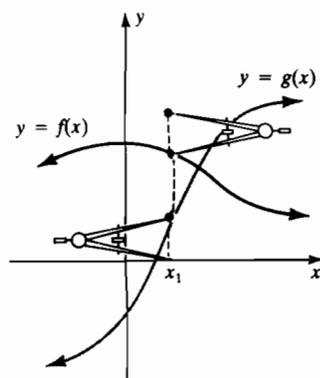
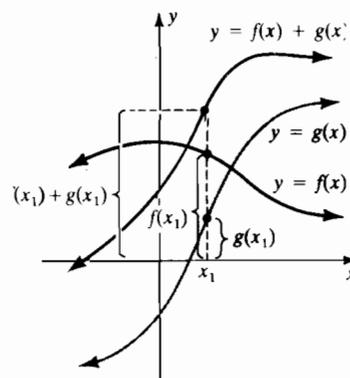


FIGURA 92



(a)



(b)

FIGURA 91

COMPOSICION DE FUNCIONES

Otro método de combinar dos funciones f y g se llama **composición de funciones**. Definimos la composición de f y g denotada por $f \circ g$ como la función

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

donde se entiende que los valores funcionales $g(x)$ esto es, elementos en el rango de g están en el dominio de f . Simbólicamente, utilizando nuestra analogía de la máquina de funciones, podemos representar la composición de f y g , como se muestra en la figura 93.

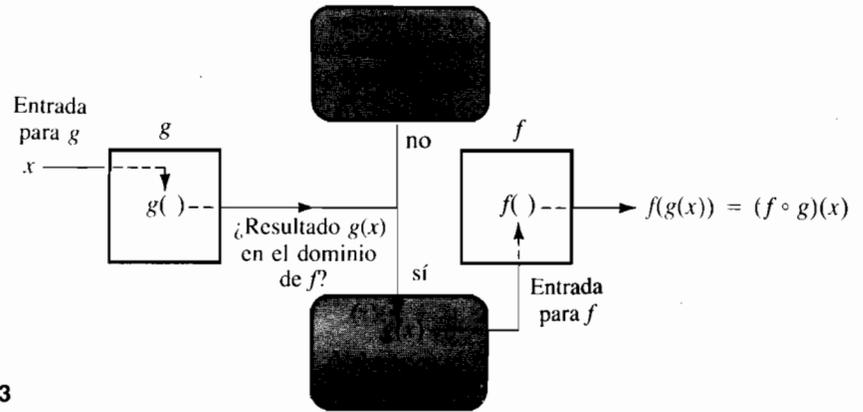


FIGURA 93

De la misma manera, la composición de g y f está definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Por supuesto, los valores funcionales $f(x)$ deben estar en el dominio de g . Las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ se llaman **funciones compuestas**.

EJEMPLO 4

Si $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, encontrar $(f \circ g)(x)$.

Solución. Para enfatizar, escribimos f de la forma

$$f(\quad) = (\quad)^2 + 3(\quad) - 1$$

Por tanto, para calcular $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, podemos sustituir $g(x)$ en cada serie de paréntesis. Encontramos que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x^2 + 1) \\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1) - 1 \\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 6x^2 + 3 - 1 \\ &= 4x^4 + 10x^2 + 3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Halle $(g \circ f)(x)$ para las funciones dadas en el ejemplo 4.

Solución. En este caso,

$$g(\quad) = 2(\quad)^2 + 1$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 + 3x - 1) \\ &= 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 1 \\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) + 1 \\ &= 2x^4 + 12x^3 + 14x^2 - 12x + 3 \end{aligned}$$

Nota de advertencia: los ejemplos 4 y 5 ilustran que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$.

EJEMPLO 6

Expresa la función $F(x) = \sqrt{6x^2 + 1}$ como la composición $f \circ g$ de dos funciones f y g .

Solución. Si definimos las funciones f y g por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 6x^2 + 1$$

entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= (f \circ g)(x) \\ &= f(g(x)) \\ &= f(6x^2 + 1) \\ &= \sqrt{6x^2 + 1} \end{aligned}$$

Hay otras soluciones para el ejemplo 6: si las funciones f y g están determinadas por

$$f(x) = \sqrt{6x + 1} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

entonces observe que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(x^2) \\ &= \sqrt{6x^2 + 1} = F(x) \end{aligned}$$

DOMINIO DE LA COMPOSICION

Como se indicó en la figura 93, el dominio de la función compuesta $f \circ g$ está dado por los valores de x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f . Por supuesto, esto no excluye la posibilidad de que el dominio de $f \circ g$ pueda ser todo el dominio de g .

EJEMPLO 7

Los dominios de $f(x) = x^2 - (3/x)$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son $\{x|x \neq 0\}$ y $\{x|x \geq 0\}$, respectivamente. El dominio de

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} \\ &= x - \frac{3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

es $\{x|x > 0\}$, o $(0, \infty)$.

EJEMPLO 8

Los dominios de $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = x^2 + 2$ son $\{x|x \geq 3\}$ y el conjunto R de números reales, respectivamente. Vemos que $g(x) \geq 2$ para todos los x . Para garantizar que los números representados por $g(x)$ estén en el dominio de f (a saber, aquellos números mayores o iguales a 3), debemos restringir el dominio de g de modo que $x \leq -1$ o $x \geq 1$ (véase figura 94.) Por tanto,

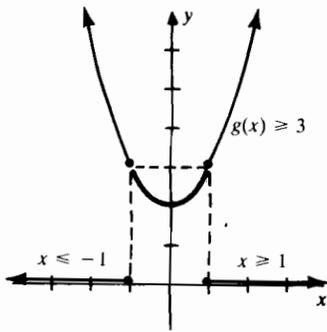


FIGURA 94

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 + 2) \\ &= \sqrt{(x^2 + 2) - 3} \\ &= \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

se define solamente en $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

GRAFICAS TRASLADADAS

Si f es una función y k es una constante positiva, entonces las gráficas de la suma $f(x) + k$, la diferencia $f(x) - k$, y las composiciones $f(x + k)$ y $f(x - k)$ pueden obtenerse de la gráfica de f , por medio de un **cambio o traslación** vertical u horizontal, por medio de una cantidad k . La figura 95 ilustra los 4 casos que se sintetizan en la tabla contigua.

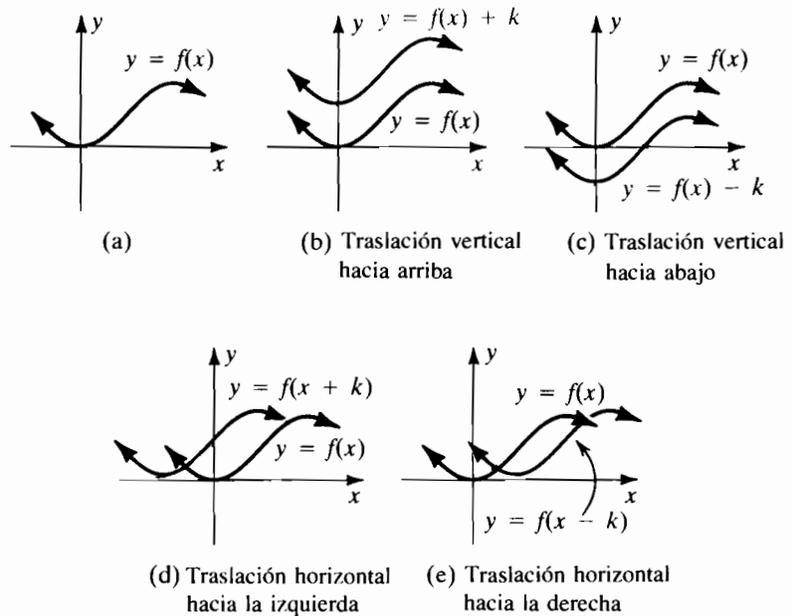


FIGURA 95

FUNCIÓN $k > 0$	GRAFICA DE $y = f(x)$
$y = f(x) + k$	Trasladada hacia <i>arriba</i> k unidades
$y = f(x) - k$	Trasladada hacia <i>abajo</i> k unidades
$y = f(x + k)$	Trasladada hacia la <i>izquierda</i> k unidades
$y = f(x - k)$	Trasladada hacia la <i>derecha</i> k unidades

EJEMPLO 9

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, que se muestra en la figura 96(a), se dio primero en el ejemplo 6 de la sección 3.1. Las gráficas de $y = \sqrt{x} + 1$, $y = \sqrt{x} - 1$, $y = \sqrt{x + 1}$, y $y = \sqrt{x - 1}$, que se muestran en las figuras 96(b), (c), (d) y (e), se obtuvieron de trasladar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, a su vez, una unidad arriba, una unidad abajo, una unidad a la izquierda y una a la derecha.

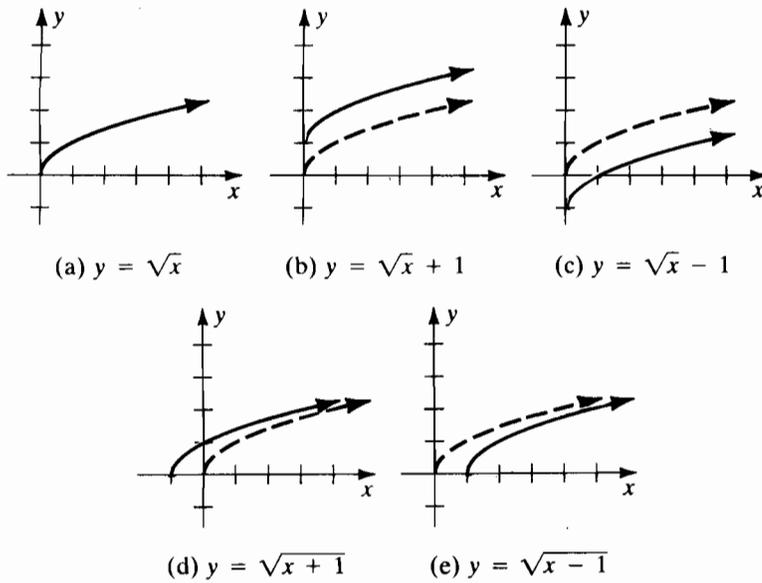


FIGURA 96

En general, la gráfica de

$$y = f(x \pm k_1) \pm k_2, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0$$

puede hallarse en la gráfica de la función $y = f(x)$ combinando una traslación horizontal y una vertical. Por ejemplo, la gráfica de $y = f(x + k_1) - k_2$ es la gráfica de $y = f(x)$ trasladada horizontalmente k_1 unidades a la izquierda y luego trasladada verticalmente k_2 unidades hacia abajo.

EJEMPLO 10

Grafique $y = \sqrt{x - 3} + 4$.

Solución. La gráfica de $y = \sqrt{x - 3} + 4$ es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ trasladada 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba. La gráfica se da en la figura 97.

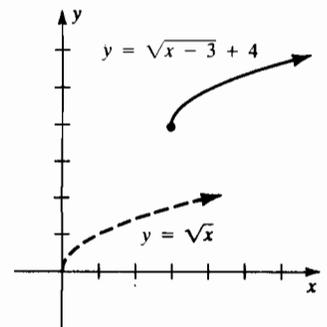


FIGURA 97

REFLEXIONES

La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ a través del eje x . En otras palabras, para graficar $y = -f(x)$, simplemente volteamos la gráfica de $y = f(x)$.

EJEMPLO 11

Grafique $y = -\sqrt{x}$.

Solución. La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, representada como una curva con líneas interrumpidas en la figura 98, se refleja en el eje x lo que da como resultado la curva.

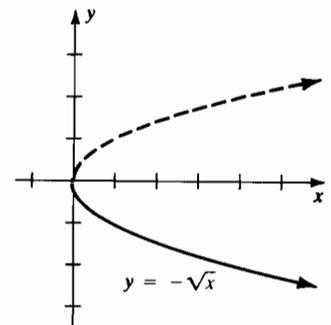


FIGURA 98

EJERCICIO 3.6

En los problemas 1 al 8, halle las funciones indicadas y dé sus dominios.

- $f(x) = 2x^2 - x + 3$, $g(x) = x^2 + 1$; $f + g$, fg
- $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$; fg , f/g
- $f(x) = 2x - (1/\sqrt{x})$, $g(x) = 2x + (1/\sqrt{x})$; $f + g$, fg
- $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$, $g(x) = (1-x)^3$; $f + g$, $f - g$
- $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x + 2$; fg , f/g
- $f(x) = (2x + 3)^{1/2}$, $g(x) = 2x + 3 + (2x + 3)^{1/2}$; $f - g$, fg
- $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$; $f + g$, fg
- $f(x) = 2 + \sqrt{x+2}$, $g(x) = \sqrt{5x+5}$; $f - g$, f/g

En los problemas 9 al 12, utilice la suma de las coordenadas y para graficar la función $f + g$.

- $f(x) = x$, $g(x) = |x|$
- $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$

$$12. f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}, g(x) = x$$

En los problemas 13 y 14, utilice las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ dadas para graficar $y = f(x) + g(x)$.

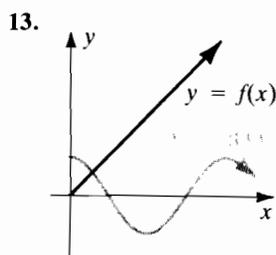


FIGURA 99

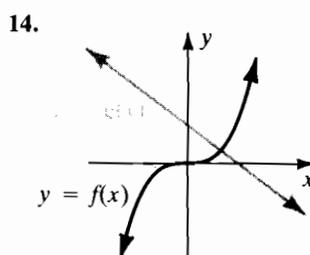


FIGURA 100

En los problemas 15 al 24, halle $f \circ g$ y $g \circ f$.

- $f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = \sqrt{x-1}$
- $f(x) = x^2 - x + 5$, $g(x) = -x + 4$
- $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, $g(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = \frac{x+3}{2}$
- $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^3$
- $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{x-4}$, $g(x) = x^2$
- $f(x) = x + 1$, $g(x) = x + \sqrt{x-1}$
- $f(x) = x^3 - 4$, $g(x) = \sqrt[3]{x+4}$

En los problemas 25 al 30, halle el dominio de $f \circ g$.

- $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = 2x + 1$
- $f(x) = \sqrt{x-4}$, $g(x) = x^2 - 5$
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x-6}$
- $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $g(x) = 4x$
- $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x+3}$

En los problemas 31 al 34, halle $f \circ f$ y $f \circ (1/f)$.

- $f(x) = 2x + 6$
- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = \frac{x+4}{x}$

En los problemas 35 al 38, exprese la función dada F como una composición $f \circ g$ de dos funciones f y g .

- $F(x) = 4x^2 + 1$
- $F(x) = 8x^4 - 5x^2$
- $F(x) = (x-3)^2 + 4\sqrt{x-3}$
- $F(x) = 1 + |2x+9|$

En los problemas 39 al 42, halle $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ para las funciones dadas.

- $f(x) = \frac{1}{4}(x^{-1} - 1)$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $h(x) = 2x + 1$
- $f(x) = \sqrt{2x-3}$, $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = \sqrt{5x-7}$
- $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 1$
- $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3x$, $h(x) = 2x$

En los problemas 43 y 44, halle las gráficas de las funciones indicadas, trasladando la gráfica de la función dada.

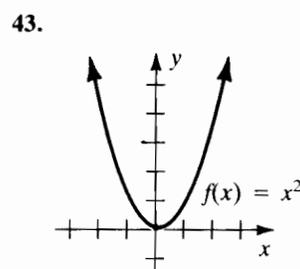


FIGURA 101

- $y = f(x) + 1$
- $y = f(x) - 1$
- $y = f(x + 1)$
- $y = f(x - 1)$

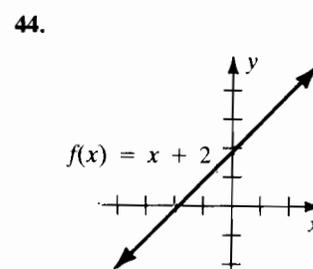


FIGURA 102

- $y = f(x) + 3$
- $y = f(x) - 2$
- $y = f(x + 2)$
- $y = f(x - 5)$

En los problemas 45 al 50, la gráfica dada es una gráfica trasladada de la función dada. Halle la ecuación de la gráfica.

45. $f(x) = |x|$

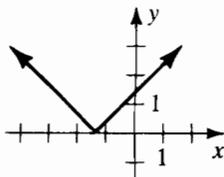


FIGURA 103

46. $f(x) = x^2 + 1$

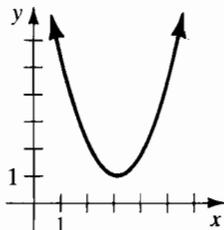


FIGURA 104

49. $f(x) = x^2$

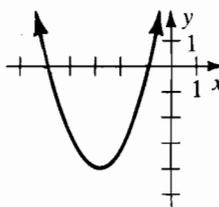


FIGURA 107

50. $f(x) = -|x|$

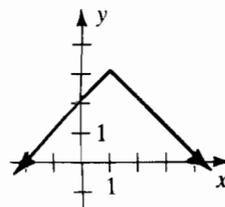


FIGURA 108

47. $f(x) = -x^2$

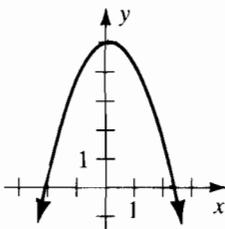


FIGURA 105

48. $f(x) = \sqrt{1-x}$

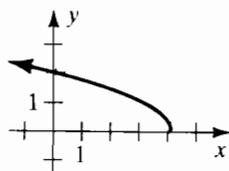


FIGURA 106

En los problemas 51 al 56, halle la gráfica de la función indicada, de la gráfica de f .

51. $f(x) = x^2; y = (x - 2)^2 + 3$

52. $f(x) = \sqrt{x}; y = \sqrt{x + 4} - 1$

53. $f(x) = |x|; y = |x - 1| + 4$

54. $f(x) = x^3; y = (x - 2)^3 - 2$

55. $f(x) = x^2 - 4; y = -(x^2 - 4)$

56. $f(x) = \sqrt{x}; y = -\sqrt{x + 4}$

3.7 Funciones inversas

En esta sección trataremos la **inversa de una función**. Esta será una regla de correspondencia que “invierte” la función original. Por ejemplo, considere la función f determinada por la tabla (a). Invertiendo las columnas, obtenemos la nueva regla de correspondencia dada en la tabla (b). Esta última regla, que es también una función, se denota como f^{-1} .

El símbolo f^{-1} se lee “inversa de f ”. Es importante señalar que “-1” en f^{-1} no es un exponente; esto es,

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

sino que denota la *inversa de f* .

Ahora considere otra función f determinada por la tabla (c). Si invertimos los papeles de x y y en esta tabla, obtenemos la correspondencia dada en la tabla (d). Vemos que esta correspondencia no es una función, puesto que hay dos valores de y — a saber, los números 2 y 3 — asociados con $x = 6$.

f:	
x	y
1	→ 3
2	→ 5
3	→ 2

f^{-1} :	
x	y
3	→ 1
5	→ 2
2	→ 3

(a)

(b)

f:	
x	y
1	→ 4
2	→ 6
3	↗

f^{-1} :	
x	y
4	→ 1
6	→ 2
3	↘

(c)

(d)

FUNCIONES UNO A UNO

Deseamos determinar qué propiedad debe tener una función para que la “regla de inversión” sea también una función. Note que en las tablas (a) y (b), cada elemento del rango está asociado con *sólo un* elemento del dominio, mientras que en las tablas (c) y (d), uno de los elementos del rango (a saber, 6) le correspondía a *más de un elemento* del dominio.

DEFINICION 3

Se dice que una función f es una función **uno a uno** si y sólo si cada elemento del rango de f está asociado con exactamente un elemento de su dominio X .

Es precisamente esta propiedad la que se requiere para que la “regla de inversión” sea una función.

De la definición 3 se deduce que una función f no es uno a uno si se pueden encontrar diferentes elementos $x_1 \neq x_2$ en el dominio de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

EJEMPLO 1

La función $f(x) = x^2$ no es uno a uno, ya que $-3 \neq 3$ y $f(-3) = f(3) = 9$. En otras palabras, la función f no es uno a uno porque el número 9 en su rango le corresponde dos números -3 y 3 en su dominio.

Antes de tratar de hallar la inversa de una función, debe determinar si la función dada es uno a uno. A pesar de que hay una serie de técnicas para hacerlo, trataremos a continuación sólo uno de tales métodos.

PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

Sea $y = f(x)$ una función uno a uno, y considere su gráfica

$$\{(x, y) | y = f(x), x \text{ en el dominio } X \text{ de } f\}$$

Puesto que a cada valor de y le corresponde a lo más un valor de x , cualquier recta horizontal interseca la gráfica de $y = f(x)$ en a lo sumo un punto. Y, al contrario, si cada recta horizontal interseca la gráfica de una función en máximo un punto, entonces la función es uno a uno. La prueba de la recta horizontal se ilustra en la figura 109.

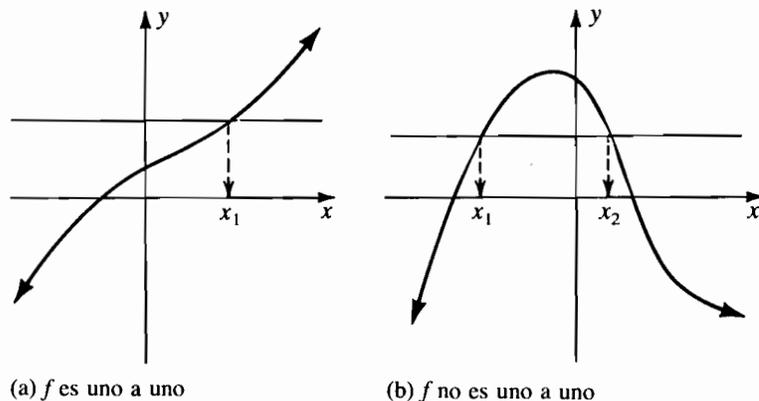


FIGURA 109

EJEMPLO 2

Determine si la función $f(x) = x^2 - 2x$ es uno a uno.

Solución. En la figura 110 vemos que una recta horizontal interseca la gráfica de la función x en más de un punto. Se deduce, por la prueba de recta horizontal, que f no es uno a uno.

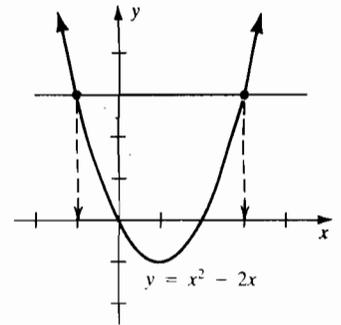


FIGURA 110

Suponga que f es una función uno a uno con dominio X y rango Y . Entonces, para un número x en X , $y = f(x)$ es un número en Y . No hay otro número x en X correspondiente a ese número y . Por tanto, la correspondencia inversa g de Y a X es una función que debe dar

$$g(f(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en } X$$

Pero si $f(x) = y$ y $x = g(y)$, entonces debemos tener también

$$f(g(y)) = y \text{ para cada } y \text{ en } Y$$

Pero renombrando a y como x en el enunciado anterior, tenemos

$$f(g(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en } Y$$

Sintetizamos este análisis con una definición de la inversa de una función f .

DEFINICION 4

Sea f una función uno a uno, con dominio X y rango Y . La **inversa de f** es una función g con dominio Y y rango X para la cual

$$f(g(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en } Y \tag{16}$$

$$y \quad g(f(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en } X$$

También decimos que las funciones f y g son funciones inversas entre sí.

Como en el análisis que abrió esta sección, denotaremos la inversa de una función f uno a uno como f^{-1} . Por tanto, (16) es equivalente a

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x \tag{17}$$

Estas dos ecuaciones se interpretan en la figura 111. Observe que en la figura 111(a) x es un elemento en el rango Y , mientras que en la figura 111(b) x representa un elemento en el dominio X .

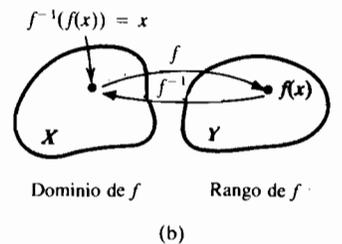
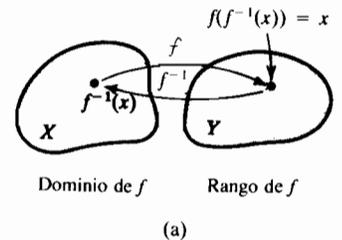
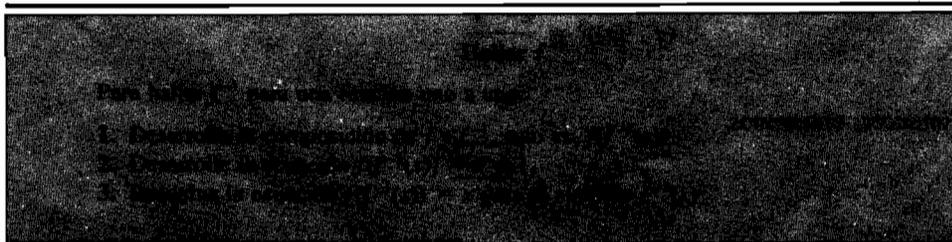


FIGURA 111

HALLAR f^{-1}

La primera de las ecuaciones en (17) es particularmente útil, ya que puede utilizarse para hallar f^{-1} . El método se sintetiza como sigue.



EJEMPLO 3 _____

Halle la inversa de la función $f(x) = 5x - 7$.

Solución. Puesto que la gráfica de $y = 5x - 7$ es una línea recta no horizontal, se deduce por la prueba de la recta horizontal que f es una función uno a uno. Para hallar f^{-1} primero reescribimos la función f como

$$f(\quad) = 5(\quad) - 7$$

de modo que

$$f(f^{-1}(x)) = 5f^{-1}(x) - 7$$

Ahora resolvemos la ecuación

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{o} \quad 5f^{-1}(x) - 7 = x$$

para $f^{-1}(x)$. El resultado es

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$$

EJEMPLO 4 _____

Halle la inversa de la función

$$f(x) = \frac{2}{x^3 + 1}$$

Solución. Dejamos que usted verifique que f es una relación uno a uno (véase problema 40).

Ya que

$$f(\quad) = \frac{2}{(\quad)^3 + 1}$$

se deduce que

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2}{(f^{-1}(x))^3 + 1}$$

La ecuación $f(f^{-1}(x)) = x$ es equivalente a

$$\frac{2}{(f^{-1}(x))^3 + 1} = x$$

o

$$2 = x[(f^{-1}(x))^3 + 1]$$

$$2 = x(f^{-1}(x))^3 + x$$

$$2 - x = x(f^{-1}(x))^3$$

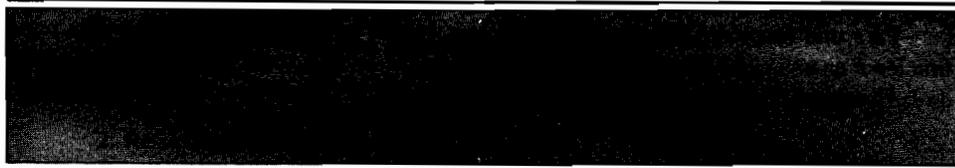
$$(f^{-1}(x))^3 = \frac{2 - x}{x}$$

Entonces, obtenemos

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2 - x}{x}}$$

METODO ALTERNATIVO DE HALLAR f^{-1}

La inversa de una función puede hallarse de una manera diferente de la que se mostró en los ejemplos 3 y 4. Si intercambiamos, o renombramos, las variables x y y en una función uno a uno $y = f(x)$, obtenemos entonces la ecuación $x = f(y)$. Esta ecuación determina la "regla de inversión" o función inversa. Para hallar f^{-1} , simplemente despejamos y en términos de x . Esto da la forma deseada $y = f^{-1}(x)$. El procedimiento se sintetiza como sigue.



EJEMPLO 5

Halle la inversa de la función f en el ejemplo 3.

Solución. En el ejemplo 3 escribimos la función dada como

$$y = 5x - 7$$

Intercambiando las variables x y y , da

$$x = 5y - 7$$

Despejando y , da como resultado

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}, \quad \text{o} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$$

GRAFICA DE f^{-1}

Suponga que f es una función uno a uno y que (a, b) denota cualquier punto de la gráfica de f . Entonces, $f(a) = b$, y, según (17),

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

Esto significa que el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1} . Pero puesto que los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos con respecto a la recta $y = x$, concluimos que la gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en la recta $y = x$ (véase figura 112).

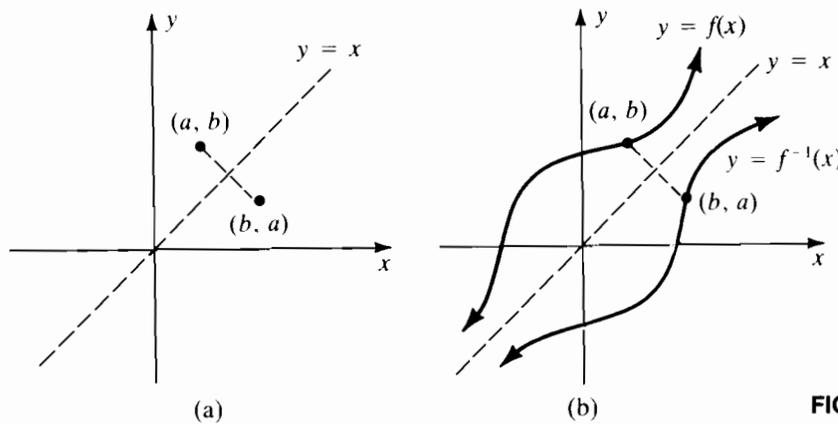


FIGURA 112

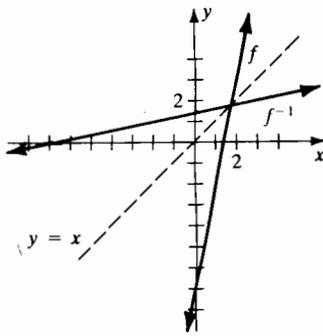


FIGURA 113

EJEMPLO 6

En el ejemplo 3 vimos que la inversa de

$$f(x) = 5x - 7 \text{ es } f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}.$$

Las gráficas de f y f^{-1} se comparan en la figura 113.

Para una función f que no sea uno a uno, puede ser posible determinar una nueva función F en una parte del dominio de f de modo que F sea uno a uno y tenga el mismo rango de f . Entonces, la función F determinada en el dominio restringido, tendrá una inversa.

EJEMPLO 7

En el ejemplo 1 vimos que $f(x) = x^2$ no es una función uno a uno. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$. Ahora, definiendo $f(x) = x^2$ solamente en $[0, \infty)$, vemos en las figuras 114(a) y (b) que F es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. La gráfica de F^{-1} se muestra en la figura 114(c). Observe que f y F tienen el mismo rango.

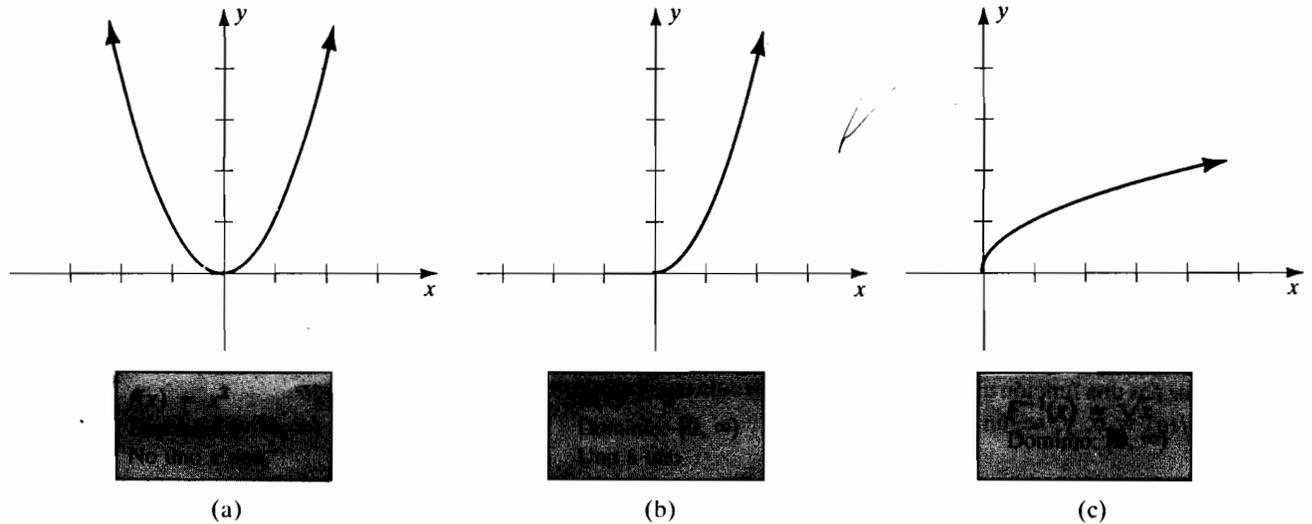


FIGURA 114

El concepto ilustrado en el ejemplo 7 se utilizará en la sección 7.9.

EJERCICIO 3.7

En los problemas 1 al 10, determine si la función dada es uno a uno, examinando su gráfica. Si f es uno a uno, halle f^{-1} .

1. $f(x) = 3x$

3. $f(x) = x^4$

5. $f(x) = x^3$

7. $f(x) = x^2 - 6x$

2. $f(x) = -2x + 1$

4. $f(x) = x^2 - 2$

6. $f(x) = (x - 2)(x + 1)$

8. $f(x) = \frac{2}{x}$

9. $f(x) = \frac{1}{x - 3}$

10. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

En los problemas 11 al 20, la función dada es uno a uno. Halle f^{-1} .

11. $f(x) = 3x - 9$

13. $f(x) = \frac{2}{5x + 8}$

12. $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

14. $f(x) = \frac{7x}{2x - 3}$

15. $f(x) = \frac{1}{x} + 4$

16. $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$

17. $f(x) = x^3 + 2$

18. $f(x) = 1 - x^3$

19. $f(x) = \sqrt{x}$

20. $f(x) = 6 - 9\sqrt{x}$

En los problemas 21 al 24, verifique que las funciones dadas sean inversas entre sí.

21. $f(x) = \frac{1}{4}x + 2, g(x) = 4x - 8$

22. $f(x) = x^5 + 6, g(x) = \sqrt[5]{x-6}$

23. $f(x) = \frac{x-2}{x+2}, g(x) = \frac{2(1+x)}{1-x}$

24. $f(x) = \frac{x}{4x+3}, g(x) = \frac{3x}{1-4x}$

En los problemas 25 y 26, determine el dominio y el rango de f^{-1} , sin hallar la inversa.

25. $f(x) = \sqrt{x-3}$

26. $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

En los problemas 27 al 30, la función dada es uno a uno. Sin hallar f^{-1} , halle, en el valor x indicado, el punto correspondiente en la gráfica de f^{-1} .

27. $f(x) = 2x^3 + 2x; x = 2$

28. $f(x) = 8x - 3; x = 5$

29. $f(x) = x + \sqrt{x}; x = 9$

30. $f(x) = \frac{4x}{x+1}; x = \frac{1}{2}$

En los problemas 31 al 34, trace las gráficas de f y f^{-1} utilizando los mismos ejes de coordenadas.

31. $f(x) = 2x + 2$

32. $f(x) = -2x + 3$

33. $f(x) = x^3$

34. $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

En los problemas 35 y 36, trace la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f .

35.

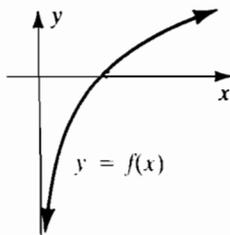


FIGURA 115

36.

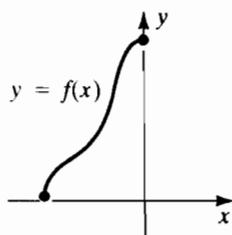


FIGURA 116

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de f a partir de la gráfica de f^{-1} .

37.

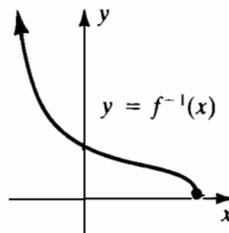


FIGURA 117

38.

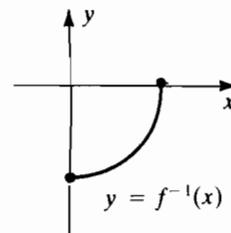


FIGURA 118

Una definición equivalente a la función uno a uno está dada por lo siguiente: la función f es uno a uno si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ para x_1 y x_2 en el dominio de f . En los problemas 39 al 44, utilice esta definición para verificar que la función dada sea uno a uno.

39. $f(x) = 3x - 5$

41. $f(x) = \sqrt{x}$

43. $f(x) = \frac{1}{x}$

40. $f(x) = \frac{2}{x^3 + 1}$

42. $f(x) = 2x + 6$

44. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, x > 0$

En los problemas 45 al 48, verifique que la función dada sea su propia inversa.

45. $f(x) = -x$

47. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

46. $f(x) = \frac{1}{x}$

48. $f(x) = \sqrt{4-x^2}, 0 \leq x \leq 2$

En los problemas 49 y 50, la función f dada no es uno a uno. Halle F^{-1} para la función F y el dominio de F^{-1} .

49. $f(x) = (3 - 2x)^2, (-\infty, \infty);$
 $F(x) = (3 - 2x)^2, [\frac{3}{2}, \infty)$

50. $f(x) = 4x^2 + 5, (-\infty, \infty);$
 $F(x) = 4x^2 + 5, [0, \infty)$

3.8 Variación

FUNCION POTENCIA

Una función de la forma

$$f(x) = kx^n, \quad k \text{ es una constante} \quad (18)$$

se llama **función potencia**. Las funciones potencia juegan un papel importante en muchas áreas de la ciencia. Puede probarse que (18) es una función para cualquier número real n ; el dominio de f depende de n . La figura 119 ilustra varias funciones potencia con $k = 1$ que se dan comúnmente.

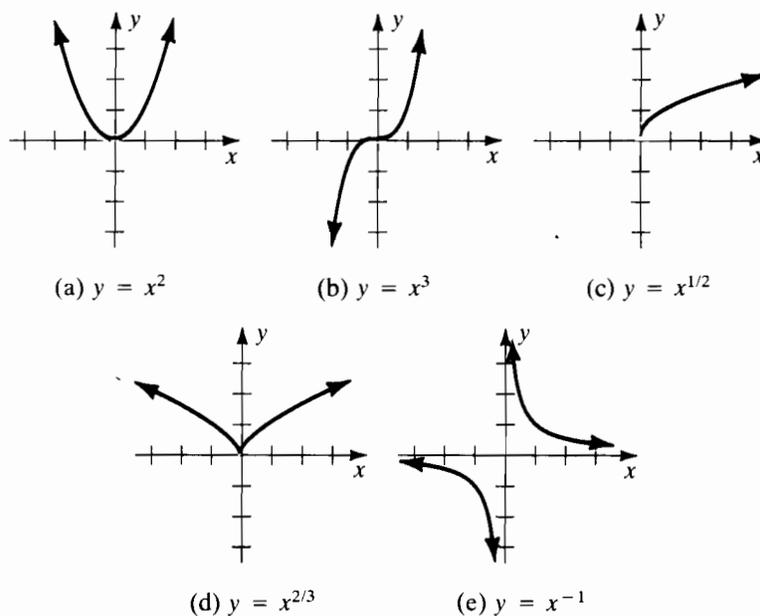


FIGURA 119

EJEMPLO 1

Grafique la función $f(x) = (x - 3)^{2/3}$

Solución. En el ejemplo 8 de la sección 3.5 graficamos la función potencia de $f(x) = x^{2/3}$. (Véase también figura 119(d)). La gráfica de $f(x) = (x - 3)^{2/3}$ es la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ trasladada 3 unidades a la derecha. El intersección y de la gráfica es $f(0) = (-3)^{2/3} = 2.08$. (Véase figura 120).

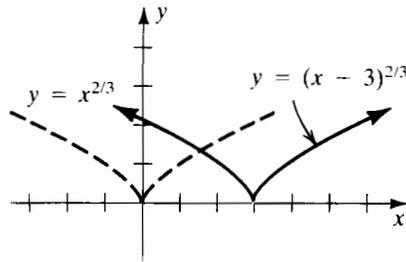


FIGURA 120

VARIACION DIRECTA E INVERSA

En las aplicaciones, una función potencia proviene de un concepto de variación. Si una variable y está dada por la fórmula

$$y = kx^n, \text{ donde } n > 0 \tag{19}$$

decimos que y varía directamente con la n ésima potencia de x , o que y es **directamente proporcional** a x^n . Si y está dado por

$$y = \frac{k}{x^n} = kx^{-n}, \text{ } n > 0 \tag{20}$$

decimos que y **varía inversamente** con la n ésima potencia de x , o que y es **inversamente proporcional** a x^n . En (19) y (20), k se llama **constante de proporcionalidad**.

EJEMPLO 2

Suponga que y es directamente proporcional a x^3 . Si $y = 4$ cuando $x = 2$, ¿cuál es el valor de y cuando $x = 4$?

Solución. Según (19) podemos escribir

$$y = kx^3$$

Sustituyendo $y = 4$ y $x = 2$ en esta ecuación, obtenemos la constante de proporcionalidad k , puesto que

$$4 = k8 \text{ implica que } k = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $y = \frac{1}{2}x^3$. Finalmente, cuando $x = 4$, tenemos

$$y = \frac{1}{2}(4)^3, \text{ o } y = 32$$

En física, la **ley de Hooke** afirma que la fuerza F requerida para mantener estirado un resorte x unidades por encima de su longitud natural (no estirado) es proporcional a la elongación x ; esto es,

$$F = kx \tag{21}$$

(Véase figura 121).

EJEMPLO 3

Un resorte cuya longitud natural es de $\frac{1}{4}$ de pie se estira 1 pulgada con una fuerza de 30 libras. ¿Qué fuerza se necesita para estirarlo a una longitud de 1 pie?

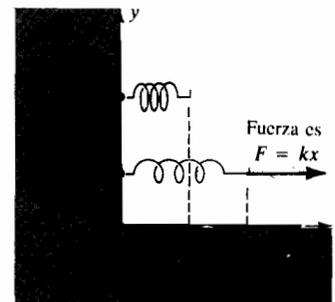


FIGURA 121

Solución. La elongación de 1 pulgada es equivalente a $\frac{1}{12}$ pies. Por tanto, según (21), tenemos

$$30 = k\left(\frac{1}{12}\right), \quad \text{o} \quad k = 360 \text{ lb/pie}$$

por tanto, $F = 360x$. Cuando el resorte se estira a una longitud de 1 pie, su elongación es $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ pies. Por tanto, con $x = \frac{3}{4}$, se deduce que

$$F = 360 \cdot \frac{3}{4} = 270 \text{ lb}$$

VARIACION CONJUNTA Y COMBINADA

Una variable puede ser directamente proporcional a los productos de potencias de varias variables. Si la variable z está dada por

$$z = kx^m y^n, \quad m > 0, \quad n > 0 \tag{22}$$

decimos que z **varía conjuntamente** con la potencia m de x y la potencia n de y , o que z es **conjuntamente proporcional** a x y y . El concepto de variación conjunta expresado en (22) puede, por supuesto, extenderse a productos de potencias de más de dos variables. A más de esto, una cantidad puede ser directamente proporcional a varias variables e inversamente proporcional a otras variables. Este tipo de variación se denomina **variación combinada**.

EJEMPLO 4

Considere el cilindro circular recto y el cono circular recto mostrados en la figura 122. El volumen V de cada uno es conjuntamente proporcional al cuadrado de su radio r y su altura h . Esto es,

$$V_{\text{cilindro}} = k_1 r^2 h \quad \text{y} \quad V_{\text{cono}} = k_2 r^2 h$$

Se produce que $k_1 = \pi$ y $k_2 = \pi/3$. Por tanto, los volúmenes son

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h \quad \text{y} \quad V_{\text{cono}} = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

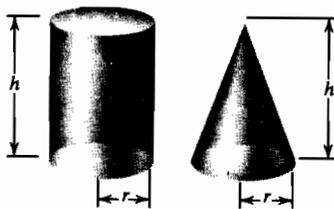


FIGURA 122

EJEMPLO 5

La resistencia hidrodinámica D para un bote que se desliza a través del agua es conjuntamente proporcional a la densidad ρ del agua, el área A de la parte húmeda del casco del bote y al cuadrado de su velocidad v . Esto es,

$$D = k\rho Av^2 \tag{23}$$

(Véase figura 123).

La misma relación (23) puede utilizarse algunas veces para determinar la *fuerza de arrastre* que actúa sobre un objeto que se mueve a través del aire.

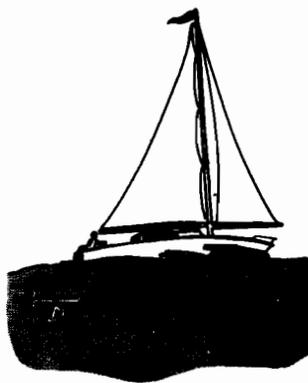


FIGURA 123

EJEMPLO 6

La fórmula

$$z = k \frac{x^3 y^2}{\sqrt{w}}$$

ilustra la variación combinada; esto es, z varía conjuntamente con el cubo de x y el cuadrado de y e inversamente con la raíz cuadrada de w .

EJEMPLO 7

Suponga que las corrientes eléctricas I_1 e I_2 fluyen en cables paralelos largos, como lo muestra la figura 124. La fuerza F_L por longitud de unidad ejercida sobre un cable a causa del campo magnético alrededor del otro cable es conjuntamente proporcional a las corrientes I_1 e I_2 , e inversamente proporcional a la distancia r entre los cables:

$$F_L = k \frac{I_1 I_2}{r}$$

Si las corrientes fluyen en la misma dirección, como se muestra en la figura, F_L es una fuerza atrayente. Cuando I_1 e I_2 se mueven en dirección opuesta, la fuerza F_L es una fuerza repulsiva.

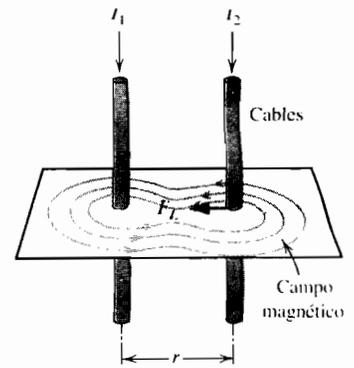


FIGURA 124

EJERCICIO 3.8

En los problemas 1 al 6, grafique la función potencia dada.

- 1. $f(x) = x^4$
- 2. $f(x) = x^{-3}$
- 3. $f(x) = x^{3/2}$
- 4. $f(x) = -2x^{2/3}$
- 5. $f(x) = -x^{-1}$
- 6. $f(x) = x^{-1/2}$

En los problemas 7 al 16, utilice las gráficas obtenidas en los problemas 1 al 6 para obtener la gráfica de la función dada.

- 7. $f(x) = x^4 - 1$
- 8. $f(x) = x^4 + 2$
- 9. $f(x) = (x - 1)^4$
- 10. $f(x) = -\frac{1}{2}x^4$
- 11. $f(x) = (x + 1)^{-3}$
- 12. $f(x) = x^{-3} - 1$
- 13. $f(x) = x^{3/2} + 4$
- 14. $f(x) = (x - 2)^{2/3}$
- 15. $f(x) = (x - 3)^{-1}$
- 16. $f(x) = (x + 1)^{-1/2}$

17. La velocidad del sonido en el aire varía con la temperatura según la función potencia

$$v(T) = 33,145\sqrt{T/273}$$

donde v es la velocidad del sonido en centímetros por segundo y T es la temperatura del aire en grados Kelvin (273° Kelvin = 0° Celsius). ¿En qué día viaja más rápidamente el sonido de fuegos artificiales detonadores: 4 de julio ($T = 310^\circ$ K) o 1° de enero ($T = 270^\circ$ K)?, ¿cuánto más rápidamente?



18. Estudios empíricos indican que el periodo de vida de un mamífero en cautiverio está relacionado con el tamaño del cuerpo por medio de la función potencia

$$L(M) = (11.8)M^{0.20}$$

donde L es el periodo de vida en años y M es la masa del cuerpo en kilogramos.

- (a) ¿Qué predice esta función para el periodo de vida en un elefante de 4,000 kg en un zoológico?
- (b) ¿Qué predice esta función para el periodo de vida de un hombre de 80 kg recluso en una prisión?

19. Suponga que y varía directamente con el cuadrado de x . Si $y = 3$ cuando $x = 1$, ¿cuál es el valor de y cuando $x = 2$?

20. Suponga que y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x . Si $y = 4$ cuando $x = 16$, ¿cuál es el valor de y cuando $x = 25$?

21. Suponga que w es inversamente proporcional a la raíz cúbica de t . Si $w = 2$ cuando $t = 27$, ¿cuál es el valor de w cuando $t = 8$?

22. Suponga que s varía inversamente al cuadrado de r . Si un valor de r se triplica, ¿cuál es el efecto sobre s ?

23. La distancia s a la que viaja una piedra cuando cae de un edificio muy alto es directamente proporcional al cuadrado del tiempo t de viaje. Si la piedra cae 64 pies en 2 segundos, halle una fórmula que relacione s y t . ¿Hasta dónde cae la piedra en 5 segundos?, ¿hasta dónde cae la piedra entre 2 y 3 segundos?

24. La velocidad v de una piedra lanzada desde un edificio muy alto varía directamente con el tiempo t de vuelo. Halle una fórmula que relacione v y t si la velocidad de la piedra al cabo de un segundo es de 32 pies/s. Si la piedra se lanza desde la parte superior de un edificio que tiene 144 pies de altura, ¿cuál es la velocidad cuando toca el suelo? [Sugerencia: utilice el problema 23].
25. El periodo T de un péndulo plano varía directamente a la raíz cuadrada de su longitud L . ¿Cuánto se debe cambiar la longitud L para doblar el periodo del péndulo?
26. El peso p de una persona varía directamente con el cubo del largo l de la persona. A la edad de 13 una persona de 60 pulgadas de altura pesa 120 libras. ¿Cuál es el peso de la persona a los 16 años cuando mide 72 pulgadas?
27. El área superficial S (en metros cuadrados) de un animal es directamente proporcional a su peso p elevado a la potencia dos tercios y medido en kg. Para los humanos se toma que la constante de proporcionalidad es $k = 0.11$. Halle el área superficial de una persona cuyo peso es de 81 kg.
28. Según la tercera ley de Kepler del movimiento planetario, el cuadrado del periodo P de un planeta (esto es, el tiempo que toma a un planeta girar alrededor de Sol) es proporcional al cubo de su distancia media del Sol. El periodo de la Tierra es de 365 días y su distancia media del Sol es de 92,900,000 millas. Determine el periodo de Marte dado que su distancia media del Sol es de 142,000,000 millas.
29. La ley de la gravedad de Newton afirma que la fuerza F de atracción entre dos masas esféricas M y m cuyos centros de masa están r unidades separados, es conjuntamente proporcional a la primera potencia de cada masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r (véase figura 125). Exprese esta variación combinada como fórmula. Si la distancia r se reduce a la mitad, ¿entonces cuál es el efecto sobre la fuerza?
30. La energía cinética K de un cuerpo en movimiento varía conjuntamente con el producto de su masa m y el cuadrado de su

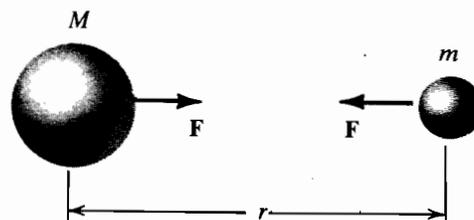


FIGURA 125

- velocidad v . Si la constante de proporcionalidad es de $\frac{1}{2}$, halle la energía cinética de un neutrón de masa 1.7×10^{-27} kg que se mueve a una velocidad constante de 3.5×10^4 m/s.
31. Según la ley general de los gases, la presión P de una cantidad de gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta T del gas, e inversamente proporcional a su volumen V . Exprese esta variación combinada como fórmula. Un balón grande contiene 500 pies cúbicos de un gas al nivel del suelo, donde la presión es de 14.7 lb/pulgada² y la temperatura absoluta es de 293°K (20° C). ¿Cuál es el volumen ocupado por este gas a una altitud de 10 millas, donde la presión es de 1.5 lb/pulgada² y la temperatura absoluta es de 218° K (-55° C)?
32. En el estudio de cuerpos elásticos, la tensión es directamente proporcional a la distensión. Para un alambre de longitud L y área transversal A que se estira en una cantidad e por medio de una fuerza aplicada F , la tensión se define como F/A y la distensión está dada por e/L . Halle una fórmula que exprese e en términos de las otras variables.
33. La temperatura de un tubo Pyrex se eleva de una temperatura t_1 a una temperatura final t_2 . La expansión térmica e del tubo es conjuntamente proporcional a su longitud L y a la elevación de la temperatura. Cuando un tubo de 10 cm de longitud se calienta de 20° C a 420° C, su expansión térmica es de 0.012 cm. ¿Cuál es la expansión térmica del mismo tubo cuando se calienta de 20° C a 550° C?

CONCEPTOS IMPORTANTES

Sistema de coordenadas cartesiano (rectangular)
 Ejes coordenados
 eje x
 eje y
 Plano cartesiano
 Plano de coordenadas
 Plano xy
 Cuadrantes
 Punto
 coordenadas
 abscisa
 ordenada
 Marcación de puntos
 Gráficas
 de una relación
 de una ecuación
 Intersectos
 Simetría

Fórmula de la distancia
 Circunferencia
 Fórmula del punto medio
 Pendiente
 Ecuaciones de rectas
 Forma punto-pendiente
 Forma pendiente-intersección
 Recta horizontal
 Recta vertical
 Rectas paralelas
 Rectas perpendiculares
 Función
 Dominio
 Variable dependiente
 Variable independiente
 Rango
 Función definida a trozos

Función constante
 Prueba de la recta vertical
 Función lineal
 Función par
 Función impar
 Composición de funciones
 Gráficas trasladadas
 Reflexiones
 Función inversa
 Función uno a uno
 Prueba de la recta horizontal
 Función potencia
 Variación directa
 Variación inversa
 Variación conjunta
 Variación combinada

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 20, llene los espacios o responda falso o verdadero.

1. Si (a, b) es un punto del segundo cuadrante, entonces $(a, -b)$ es un punto del _____ cuadrante.
2. La distancia entre los puntos $(5, 1)$ y $(-1, 9)$ es _____.
3. Si la gráfica de una ecuación contiene el punto $(2, 3)$ y es simétrica con respecto al eje x , entonces la gráfica también contiene el punto _____.
4. Si A, B , y C son puntos en el plano cartesiano, entonces siempre es verdadero que $d(A, B) + d(B, C) > d(A, C)$. _____
5. El centro y el radio de la circunferencia $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 8$ son _____.
6. Las rectas $2x - 5y = 1$ y $kx + 3y + 3 = 0$ son paralelas si $k =$ _____.
7. Los intersejos en x y en y y la pendiente de la recta $-4x + 3y - 48 = 0$ son _____.
8. La gráfica de $x = -6$ es una _____.
9. Si f es una función tal que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. _____
10. $f(x) = (x^3 + x)^5$ es una función impar. _____
11. Los intersejos en x y en y de la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ son _____.
12. El dominio de la función $f(x) = 1/\sqrt{3 - x}$ es _____.
13. La relación $x^2 + y^2 = 9$ es una función _____.
14. Una función $y = f(x)$ tiene una inversa f^{-1} si y sólo si es ____.
15. La función $f(x) = 5$ tiene una inversa. _____
16. La gráfica de una función puede poseer sólo un intersejo en y . _____
17. La gráfica de una función diferente de la función cero no puede ser simétrica con respecto al eje x . _____
18. Las raíces de la función $f(x) = x(x^2 - 1)(x^3 + 8)$ son ____.
19. Si f es una función uno a uno con dominio el conjunto R de números reales, entonces $f^{-1}(f(6)) =$ _____.
20. Si p varía inversamente al cubo de q y $p = 9$ cuando $q = -1$, entonces $p =$ _____ cuando $q = 3$.
21. Determine si los puntos $A(1, 1)$, $B(3, 3)$ y $C(5, 1)$ son vértices de un triángulo rectángulo.
22. Halle una ecuación de una circunferencia cuyos puntos $(3, 4)$ y $(5, 6)$ son los puntos extremos de un diámetro.
23. Halle una ecuación de la recta que pasa por $(1, 2)$ que es perpendicular a la recta $y = 3x - 5$.
24. Halle una ecuación de la recta que pasa por $(2, 4)$ paralela a la recta que pasa por $(-1, -1)$ y $(4, -3)$.
25. Considere el segmento de recta que une $(-1, 6)$ y $(1, 10)$ y el segmento de recta que une $(7, 3)$ y $(-3, -2)$. Halle una ecuación de la recta que contenga los puntos medios de éstos dos segmentos de recta.
26. Halle todos los números del dominio de $f(x) = x^2 + 2x$ que correspondan al número 15 del rango.
27. Según la gráfica de $y = f(x)$ mostrada en la figura 126, trace las gráficas de cada uno de los siguientes numerales:

(a) $y = f(x) + 1$	(b) $y = f(x + 1)$
(c) $y = f(x) - 2$	(d) $y = f(x - 2)$
(e) $y = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$	(f) $y = -f(x)$

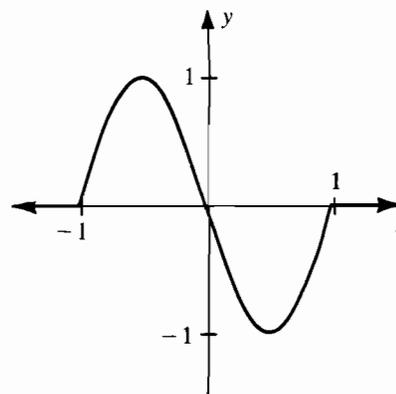


FIGURA 126

28. Sea $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, y $h(x) = [x]^*$. Grafique las funciones (a) $f + g$, (b) fg , y (c) $f + h$.
29. Si $f(x) = 4x^2 - 2x + 8$, calcule y simplifique

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$
30. Si $f(x) = x^3 + 6$, evalúe y simplifique

$$\frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

En los problemas 31 y 32, grafique la relación dada.

- | | |
|------------------|-------------------|
| 31. $ y \leq x$ | 32. $y > x^2 + 1$ |
|------------------|-------------------|

En los problemas 33 al 36, grafique la ecuación dada.

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| 33. $ y = x $ | 34. $ x + y = 1$ |
| 35. $y^2 - x^4 = 0$ | 36. $x^2 + y^2 - 25 = 0$ |

En los problemas 37 al 42, grafique la función dada.

- | | |
|--|-----------------------|
| 37. $f(x) = 3x - 9$ | 38. $f(x) = -5x$ |
| 39. $f(x) = 2x^2 + 1$ | 40. $f(x) = x(x - 3)$ |
| 41. $f(x) = x + x - 3 $ | |
| 42. $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ | |

En los problemas 43 y 44, halle $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ (1/g)$ para cada una de las funciones dadas.

- | |
|---|
| 43. $f(x) = x^3$, $g(x) = 2/x^2$ |
| 44. $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 3x + 1$ |

En los problemas 45 y 46, halle la inversa de la función uno a uno dada.

- | | |
|------------------------|----------------------------|
| 45. $f(x) = 5/(x - 2)$ | 46. $f(x) = 3 + 4\sqrt{x}$ |
|------------------------|----------------------------|

* $h(x) = [x]$ es la función parte entera. (Véase problema 61 en el ejercicio 3.5).

47. Exprese el radio r de un círculo como una función de su área A .
48. Una caja rectangular, abierta arriba, tiene una base cuadrada. Sea x la longitud de un lado de esta base. Si el volumen de la caja es de 1,000 pulgadas cúbicas, exprese el área superficial total S de la caja como una función de x .
49. Considere el rectángulo inscrito en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, mostrado en la figura 127. Exprese el área A del rectángulo como una función de x .

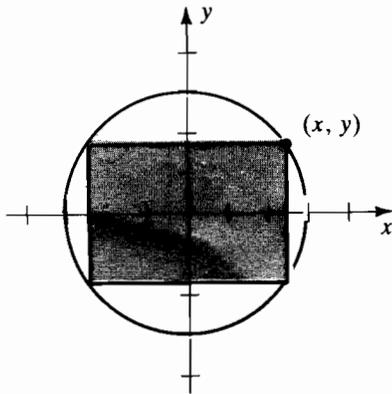


FIGURA 127

50. Considere los cuatro círculos de radio h mostrados en la figura 128. Exprese el área A de la región sombreada como una función de h .

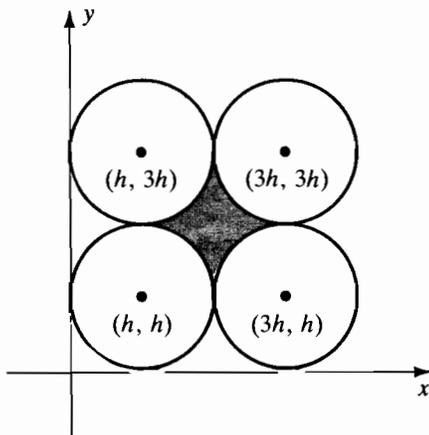


FIGURA 128

51. Si $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un número racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional,} \end{cases}$ halle lo siguiente.
- (a) $f(\frac{1}{3})$ (b) $f(-1)$
 (c) $f(\sqrt{2})$ (d) $f(\sqrt{3}/2)$
 (e) $f(\pi)$ (f) $f(5.72)$

52. Complete, tomando como referencia la gráfica de la función $y = f(x)$ que se muestra en la figura 129.

$$\begin{array}{ll} f(-2) = \underline{\hspace{2cm}} & f(2.5) = \underline{\hspace{2cm}} \\ f(-1) = \underline{\hspace{2cm}} & f(3) = \underline{\hspace{2cm}} \\ f(0) = \underline{\hspace{2cm}} & f(4) = \underline{\hspace{2cm}} \\ f(1) = \underline{\hspace{2cm}} & f(5) = \underline{\hspace{2cm}} \\ f(2) = \underline{\hspace{2cm}} & f(5.5) = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

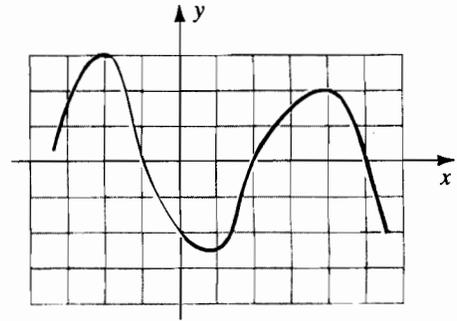


FIGURA 129

53. Un modelo simple de formación glaciár predice que la densidad h de un pedazo de hielo a una distancia r de su centro C está dada por la función

$$h(r) = \sqrt{(2\tau_0/\rho g)(L - r)}$$

donde τ_0 es una constante llamada límite de tensión, ρ es la densidad del hielo, g es la aceleración de gravedad y $2L$ es la anchura de un corte transversal del pedazo de hielo (véase figura 130). Utilizando datos de estudios sobre glaciares en Groenlandia, tenemos que

$$\tau_0/\rho g \approx 11 \text{ m} \text{ y } L \approx 450,000 \text{ m}$$

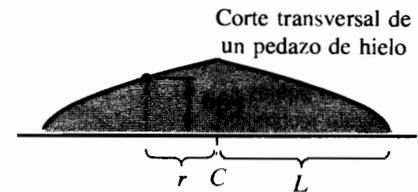


FIGURA 130

- (a) ¿Cuál es el dominio de la función h ?
 (b) Utilice la función para predecir la densidad del pedazo de hielo de Groenlandia en su centro.
 (c) ¿A qué distancia del centro se predice que el glaciár será tan denso como en el centro?
54. Kinnear y Brown (1967) presumieron que la velocidad mínima R del corazón (en latidos por segundo) de los marsupiales está dada por la función potencia

$$R(m) = 106m^{-0.27}$$

donde m es la masa del cuerpo (en kilogramos).

4.1 Funciones cuadráticas

Funciones polinomiales

En el capítulo 3 graficamos funciones tales como $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 5x^2 - 4$, y $h(x) = x^3$. Estas funciones, en las cuales la variable de cada término se eleva a una potencia entera no negativa, son ejemplos de **funciones polinomiales**. En general, tenemos la siguiente definición:

DEFINICION 1

Una función f se llama **función polinomial** si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde a_0, a_1, \dots, a_n son constantes reales y n es un entero no negativo.

Si $a_n \neq 0$, decimos entonces que una función polinomial f tiene **grado n** . El número a_n se denomina **coeficiente principal** del polinomio.

FUNCIONES CUADRATICAS

Para $n = 0$ y $n = 1$ tenemos, respectivamente,

$$f(x) = a_0, \quad \text{una función constante}$$

$$f(x) = a_1 x + a_0, \quad \text{una función lineal}$$

Una función polinomial de grado $n = 2$,

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

se llama **función cuadrática**. Por simplificar escribimos la forma general de una función cuadrática f como

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

La gráfica de una función cuadrática se denomina **parábola**. Se puede demostrar que todas las funciones cuadráticas tienen una gráfica de forma similar a la gráfica de $f(x) = x^2$. Si $a > 0$ en (1), la parábola se abrirá hacia arriba como en la figura 1(a), mientras que si $a < 0$ en (1) la parábola se abrirá hacia abajo como en la figura 1(b).

En el caso del polinomio cuadrático de término único $f(x) = ax^2$, las gráficas de $f(x) = ax^2$, $a > 0$, y $f(x) = -ax^2$, $a > 0$ son simples reflexiones una de otra a través del eje x (véase figura 2).

EJEMPLO 1

Grafique $f(x) = -x^2 + 4$.

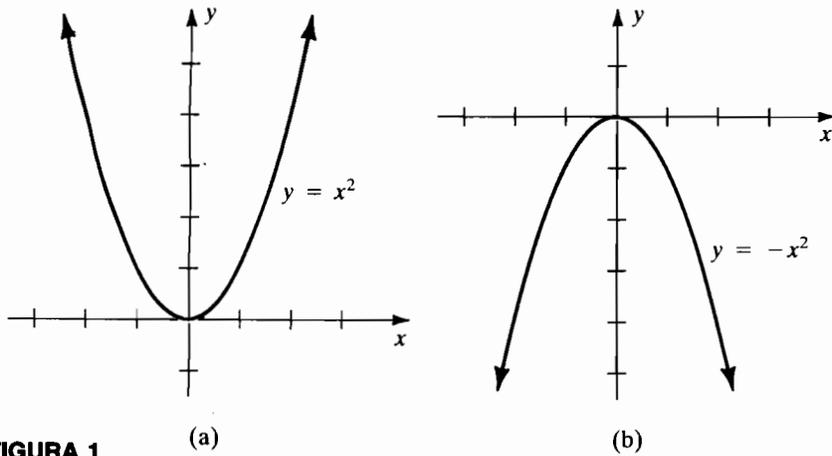


FIGURA 1

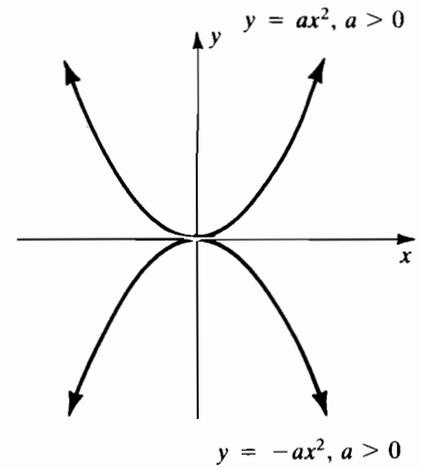


FIGURA 2

EJEMPLO 1 _____

Gráfica $f(x) = -x^2 + 4$.

Solución. Por la sección 3.6 sabemos que la gráfica de $f(x)$ es la gráfica de $y = -x^2$ trasladada 4 unidades hacia arriba. En la figura 3 observe que el intersección y es $f(0) = 4$ y los intersecciónes en x son -2 y 2 (las respuestas de la ecuación $f(x) = 0$ o $-x^2 + 4 = 0$).

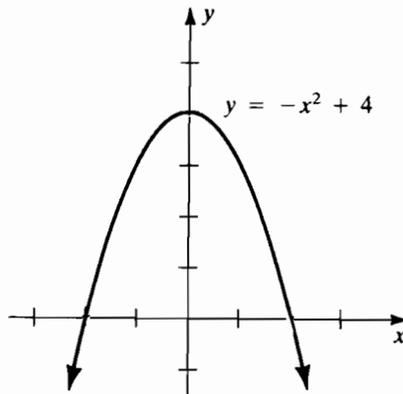


FIGURA 3

INTERSECCIONES

El **intersección en y** para la gráfica (1) es el valor $f(0) = c$. Para determinar si la gráfica tiene **intersecciónes en x**, debemos hallar cualquier raíz real de $f(x)$. Esto es, debemos hallar las soluciones reales, o raíces, de la ecuación $f(x) = 0$ ó

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

Aplicando a (2) la fórmula cuadrática, podemos ver que la gráfica de una función cuadrática puede o no tener intersecciónes en x . La tabla de la página siguiente sintetiza las 3 posibilidades.

$ax^2 + bx + c = 0, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
$b^2 - 4ac > 0$	Dos raíces reales diferentes Dos intersecciones en x La gráfica atraviesa el eje x dos veces.
$b^2 - 4ac = 0$	Raíces reales iguales Un intersección en $x: -b/2a$ La gráfica es tangente al eje x .
$b^2 - 4ac < 0$	No hay raíces reales No hay intersecciones en x La gráfica está completamente encima o completamente debajo del eje x

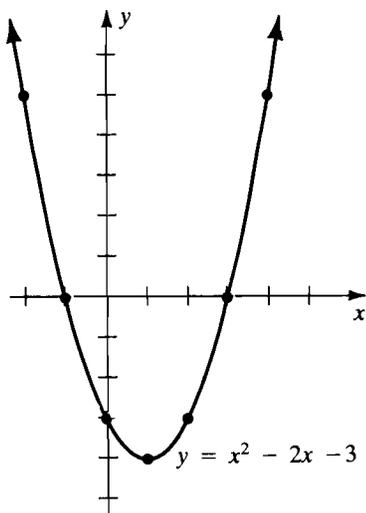


FIGURA 4

EJEMPLO 2

Grafique $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución. Puesto que f es una función cuadrática con $a = 1 > 0$, sabemos que la gráfica será una parábola que se abre hacia arriba. El intersección en y es $f(0) = -3$. Para hallar los intersecciones en x , resolvemos

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

o

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

y hallamos que $x = -1$ ó $x = 3$. Utilizando esta información y marcando puntos de la tabla adjunta, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 4.

x	$f(x)$
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

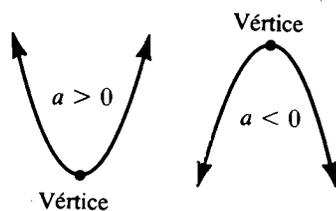


FIGURA 5

VERTICE

Si la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba (abajo), el punto más *bajo* (más *alto*) sobre la parábola se llama **vértice** (véase figura 5).

En el ejemplo 2 parece que el vértice de la parábola está localizado en $(1, -4)$. El poder localizar el vértice de una parábola con precisión sería una ayuda considerable al graficar una función cuadrática. Para hacerlo, consideramos lo siguiente: completando el cuadrado en la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$, podemos escribir

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

como

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{3}$$

Vemos que, sin importar qué valor sustituye a x en (3), el término $(4ac - b^2)/4a$ no se altera. Por tanto el primer término $a[x + (b/2a)]^2$, determina la magnitud relativa de los valores funcionales $f(x)$. Si $a > 0$, entonces $a[x + (b/2a)]^2 \geq 0$. Se deduce que $f(x)$ tiene su *valor mínimo* cuando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

esto es, para $x = -b/2a$. De la misma manera, si $a < 0$, entonces $a[x + (b/2a)]^2 \leq 0$, y f tiene su *valor máximo* cuando $x = -b/2a$. Por tanto, el vértice de la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es el punto

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) \quad (4)$$

EJEMPLO 3

Para $f(x) = x^2 - 2x - 3$, identificamos $a = 1$ y $b = -2$. Entonces el vértice de la gráfica es

$$\left(\frac{-(-2)}{2 \cdot 1}, f\left(\frac{-(-2)}{2 \cdot 1}\right)\right) = (1, f(1)) = (1, -4)$$

como se mostró anteriormente en la figura 4. Puesto que $a = 1 > 0$, $f(1) = -4$ es el valor mínimo de la función.

EJEMPLO 4

Grafique $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$.

Solución. La gráfica de esta función cuadrática es una parábola que se abre hacia abajo, ya que $a = -4 < 0$. Identificando $a = -4$ y $b = 12$, vemos a partir de (4) que el vértice es

$$\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

y que $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ es el máximo valor de la función. Ahora el intersección en y es $f(0) = -9$. Resolviendo $-4x^2 + 12x - 9 = 0$, hallamos que hay sólo un intersección en x , a saber, $\frac{3}{2}$. Por supuesto, esto se esperaba, ya que el vértice $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ está sobre el eje x . Como lo muestra la figura 6 se puede obtener un esquema aproximado con sólo estos dos puntos.

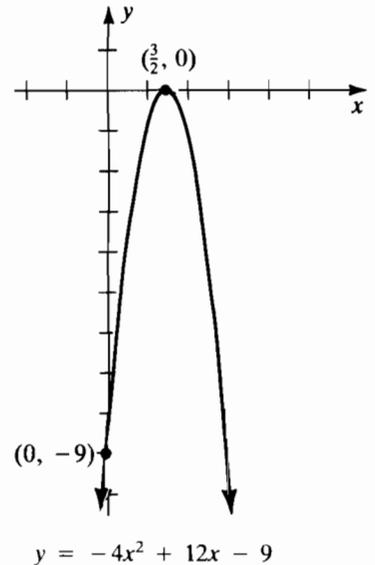


FIGURA 6

EJEMPLO 5

Grafique $f(x) = x^2 + 2x + 4$.

Solución. La gráfica es una parábola que se abre hacia arriba. Identificando $a = 1$ y $b = 2$, vemos que el vértice es

$$\left(\frac{-2}{2 \cdot 1}, f\left(\frac{-2}{2 \cdot 1}\right)\right) = (-1, 3)$$

El intersección en y es $f(0) = 4$. Resolviendo $x^2 + 2x + 4 = 0$, no encontramos soluciones reales. Por tanto, la gráfica no tiene intersecciones en x . Puesto que el vértice está por encima del eje x , la gráfica debe localizarse por completo encima del eje x (véase figura 7).

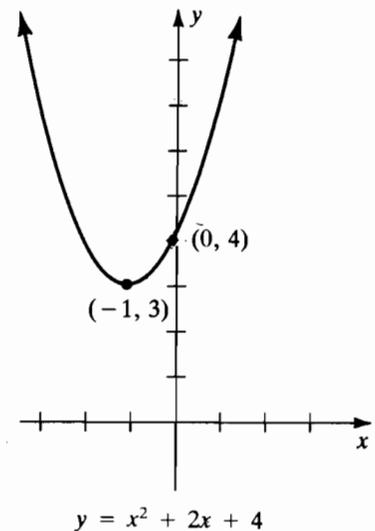


FIGURA 7

TRASLACION DE GRAFICAS

En el ejemplo 1 vimos que la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + c$ puede obtenerse de la gráfica de $y = ax^2$ por medio de una traslación vertical. Completando el cuadrado, podemos escribir $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b \neq 0$, como

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \quad (5)$$

La gráfica de esta ecuación es la gráfica de $y = ax^2$ trasladada horizontalmente $|h|$ unidades y luego trasladada verticalmente $|k|$ unidades. (Utilizamos signos de valor absoluto debido a que h y k pueden ser negativos). La figura 8 ilustra el caso en el que $a > 0$, $h > 0$, y $k > 0$.

Un examen de la figura 8 y una comparación de las ecuaciones en (3) y (5) revelan que el vértice de la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ es (h, k) . De esta manera, obtenemos las coordenadas del vértice directamente; no hay necesidad de memorizar $-b/2a$ ni tampoco de calcular la función cuadrática en este número. Observe también que la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ es simétrica con respecto a la línea $x = h$.

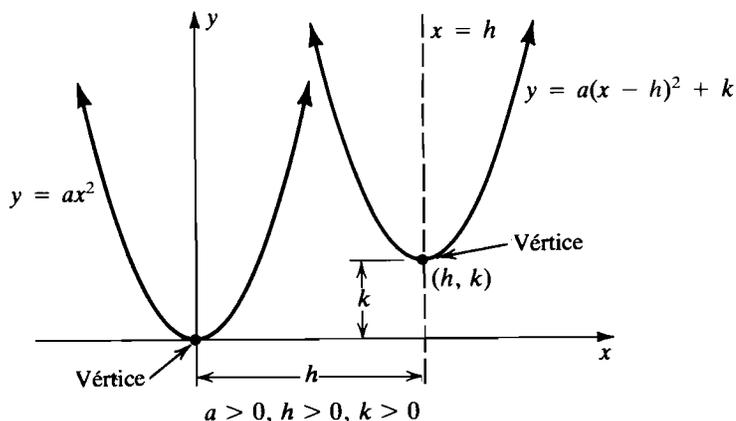


FIGURA 8

EJEMPLO 6

Compare las gráficas de (a) $f(x) = (x - 2)^2$ y (b) $f(x) = (x + 3)^2$.

Solución

(a) La gráfica punteada de la figura 9 es la gráfica de $y = x^2$. Trasladando esta gráfica 2 unidades a la derecha, obtenemos la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2$. La gráfica se muestra a color. Observe en la figura y en las identidades $h = 2$ y $k = 0$ que el vértice de la gráfica es $(2, 0)$.

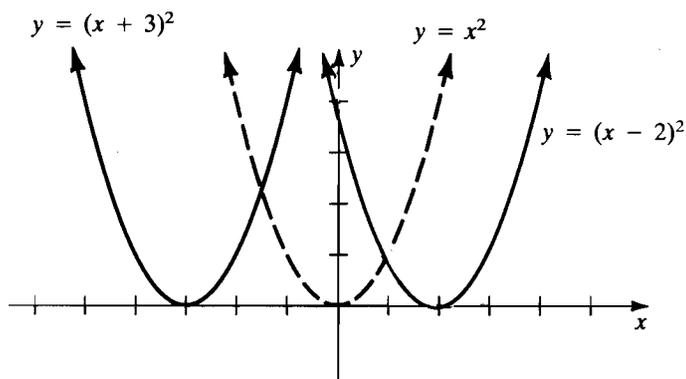


FIGURA 9

(b) La gráfica de $f(x) = (x + 3)^2$ se obtiene trasladando la gráfica de $y = x^2$ hacia la izquierda, tres unidades. Esta es la gráfica que aparece en negro en la figura 9. A partir de la ecuación, vemos que $h = -3$ y $k = 0$. Por tanto, el vértice es $(-3, 0)$.

EJEMPLO 7

Grafique $f(x) = -x^2 - 7x - 10$.

Solución. Primero completamos el cuadrado. Para hacerlo, factorizamos -1 a partir de los términos que incluyen x , de modo que el coeficiente de x^2 sea (véase página 80).

$$f(x) = -(x^2 + 7x) - 10$$

Sumando $\frac{49}{4}$, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x , dentro del paréntesis, le estamos sumando en realidad $-\frac{49}{4}$ a la expresión. Por tanto, compensamos sumando $\frac{49}{4}$ por fuera del paréntesis:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 + 7x + \frac{49}{4}) - 10 + \frac{49}{4} \\ &= -(x + \frac{7}{2})^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

En esta última ecuación vemos que $h = -\frac{7}{2}$ y $k = \frac{9}{4}$. El vértice de la gráfica es entonces $(-\frac{7}{2}, \frac{9}{4})$, y la gráfica es $y = -x^2$ trasladada $\frac{7}{2}$ unidades a la izquierda y $\frac{9}{4}$ unidades hacia arriba.

Sólo con esta información, podríamos fácilmente trazar una gráfica aproximada. Sin embargo, es siempre buena idea, que revisemos los intersecos. El interseco en y es $f(0) = -10$. Para hallar los intersecos en x , resolvemos

$$-x^2 - 7x - 10 = 0, \quad \text{o} \quad (x + 5)(x + 2) = 0$$

Los intersecos en x son -5 y -2 . Utilizando los cuatro puntos $(-\frac{7}{2}, \frac{9}{4})$, $(0, -10)$, $(-5, 0)$ y $(-2, 0)$, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 10.

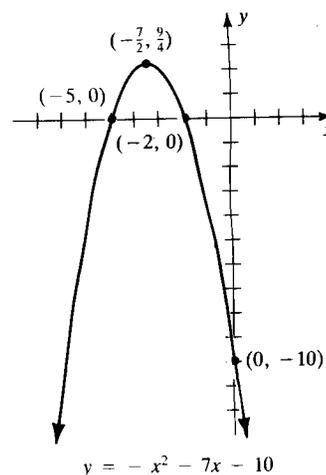


FIGURA 10

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

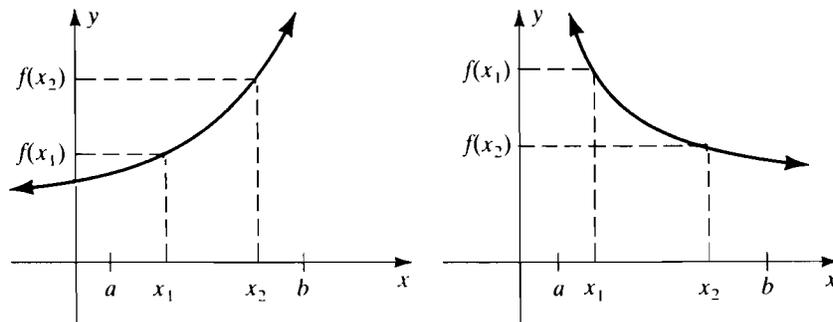
Para $a > 0$, los valores de la función lineal $f(x) = ax + b$ *aumentan* a medida que x aumenta (la gráfica se eleva de izquierda a derecha); para $a < 0$, los valores de función *disminuyen* a medida que x aumenta (la gráfica cae). En el primer caso, decimos que f es **creciente**, y en el segundo que f es **decreciente**. En general, tenemos la siguiente definición.

DEFINICION 2

Sea f una función definida en un intervalo, y sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en ese intervalo.

- (i) f es **creciente** en el intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.
- (ii) f es **decreciente** en el intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

En la figura 11(a), f es creciente en el intervalo $[a, b]$, mientras que en la figura 11(b), f es decreciente en el intervalo $[a, b]$.



a) Creciente

b) Decreciente

FIGURA 11

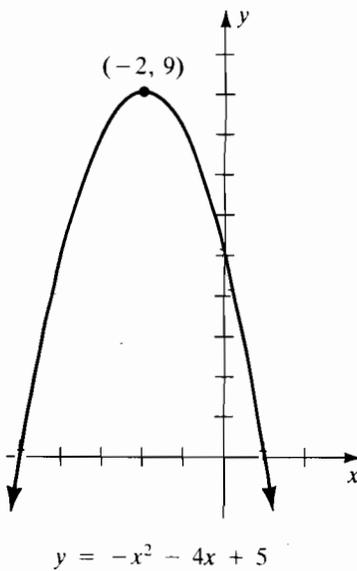


FIGURA 12

EJEMPLO 8

Halle el mayor intervalo sobre el cual la función $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ sea creciente y el mayor intervalo en el cual sea decreciente.

Solución. La gráfica de la función es una parábola que se abre hacia abajo con vértice en $(-2, 9)$ (verifique esto). Como lo muestra la figura 12, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2]$, y decreciente en el intervalo $[-2, \infty)$.

Muchos fenómenos diversos de la ciencia, ingeniería y comercio pueden describirse por medio de las funciones cuadráticas. Es necesario a menudo hallar el máximo o mínimo valor de tal función.

EJEMPLO 9

Un ganadero desea construir un corral rectangular con 1,000 pies de cercado. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del corral para que el área cercada sea máxima?

Solución. Como se muestra en la figura 13(a), designamos la anchura y la longitud del corral como w y l , respectivamente. El área está dada por

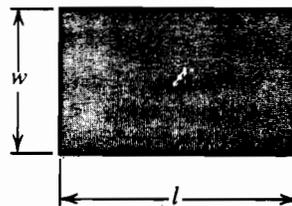
$$A = wl \quad (6)$$

y el perímetro es 1,000 pies. Por tanto,

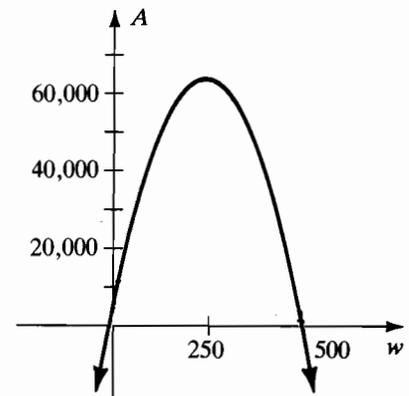
$$2w + 2l = 1,000$$

Despejando l en esta ecuación nos da

$$l = \frac{1}{2}(1,000 - 2w) = 500 - w$$



(a)



(b)

FIGURA 13

Sustituyendo este resultado en (6), tenemos

$$A = w(500 - w)$$

Hemos expresado así el área A como una función de la variable w .

$$A(w) = w(500 - w) = 500w - w^2$$

Esta función se grafica en la figura 13(b).

Puesto que la parábola se abre hacia abajo, el valor máximo de A se da en el vértice. Utilizando (4) con $b = 500$ y $a = -1$, o completando el cuadrado, encontramos que el vértice está en $w = 250$. Puesto que la longitud correspondiente es

$$l = 500 - 250$$

las dimensiones deseadas son 250 pies por 250 pies.

EJERCICIO 4.1

En los problemas 1 al 6, grafique la función dada.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. $f(x) = 2x^2$ | 2. $f(x) = -2x^2$ |
| 3. $f(x) = 2x^2 - 2$ | 4. $f(x) = 2x^2 + 5$ |
| 5. $f(x) = -2x^2 + 1$ | 6. $f(x) = -2x^2 - 3$ |

En los problemas 7 al 18, grafique la función dada. Halle el vértice de la parábola y los intersejos.

- | | |
|----------------------------|-------------------------------------|
| 7. $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ | 8. $f(x) = 5x^2 - 2x + 4$ |
| 9. $f(x) = (3 - x)(x + 1)$ | 10. $f(x) = (x - 2)(x - 6)$ |
| 11. $f(x) = x(x + 5)$ | 12. $f(x) = x^2 - 4x$ |
| 13. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ | 14. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ |
| 15. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ | 16. $f(x) = x^2 - 2x - 7$ |
| 17. $f(x) = (x - 5)^2$ | 18. $f(x) = -(3 - x)^2$ |

En los problemas 19 al 22, halle el mayor intervalo sobre el cual la función dada sea creciente y el mayor intervalo sobre el cual sea decreciente.

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 19. $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$ | 20. $f(x) = -2x^2 - 6x + 3$ |
| 21. $f(x) = -2x^2 - 12x$ | 22. $f(x) = x^2 + 8x - 1$ |
23. Para $f(x) = 2x^2 + 16x - 2$, responda si cada una de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera.
- La función crece en el intervalo $(-2, \infty)$.
 - La función decrece en el intervalo $(-7, -5)$.
 - La gráfica se abre hacia abajo.
 - El valor mínimo de la función es $f(x) = -34$.
 - No hay intersejos en x .
 - La gráfica pasa por el punto $(-2, -26)$.

(24) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $x = -b/2a$ y $a > 0$, pruebe que $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2 < x$ y que $f(x_1) < f(x_2)$ para $x < x_1 < x_2$.
- Si $x = -b/2a$ y $a < 0$, demuestre que $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2 < x$ y $f(x_1) > f(x_2)$ para $x < x_1 < x_2$.

En los problemas 25 y 26, halle el máximo valor de $f(x)$.

- $f(x) = -x^4 + 10x^2 + 6$ [Sugerencia: sea $t = x^2$]
- $f(x) = -x + 6\sqrt{x} + 10$
- La suma de dos números reales es 6. Halle dos números tales que su producto sea máximo.
- ¿Es posible hallar dos números reales cuya diferencia sea 30 y cuyo producto sea máximo?, ¿mínimo? Si es así, halle los números.
- La suma de dos números es 20. Halle dos números tales que la suma S de sus cuadrados sea mínima.
- La suma de dos números es 4. Halle los dos números tales que la diferencia D entre el cuadrado del primer número y el doble del cuadrado del segundo sea máxima.
- Halle las dimensiones del rectángulo sombreado en la figura 14, tal que su área A sea máxima.
- Halle el punto sobre la recta $y = 2x$ que este más cerca a $(5, 0)$ (véase figura 15). ¿Cuál es la distancia mínima? [Sugerencia: considere el cuadrado de la distancia].
- Considere las gráficas mostradas en la figura 16. Halle los puntos en ambas gráficas para $1 \leq x \leq 6$, tales que la distan-

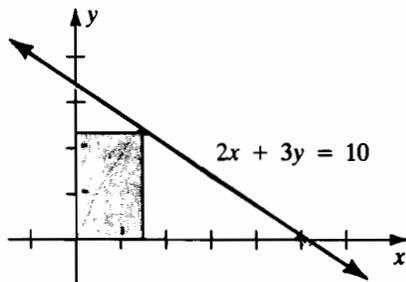


FIGURA 14

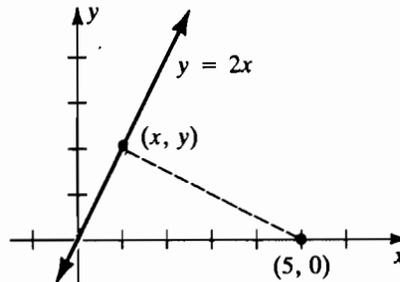


FIGURA 15

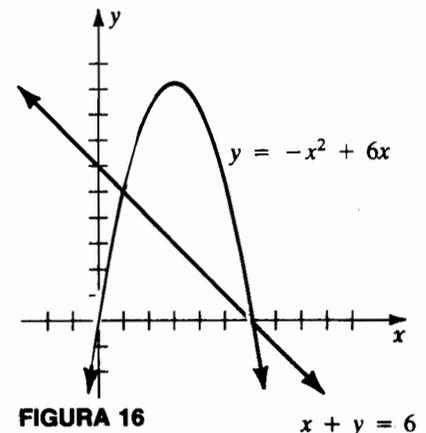


FIGURA 16

cia vertical entre las gráficas sea máxima ¿Cuál es la distancia vertical máxima?

34. Un rancho desea cercar un corral rectangular a lo largo de una corriente recta, como se muestra en la figura 17. Si la longitud total de cerca disponible es de 3,000 pies, halle el valor máximo de la función de área $A(x)$. ¿Cuáles son las dimensiones del área máxima del corral?

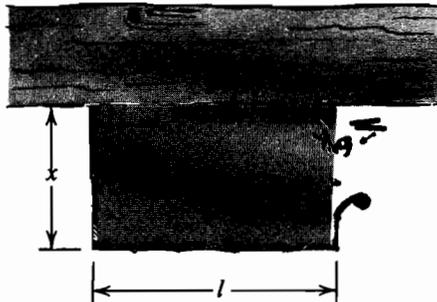


FIGURA 17

35. Se debe doblar un pedazo de alambre de 60 pulgadas para formar un rectángulo. Demuestre que el rectángulo que tiene la mayor área A , es un cuadrado.
36. Se hace un canal con un corte transversal rectangular, con un pedazo de metal de 1 pie \times 20 pies, doblando hacia arriba cantidades x iguales desde el lado de 1 pie (véase figura 18). ¿Cómo debe doblarse el metal hacia arriba sobre cada lado para hacer que la capacidad del canal sea máxima?

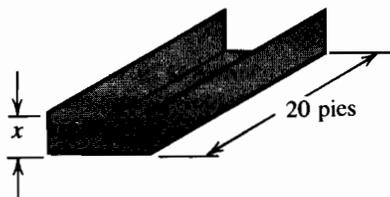


FIGURA 18

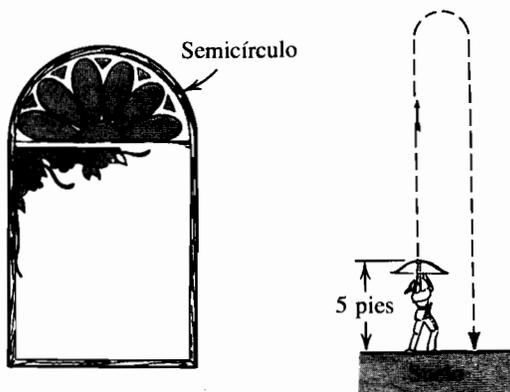


FIGURA 19

FIGURA 20

37. El vitral que se muestra en la figura 19 está compuesto por un rectángulo y un semicírculo de radio r . Si el perímetro del vitral debe ser de 200 cm, halle las dimensiones del vitral con la mayor área A .

38. Una flecha que se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies/s desde un punto a 5 pies por encima del suelo alcanza una altura de

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 5$$

en t s (véase figura 20). ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la flecha? ¿En qué momento la flecha cae nuevamente al nivel de 5 pies?

39. Como se muestra en la figura 21, una flecha que se lanza con un ángulo de 45 grados hacia el horizonte, viaja trazando un arco parabólico dado por la ecuación $y = ax^2 + x + c$. Utilice el hecho de que una flecha se lanza a una altura vertical de 5 pies y recorre una distancia horizontal de 200 pies, para hallar a y c . ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la flecha?

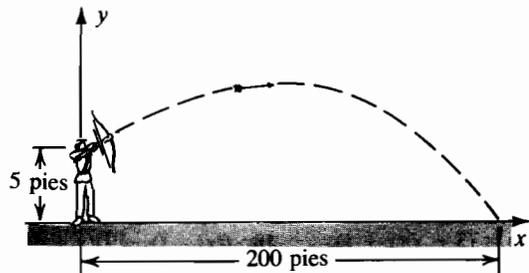


FIGURA 21

40. Se debe construir dentro de un lote rectangular de 100 pies de largo y 60 pies de ancho un jardín rodeado por un sendero de anchura uniforme x (véase figura 22). Expresé el área A del jardín como un función de x . ¿Qué ancho debe tener el sendero para que el jardín tenga un área de 3,200 pies²?

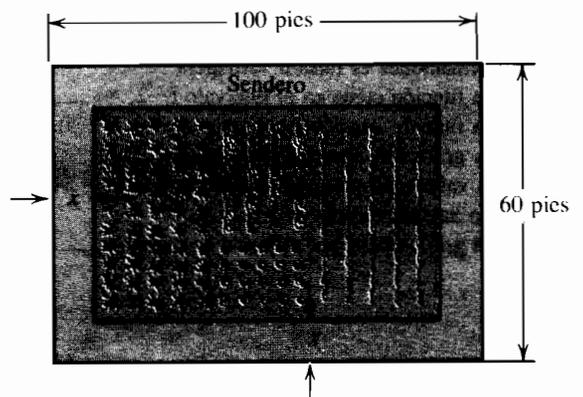
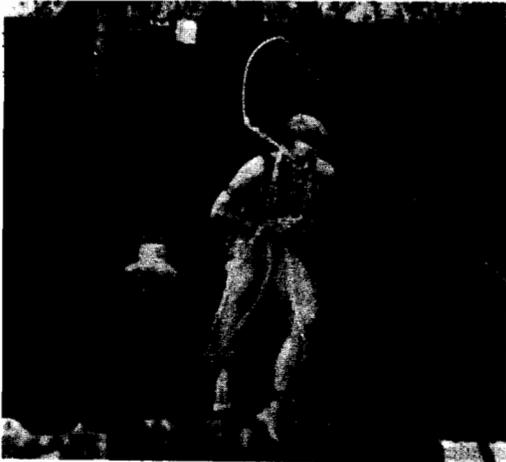


FIGURA 22

41. El 25 de julio de 1985, el *Minneapolis Star* y el *Tribune* anunciaron que el artista de la fuga, Christopher Gates, estaba planeando lanzarse al río Mississippi poniéndose 70 libras de cadenas y grillos. El artículo reportó que la altura del puente era de 48 pies y que la velocidad de colisión de Gates cuando alcanzara el agua sería de 85 mph. Si su altura (en pies) y velocidad (en pies/s) t segundos después de lanzarse del puente están



dadas por las funciones $h(t) = 48 - 16t^2$ y $v(t) = 32t$, respectivamente, determine si el cálculo que hizo el *Tribune* de la velocidad de colisión de Gates fue preciso.

42. Un modelo para la expansión de epidemias supone que la velocidad a la cual se extiende una enfermedad es conjuntamente proporcional al número de personas que ya tienen la enfermedad y al número de gente no infectada aún. (Esta suposición es razonable ya que, si nadie tiene la enfermedad, no hay expansión de ésta, y si todos la tienen, entonces no se puede expandir más).

Matemáticamente, el modelo está dado por la función cuadrática

$$R(D) = kD(P - D), \quad k > 0$$

en donde $R(D)$ es la velocidad de expansión (en casos por día), P es la población total. D es el número de personas que llevan la enfermedad, y k es una constante de proporcionalidad.

- (a) Demuestre que si la población P es constante, la enfermedad se expande con más rapidez cuando exactamente la mitad de la población la tiene.
- (b) Suponga que en una ciudad de 10,000 personas, 125 están enfermas el domingo, y 37 nuevos casos ocurren el lunes. Calcule la constante k .
- (c) Utilice el resultado de la parte (b) para calcular el número de nuevos casos el martes. [*Sugerencia:* el número de personas que tienen la enfermedad el lunes, es $162 = 125 + 37$].
- (d) Calcule el número de nuevos casos el miércoles, jueves, viernes y sábado.
43. La tasa de crecimiento de los peces depende de la temperatura del agua en la cual habitan. Para los peces de ojos saltones de Minnesota, la tasa de crecimiento G (en porcentaje por día) está dada por la función cuadrática

$$G(T) = -0.0346(T - 23)^2 - 0.0723(T - 23) + 3.77$$

donde T denota la temperatura del agua medida en grados Celsius.

- (a) La gráfica de la función G es la gráfica de la función $g(T) = -0.0346T^2 - 0.0723T + 3.77$ trasladada hacia la derecha. Halle la tasa de crecimiento máxima G , utilizando el hecho de que el máximo de $G =$ máximo de g .
- (b) ¿Qué valor de T da el valor máximo de G en la parte (a)?

4.2 División de polinomios

Hay un método para dividir polinomios similar a la división larga de dos enteros positivos. Como repaso, examinamos la división 1,052 por 23.

$$\begin{array}{r}
 \text{Divisor} \rightarrow 23 \overline{) 1,052} \\
 \underline{92} \quad \leftarrow \text{Cociente} \\
 132 \quad \leftarrow \text{dividendo} \\
 \underline{115} \\
 17 \quad \leftarrow \text{Residuo}
 \end{array}$$

Escribimos el resultado de esta división, como

$$\frac{1052}{23} = 45 + \frac{17}{23}$$

o, multiplicando ambos lados de la ecuación por 23, podemos escribir

$$1,052 = (23 \times 45) + 17$$

Observe que la última ecuación proporciona una prueba de la división. Esto es, el divisor (23) multiplicado por el cociente (45) más el residuo (17) es igual al dividendo (1,052).

Ahora considere la división del polinomio $3x^3 - x^2 - 2x + 6$ por $x^2 + 1$.

$$\begin{array}{r} \text{Divisor} \rightarrow x^2 + 1 \overline{) 3x^3 - x^2 - 2x + 6} \leftarrow \text{Dividendo} \\ \underline{3x^3 + 3x} \leftarrow \text{Cociente} \\ -x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-x^2 - 1} \\ -5x + 7 \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Los pasos de este procedimiento se pueden resumir como sigue:

1. Divida $3x^3$ (el primer término del dividendo) por x^2 (el primer término del divisor), obteniendo $3x$ (el primer término del cociente).
2. Multiplique $x^2 + 1$ (el divisor) por $3x$ y escriba el producto $3x^3 + 3x$ debajo de los términos correspondientes en el dividendo.
3. Reste para obtener $-x^2 - 5x + 6$, el cual se trata como nuevo dividendo.
4. Divida $-x^2$ (el primer término del nuevo dividendo) por x^2 , obteniendo -1 (el segundo término del cociente).
5. Multiplique $x^2 + 1$ por -1 y reste el producto, del nuevo dividendo.
6. Observe que puesto que el grado de $-5x + 7$ (la diferencia) es menor que el grado del divisor, la división está terminada. Escribimos el resultado de la división como

$$\frac{3x^3 - x^2 - 2x + 6}{x^2 + 1} = 3x - 1 + \frac{-5x + 7}{x^2 + 1}$$

Si multiplicamos ambos lados de la última ecuación por $x^2 + 1$, tenemos

$$3x^3 - x^2 - 2x + 6 = (x^2 + 1)(3x - 1) - 5x + 7 \quad (7)$$

Esto proporciona una prueba de la división, de la misma manera como se describió arriba para revisar la división de dos enteros positivos.

ALGORITMO DE DIVISION PARA POLINOMIOS

En general, cuando dividimos un entero positivo p por un entero positivo s , obtenemos un único cociente q y residuo r que satisfacen

$$p = sq + r$$

donde $0 \leq r < s$. Un resultado análogo, llamado **algoritmo de división para polinomios** se enuncia como sigue.

TEOREMA 1

El algoritmo de división para polinomios

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios con $g(x) \neq 0$. Entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

donde $r(x)$ es 0, o tiene un grado menor al grado de $g(x)$.

Llamamos a $f(x)$ el **dividendo**, a $g(x)$ el **divisor**, a $q(x)$ el **cociente**, y a $r(x)$ el **residuo**. Cuando $r(x) = 0$, entonces $f(x) = g(x)q(x)$ y $g(x)$ es un factor de $f(x)$. En este caso, se dice que $f(x)$ es **divisible** por $g(x)$.

EJEMPLO 1 _____

Si identificamos

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 + 1$$

podemos concluir, según la división ilustrada arriba, que

$$q(x) = 3x - 1 \quad \text{y} \quad r(x) = -5x + 7$$

Observe que (7) tiene la forma $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

EJEMPLO 2 _____

Divida el polinomio $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ por el polinomio $g(x) = x^2 + 2$.

Solución. El polinomio $x^4 - 2x^2 - 8$ es divisible por $x^2 + 2$ ya que $r(x) = 0$:

$$\begin{array}{r} x^2 - 4 \\ x^2 + 2 \overline{) x^4 - 2x^2 - 8} \\ \underline{x^4 + 2x^2} \\ -4x^2 - 8 \\ \underline{+ 4x^2 - 8} \\ 0 \end{array}$$

Esto es, $x^2 + 2$ es un factor de $x^4 - 2x^2 - 8$:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2 - 4)(x^2 + 2)$$

Si el divisor $g(x)$ en el teorema 1 es un polinomio lineal $x - c$, se deduce que el residuo $r(x)$ debe ser una constante. Por tanto tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 2 _____

Sea $f(x)$ un polinomio de grado $n > 0$ y sea c un número real. Entonces, existe un polinomio único $q(x)$ de grado $n - 1$ y un número real único r tales que

$$f(x) = (x - c)q(x) + r$$

EJEMPLO 3

Divida el polinomio $f(x) = x^3 - 4x + 7$ por $g(x) = x + 1$.

Solución. Por medio de una división larga en la que se escriben los productos parciales, tenemos

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 3 \\ x + 1 \overline{) x^3 + 0x^2 - 4x + 7} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -x^2 - 4x + 7 \\ \underline{-x^2 - x} \\ -3x + 7 \\ \underline{-3x - 3} \\ 10 \end{array}$$

Por tanto en el teorema 2 identificamos $q(x) = x^2 - x - 3$ y $r = 10$, y escribimos

$$x^3 - 4x + 7 = (x + 1)(x^2 - x - 3) + 10$$

DIVISION SINTETICA

La división por un polinomio lineal de la forma $x - c$ para cualquier número real c , puede simplificarse utilizando la técnica llamada **división sintética**. Por ejemplo, en la división

$$\begin{array}{r}
 4x^2 - 3x + 7 \\
 x - 2 \overline{) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \textcircled{4} & -11 & 13 & -5 \\ \hline \end{array} \\
 (-) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -8 & & \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \textcircled{-3} & 6 & \\ \hline \end{array} \\
 (-) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 6 & \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \textcircled{7} & \\ \hline \end{array} \\
 (-) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & -14 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \textcircled{9} \text{ Residuo}
 \end{array} \tag{8}$$

Podemos hacer algunas observaciones:

- Debajo del signo de división, cada columna contiene términos del mismo grado.
- Cada rectángulo contiene términos idénticos.
- Los coeficientes del cociente y el residuo constante se encierran en un círculo.
- Cada línea marcada con (-) se resta de la línea anterior.

Si borramos las variables y las repeticiones observadas en (8), tenemos

$$\begin{array}{r}
 x - 2 \rightarrow -2 \overline{) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \textcircled{4} & -11 & 13 & -5 \\ \hline \end{array} \\
 (-) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -8 & & \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \textcircled{-3} & 6 & \\ \hline \end{array} \\
 (-) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 6 & \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \textcircled{7} & \\ \hline \end{array} \\
 (-) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & -14 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \textcircled{9} \text{ Residuo}
 \end{array} \tag{9}$$

Como lo indican las flechas en (9), esto puede escribirse en forma más compacta así:

$$\begin{array}{r}
 -2 \overline{) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \textcircled{4} & -11 & 13 & -5 \\ \hline \end{array} \\
 (-) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -8 & 6 & -14 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \textcircled{-3} & \textcircled{7} & \textcircled{9} \\ \hline \end{array} \text{ Residuo}
 \end{array} \tag{10}$$

Si bajamos el coeficiente 4, como lo indica la flecha en (10), entonces los coeficientes del cociente y el residuo están sobre una línea.

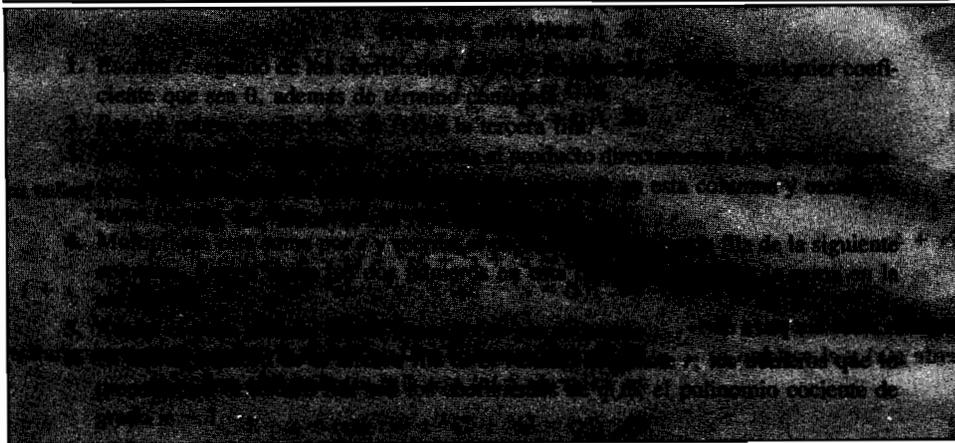
$$\begin{array}{r}
 -2 \overline{) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & -11 & 13 & -5 \\ \hline \end{array} \\
 (-) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -8 & 6 & -14 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \textcircled{4} & \textcircled{-3} & \textcircled{7} & \textcircled{9} \\ \hline \end{array} \text{ Tercera fila}
 \end{array} \tag{11}$$

Ahora observamos que cada número de la segunda fila de (11) puede hallarse multiplicando el número de la tercera fila de la columna anterior por -2 ; y que cada número de la tercera fila se obtiene *restando* cada número de la segunda fila del correspondiente número en la primera fila.

Finalmente podemos evitar la resta en (11) multiplicando por +2 (el inverso aditivo de -2) y sumándole la segunda fila a la primera. Esto se ilustra a continuación.

$$\begin{array}{r}
 \text{Coeficientes del dividendo } f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 13x - 5 \\
 \text{Divisor: } x - 2 \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 4 & -11 & 13 & -5 \\ (+) & 8 & -6 & 14 \\ \hline 4 & -3 & 7 & 9 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Primera fila} \\ \text{Segunda fila} \\ \text{Tercera fila} \end{array} \\
 \text{Coeficientes del cociente } q(x) = 4x^2 - 3x + 7
 \end{array} \quad (12)$$

El procedimiento de la división sintética para dividir $f(x)$, un polinomio de grado $n > 0$, por $x - c$ se sintetiza como sigue:



EJEMPLO 4 _____

Utilice la división sintética para dividir:

- (a) $f(x) = 2x^3 - 4x + 7$ por $g(x) = x - 3$
- (b) $f(x) = 6x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ por $g(x) = x + \frac{1}{2}$

Solución

- (a) Debemos escribir todos los coeficientes de $f(x)$, incluyendo los coeficientes cero. Aquí tenemos $c = 3$.

$$\begin{array}{r}
 3 \left| \begin{array}{cccc} 2 & 0 & -4 & 7 \\ & 6 & 18 & 42 \\ \hline 2 & 6 & 14 & 49 = r \end{array}
 \end{array}$$

El cociente es entonces $q(x) = 2x^2 + 6x + 14$, y el residuo es $r = 49$.

- (b) Para poner $x + \frac{1}{2}$ de la forma $x - c$, escribimos $x - (-\frac{1}{2})$ e identificamos $c = -\frac{1}{2}$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{r}
 -\frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccccc} 6 & 3 & -2 & -5 & -2 \\ & -3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 6 & 0 & -2 & -4 & 0 = r \end{array}
 \end{array}$$

El cociente es $q(x) = 6x^3 - 2x - 4$, y el residuo es $r = 0$. Observe que $x + \frac{1}{2}$ es un factor de $6x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x - 2$.

EJERCICIO 4.2

En los problemas 1 al 12, utilice la división larga para dividir $f(x)$ por $g(x)$. Escriba las respuestas en la forma $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

1. $f(x) = x^2 + 4x - 7$; $g(x) = x + 8$
2. $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $g(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x + 1$;
 $g(x) = x^2 + x - 1$
4. $f(x) = 14x^3 - 12x^2 + 6$;
 $g(x) = x^2 - 1$
5. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$;
 $g(x) = (x - 2)^2$
6. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;
 $g(x) = (2x - 1)^2$
7. $f(x) = 27x^3 + x - 2$;
 $g(x) = 3x^2 - x$
8. $f(x) = x^4 + 8$; $g(x) = x^3 + 2x - 1$
9. $f(x) = 3x^4 + x + 7$; $g(x) = x - 2$
10. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 2$; $g(x) = x + 5$
11. $f(x) = 6x^5 + 4x^4 + x^3$; $g(x) = x - \frac{1}{2}$
12. $f(x) = 5x^6 - x^5 + 10x^4 + 3x^2 - 2x + 4$;
 $g(x) = x - 1$

En los problemas 13 al 28, utilice la división sintética para dividir $f(x)$ por $g(x)$. Identifique el cociente $q(x)$ y el residuo r .

13. $f(x) = 2x^2 - x + 5$; $g(x) = x - 2$
14. $f(x) = 4x^2 - 8x + 6$; $g(x) = x - \frac{1}{2}$
15. $f(x) = x^3 + 9x - 1$; $g(x) = x + 1$

16. $f(x) = x^3 - 125$; $g(x) = x - 5$
17. $f(x) = x^3 - x^2 + 2$; $g(x) = x + 3$
18. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 4$; $g(x) = x - 7$
19. $f(x) = 14x^3 - x$; $g(x) = x - 1$
20. $f(x) = x^3 - x + 1$; $g(x) = x + 6$
21. $f(x) = x^4 + 16$; $g(x) = x - 2$
22. $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x - 6$;
 $g(x) = x + 3$
23. $f(x) = x^5 + 56x^2 - 4$; $g(x) = x + 4$
24. $f(x) = 2x^6 + 3x^3 - 4x^2 - 1$;
 $g(x) = x + 1$
25. $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2$; $g(x) = 2x + 1$
26. $f(x) = 6x^3 - 2x$; $g(x) = 3x - 1$
27. $f(x) = x^3 - (2 + \sqrt{3})x^2 + 3\sqrt{3}x - 3$;
 $g(x) = x - \sqrt{3}$
28. $f(x) = x^8 - 3^8$; $g(x) = x - 3$

En los problemas 29 y 30, utilice la división larga para hallar un valor de k tal que $f(x)$ sea divisible por $g(x)$.

29. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + kx - 4$; $g(x) = x^2 - 1$
30. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + kx^2 + 9x - 5$; $g(x) = x^2 - x + 1$

En los problemas 31 y 32, utilice la división sintética para hallar un valor de k tal que $f(x)$ sea divisible por $g(x)$.

31. $f(x) = kx^4 + 2x^2 + 9k$; $g(x) = x - 1$
32. $f(x) = x^3 + kx^2 - 2kx + 4$; $g(x) = x + 2$

4.3 Teorema del residuo y teorema del factor

Hay una relación entre el residuo r obtenido por la división de un polinomio $f(x)$ por $x - c$, y el valor funcional $f(c)$.

TEOREMA DEL RESIDUO

Recordemos del teorema 2 que la división de un polinomio $f(x)$ por un polinomio lineal $x - c$ da como resultado un residuo constante r :

$$f(x) = (x - c)q(x) + r \quad (13)$$

Al determinarse (13) en $x = c$ produce

$$f(c) = (c - c)q(c) + r = r$$

Por tanto, hemos establecido el siguiente resultado, el cual se conoce como **teorema del residuo**.

TEOREMA 3

Teorema del residuo

Cuando un polinomio $f(x)$ se divide por $x - c$, el residuo r es el valor del polinomio en $x = c$, esto es, $r = f(c)$.

EJEMPLO 1

Determine el residuo cuando $f(x) = 4x^3 - x^2 + 4$ se divide por $x - 2$.

Solución. Según el teorema del residuo tenemos

$$\begin{aligned} r &= f(2) \\ &= 4(2)^3 - (2)^2 + 4 = 32 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Utilice el teorema del residuo para hallar el valor de $f(-3)$ si $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$.

Solución. El valor $f(-3)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide por $x - (-3)$. Utilizando la división sintética tenemos

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 1 & 0 & -4 & 0 & 2 & -10 \\ & & -3 & 9 & -15 & 45 & -141 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & -15 & 47 & -151 = r \end{array}$$

Por tanto, $f(-3) = -151$.

Observe que en el ejemplo 2 evitamos calcular las potencias de -3 , utilizando el teorema del residuo para evaluar $f(-3)$.

TEOREMA DEL FACTOR

Decimos que un número c es un **cero** o una raíz de un polinomio $f(x)$ si $f(c) = 0$. En este caso, $r = f(c) = 0$ y se deduce por tanto, según el teorema 2, que podemos escribir el polinomio como

$$f(x) = (x - c)q(x) \tag{14}$$

Por tanto, cuando c es una raíz de $f(x)$, $x - c$ es un factor. Y viceversa, si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(x)$ tiene la forma dada en (14). En este caso, vemos que $f(c) = (c - c)q(c) = 0$. Estos resultados se sintetizan en el **teorema del factor**.

TEOREMA 4

Teorema del factor

Un número c es una raíz de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $f(x)$.

EJEMPLO 3

Determine si $x + 1$ es un factor de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$.

Solución. Puesto que es fácil encontrar potencias de -1 , calculamos $f(-1)$ directamente:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^4 - 5(-1)^2 + 6(-1) - 1 \\ &= -11 \end{aligned}$$

$-10 + 6 - 1$
 $x^1 -$

Puesto que $f(-1) \neq 0$, concluimos, según el teorema del factor, que $x - (-1) = x + 1$ no es un factor de $f(x)$.

EJEMPLO 4

Determine si $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Solución. Calculamos el valor de $f(2)$ por medio de la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 = r \end{array}$$

Puesto que $r = f(2) = 0$, concluimos, según el teorema del residuo, que 2 es una raíz de $f(x)$. Por tanto, según el teorema del factor, $x - 2$ es un factor de $f(x)$.

EJEMPLO 5

Considere el polinomio $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1$. Puesto que

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & -1 & 1 & 1 \\ & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & 0 = r \end{array}$$

se deduce, según el teorema del residuo, que $-\frac{1}{2}$ es una raíz de $f(x)$. Por tanto, según el teorema del factor, $x - (-\frac{1}{2})$, o $x + \frac{1}{2}$, es un factor de $f(x)$:

$$f(x) = (x + \frac{1}{2})q(x)$$

Para determinar $q(x)$, podríamos dividir $f(x)$ por $x + \frac{1}{2}$. Sin embargo, según la división sintética que acabamos de realizar, vemos que $q(x) = 2x^2 - 2x + 2$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + \frac{1}{2})(2x^2 - 2x + 2) \\ &= (x + \frac{1}{2})(2)(x^2 - x + 1) \\ &= (2x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

El siguiente teorema nos permite utilizar la fórmula cuadrática para factorizar cualquier polinomio cuadrático que tenga raíces reales.

TEOREMA 5

Cualquier polinomio cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales, para los cuales $b^2 - 4ac \geq 0$, puede factorizarse como

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

donde $r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Este teorema puede verificarse por medio de la multiplicación directa.

EJEMPLO 6

Factorice el polinomio cuadrático $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$.

Solución. Según la fórmula cuadrática, se encuentra que las raíces reales de $f(x)$ son

$$1 + \frac{1}{2}\sqrt{6} \quad \text{y} \quad 1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

Se deduce por el teorema 5 que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2[x - (1 + \frac{1}{2}\sqrt{6})][x - (1 - \frac{1}{2}\sqrt{6})] \\ &= 2(x - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{6})(x - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6}) \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.3

En los problemas 1 al 6, utilice el teorema del residuo para hallar r cuando $f(x)$ se divide por el polinomio lineal dado.

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 6; x - 2$
2. $f(x) = 3x^2 + 7x - 1; x + 3$
3. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 2; x - \frac{1}{2}$
4. $f(x) = 5x^3 + x^2 - 4x - 6; x + 1$
5. $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 5; x - 3$
6. $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + x - 1; x + \frac{3}{2}$

En los problemas 7 al 16, utilice el teorema del residuo para hallar el valor $f(c)$.

7. $f(x) = 4x^2 - 10x + 6; c = 2$
8. $f(x) = 6x^2 + 4x - 2; c = \frac{1}{2}$
9. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6; c = -5$
10. $f(x) = 15x^3 + 17x^2 - 30; c = \frac{1}{3}$
11. $f(x) = 4x^2 - 2x + 9; c = -3$
12. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 27; c = \frac{1}{2}$
13. $f(x) = 14x^4 - 60x^3 + 49x^2 - 21x + 19; c = 1$
14. $f(x) = 3x^5 + x^2 - 16; c = -2$
15. $f(x) = 2x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x + 1; c = 4$
16. $f(x) = x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 10; c = 5$

En los problemas 17 al 26, determine si el polinomio lineal dado es un factor de $f(x)$.

17. $f(x) = 2x^2 + 6x - 25; x - 5$
18. $f(x) = 10x^2 - 27x + 11; x + \frac{1}{2}$
19. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 8x - 2; x - \frac{1}{2}$
20. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 16x + 48; x - 2$
21. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 6x - 8; x - \frac{1}{2}$
22. $f(x) = 2x^3 - 4x + 7; x + 1$
23. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 3; x + \frac{3}{2}$
24. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8; x - 1$
25. $f(x) = 5x^5 - x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 5x - 1; x - 0.2$
26. $f(x) = x^5 - 2x^4 + 4x^2 - x + 2; x + 2$

En los problemas 27 al 32, factorice el polinomio cuadrático dado.

27. $f(x) = x^2 - x - 1$
28. $f(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 2$
29. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
30. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
31. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$
32. $f(x) = -5x^2 + x + 6$

33. Halle un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 1, -1 y 2.
34. Halle un polinomio de cuarto grado cuyas raíces sean -1/2, 1/2, 2 y -5.
35. Demuestre que $x + 1$ es un factor de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$. Factorice $f(x)$ en factores lineales.
36. Demuestre que $x - 4$ es un factor de $f(x) = x^3 - 18x + 8$. Factorice $f(x)$ en factores lineales.
37. Halle un valor de k tal que $x - 2$ sea un factor de $f(x) = 2x^2 + kx - 3$.
38. Halle un valor k tal que $x + 1$ sea un factor de $f(x) = x^3 - 2kx^2 + x - 7$.
39. Halle un valor de k tal que el residuo en la división de $3x^2 - 4kx + 1$ por $x + 3$ sea $r = -20$.
40. Halle el valor(es) de k tal(es) que el residuo en la división de $x^3 - k^2x + 4$ por $x - 1$ sea $r = 1$.
41. Cuando $f(x) = x^2 - 3x - 1$ se divide por $x - c$, el residuo es $r = 3$. Determine c .
42. Exprese el polinomio $f(x) = x^n - 1$ de la forma $f(x) = (x - c)q(x)$.
43. Determine los valores del entero positivo n , tales que $x^n + c^n$ sea divisible por $x + c$.
44. Suponga que $f(x) = 36x^{98} - 40x^{25} + 18x^{14} - 3x^7 + 40x^4 + 5x^2 - x + 2$ se divide por $x - 1$. ¿Cuál es el residuo?

4.4 Raíces reales de los polinomios

En esta sección examinamos algunas técnicas especiales para hallar raíces *reales* de una función polinomial de grado mayor que 2.

MULTIPLICIDAD DE LAS RAICES

El polinomio $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5$ puede factorizarse como

$$f(x) = (x - 1)^3(x + 5)$$

Por tanto, $f(x)$ tiene 4 factores lineales pero sólo dos raíces distintas. Decimos que 1 es una raíz de multiplicidad 3 y que $x - 5$ es una raíz de multiplicidad 1. Si $(x - c)^k$ es factor de un polinomio $f(x)$ y $(x - c)^{k+1}$ no es factor para k , un entero positivo, entonces se dice que c es una **raíz de multiplicidad k** de $f(x)$.

EJEMPLO 1

Puesto que $f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, se deduce que -2 es una raíz de multiplicidad dos de $f(x)$.

NUMERO DE RAICES

Suponga que un polinomio $f(x)$ de grado n tiene m (no necesariamente diferentes) raíces reales c_1, c_2, \dots, c_m . Entonces, según el teorema del factor, $(x - c_1), (x - c_2), \dots, (x - c_m)$ son, cada uno de ellos, factores de $f(x)$; esto es,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_m)q(x)$$

para algún polinomio $q(x)$. Por consiguiente, el grado n de $f(x)$, debe ser mayor o igual que m , el número total de raíces reales cuando cada una se cuenta según su multiplicidad.

TEOREMA 6

Un polinomio $f(x)$ de grado $n > 0$ tiene a lo sumo n raíces reales (no necesariamente diferentes).

EJEMPLO 2

(a) El polinomio de grado 4

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \\ &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \end{aligned}$$

tiene 4 raíces reales distintas, cada una de multiplicidad 1.

(b) El polinomio de cuarto grado

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x - 1)^4$$

tiene una sola raíz real de multiplicidad 4.

(c) El polinomio de cuarto grado

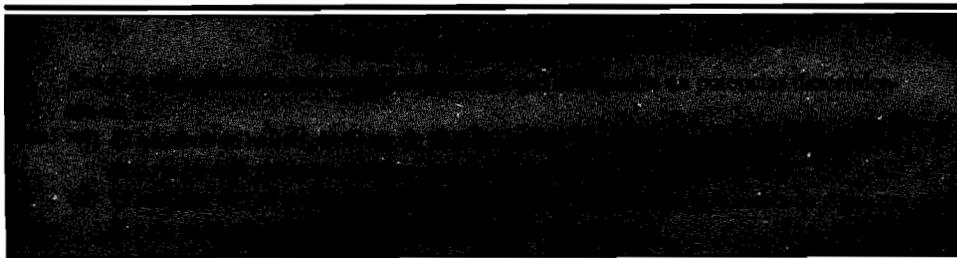
$$f(x) = x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

tiene dos raíces reales diferentes, de multiplicidad 1.

Sea $f(x)$ un polinomio que tiene coeficientes reales y se organiza en potencias descendentes de x . A partir de esta forma es posible determinar el número máximo de raíces positivas y el número máximo de raíces negativas, examinando las variaciones de signo en $f(x)$. Una **variación de signo** se da cuando dos términos consecutivos tienen signos opuestos. Por ejemplo, en el polinomio

$$f(x) = \underbrace{9x^6 - 7x^4}_{\substack{\text{Cambio} \\ \text{de} \\ \text{signo}}} - \underbrace{8x^3 + 2x}_{\substack{\text{Cambio} \\ \text{de} \\ \text{signo}}} - 14$$

hay 3 variaciones de signo. Enunciamos la siguiente regla sin prueba.



EJEMPLO 3 _____

Suponga que un polinomio $f(x)$ tiene 5 variaciones de signo. La regla de Descartes estipula que el número de raíces positivas de $f(x)$ es 5, 3 ó 1. Por consiguiente, el número máximo de raíces positivas es 5.

EJEMPLO 4 _____

El polinomio

$$f(x) = \underbrace{-x^3 - 3x - 1}_{\substack{\text{Cambio} \\ \text{de signo}}}$$

tiene una variación de signo. Según la regla de Descartes concluimos que $f(x)$ tiene una raíz positiva. (Observe que el número 1 reducido por un entero par es negativo y no podemos tener un número negativo de raíces). Ahora, la inspección de

$$f(-x) = \underbrace{-x^3 + 3x - 1}_{\substack{\text{Cambio} \\ \text{de signo}}} \underbrace{- 1}_{\substack{\text{Cambio} \\ \text{de signo}}}$$

revela dos variaciones de signo. Por tanto, $f(x)$ tiene dos o ninguna raíz negativa.

Puesto que el polinomio

$$f(x) = x^2 - 10x + 25$$

tiene dos variaciones de signo, sabemos por la regla de Descartes que $f(x)$ tiene o dos, o ninguna raíz positiva. Pero según

$$f(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

vemos que 5 es una raíz positiva de multiplicidad 2. Esto nos lleva a un punto importante: en la aplicación de la regla de Descartes, debemos contar una raíz de multiplicidad k como k ceros.

CEROS RACIONALES

Hemos visto que la división sintética es útil para determinar si un número dado es una raíz de un polinomio $f(x)$. Cuando el residuo en la división de $f(x)$ por $x - c$ es $r = 0$, hemos hallado una raíz del polinomio, puesto que $r = f(c) = 0$. Por ejemplo, $\frac{2}{3}$ es un cero de $f(x) = 18x^3 - 15x^2 + 14x - 8$, puesto que

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{3} & 18 & -15 & 14 & -8 \\ & & 12 & -2 & 8 \\ \hline & 18 & -3 & 12 & 0 = r \end{array}$$

Por la división sintética, sabemos que el cociente es $q(x) = 18x^2 - 3x + 12$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \frac{2}{3})(18x^2 - 3x + 12) \\ &= (x - \frac{2}{3})(3)(6x^2 - x + 4) \\ &= (3x - 2)(6x^2 - x + 4) \end{aligned} \tag{15}$$

En la multiplicación indicada en (15), el coeficiente principal 18 y el término constante -8 de $f(x)$ se obtienen de los productos

$$\begin{array}{c} \overbrace{(6x^2 - x + 4)}^{-8} \\ \uparrow \downarrow \\ (3x - 2)(6x^2 - x + 4) \\ \underbrace{}_{18} \end{array}$$

Vemos por tanto, que el denominador 3 de la raíz racional $\frac{2}{3}$ es un *factor* del coeficiente principal de $f(x)$, y el numerador 2 de la raíz es un *factor* del término constante de $f(x)$.

Este ejemplo ilustra un principio general, dado en el teorema siguiente, para determinar las raíces racionales de un polinomio.

TEOREMA 7

Sea p/s un número racional con p y s primos entre sí (sin factores comunes excepto 1 y -1) y una raíz del polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, son enteros con $a_n \neq 0$. Entonces, p es un factor de a_0 y s es un factor de a_n .

Observe que el teorema 7 *no* asevera que un polinomio deba tener raíces racionales; más bien afirma que *si* un polinomio con coeficientes enteros tiene una raíz racional p/s entonces:

$$p \text{ es un factor entero de } a_0, \text{ y}$$

$$s \text{ es un factor entero de } a_n.$$

Formando todas las posibles razones de cada factor de a_0 con cada factor de a_n , podemos construir una lista de todas las raíces racionales *posibles*.

EJEMPLO 5 _____

Halle todas las raíces racionales de

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$$

Solución. Identificamos $a_0 = -2$ y $a_n = 3$ y enumeramos todos los factores de a_0 y a_n respectivamente:

$$p: \pm 1, \pm 2$$

$$s: \pm 1, \pm 3$$

Según el teorema 7, las raíces racionales posibles de $f(x)$ son

$$\frac{p}{s}: -1, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -2, 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$$

De estas 8 posibilidades, *a lo sumo* 4 pueden ser raíces según el teorema 6, ya que $f(x)$ es de cuarto grado. Además, la regla de Descartes señala que hay 3 raíces o una raíz positiva y una raíz negativa*.

Para determinar cuáles de estos números son raíces, podríamos utilizar la sustitución directa. La división sintética, sin embargo, es usualmente más efectiva. Puesto que hay una raíz negativa comenzamos por probar -1 :

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 3 & -10 & -3 & 8 & -2 \\ & & -3 & 13 & -10 & 2 \\ \hline & 3 & -13 & 10 & -2 & \underline{0 = r} \end{array}$$

Por tanto, -1 es una raíz de $f(x)$. Además, la división sintética produce los coeficientes del cociente en la división de $f(x)$ por $x - (-1) = x + 1$. Por consiguiente tenemos la factorización

$$f(x) = (x + 1)(3x^3 - 13x^2 + 10x - 2)$$

Ahora cualquier otra raíz racional debe ser una raíz del factor $3x^3 - 13x^2 + 10x - 2$. Puesto que el polinomio es de grado menor, será más fácil utilizar la división sintética en éste en vez de en $f(x)$ para probar la siguiente raíz racional posible. Ya hemos encontrado la única raíz negativa, por tanto empezamos por probar los números positivos en la lista:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -13 & 10 & -2 \\ & & 3 & -10 & 0 \\ \hline & 3 & -10 & 0 & \underline{-2 = r} \end{array}$$

* Tenga en cuenta lo que la regla enuncia: hay al menos una raíz positiva y exactamente una raíz negativa. Por supuesto, estos podrían ser números irracionales, y por tanto, no estar en la lista de las posibles raíces racionales.

Encontramos que 1 no es una raíz racional. Probando $\frac{1}{3}$, tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & -13 & 10 & -2 \\ & & 1 & -4 & 2 \\ \hline & 3 & -12 & 6 & 0 = r \end{array}$$

Por consiguiente, $\frac{1}{3}$ es un cero, y tenemos ahora la factorización

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-\frac{1}{3})(3x^2-12x+6) \\ &= (x+1)(x-\frac{1}{3})(3)(x^2-4x+2) \\ &= (x+1)(3x-1)(x^2-4x+2) \end{aligned}$$

Puesto que el factor x^2-4x+2 es cuadrático, las raíces restantes, $2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$, se determinan fácilmente a partir de la fórmula cuadrática. Por tanto, el polinomio tiene dos raíces racionales -1 y $\frac{1}{3}$, y dos raíces irracionales.

EJEMPLO 6

Las raíces racionales posibles de

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$$

son $-1, 1, -2, 2, -4$ y 4 . Sin embargo, puesto que no hay variaciones de signo en $f(x)$, sabemos por la regla de Descartes que no hay raíces positivas. Eliminamos entonces $1, 2, y 4$ de la lista de posibilidades. Ahora hay cuatro variaciones de signo en

$$f(-x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$$

entonces hay $4, 2$, o ninguna raíz negativa. Probando -1 con la división sintética se demuestra que no es una raíz. Probando -2 , encontramos

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ & & -2 & -4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 = r \end{array}$$

y entonces -2 es una raíz. Vemos por el término constante de $q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ que -2 puede también ser una raíz de este cociente. Procediendo, encontramos

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 = r \end{array}$$

Puesto que el nuevo cociente x^2+1 no tiene raíces reales, concluimos que -2 es una raíz de $f(x)$ de multiplicidad 2 y que $f(x) = (x+2)^2(x^2+1)$.

EJEMPLO 7

El polinomio

$$f(x) = 12x^4 - 3x^3 + 17x^2 - 2x + 6$$

tiene 24 raíces racionales posibles:

$$\frac{p}{s}: -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3},$$

$$-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{12}$$

Si examinamos las variaciones de signo para $f(x)$ y $f(-x)$, la regla de Descartes señala que hay 4, 2 o ninguna raíz positiva y que no hay raíces negativas. Por tanto, podemos eliminar los números negativos de la lista anterior. Ahora, se puede verificar por medio de la división sintética que ninguno de los números racionales positivos restantes es una raíz de $f(x)$. En consecuencia, el polinomio no tiene raíces racionales.

EJEMPLO 8

Halle todos los factores de

$$f(x) = 4x^3 - 5x - 2$$

Solución. Puesto que $a_0 = -2$ y $a_n = 4$,

$$p: \pm 1, \pm 2$$

$$s: \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

Las raíces racionales posibles son

$$\frac{p}{s}: -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$$

Según la regla de Descartes, hay una raíz positiva y dos o ninguna raíz negativa. Usando la división sintética para revisar la lista, encontramos finalmente

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 4 & 0 & -5 & -2 \\ & & -2 & 1 & 2 \\ \hline & 4 & -2 & -4 & 0 = r \end{array}$$

Entonces, $-\frac{1}{2}$ es una raíz racional; de hecho, se encuentra que es la única raíz racional de $f(x)$. Sin embargo, tenemos ahora la factorización

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - (-\frac{1}{2}))(4x^2 - 2x - 4) \\ &= (x + \frac{1}{2})(2)(2x^2 - x - 2) \\ &= (2x + 1)(2x^2 - x - 2) \end{aligned}$$

Según la fórmula cuadrática, encontramos que las raíces de $2x^2 - x - 2$ son los números irracionales $(1 + \sqrt{17})/4$ y $(1 - \sqrt{17})/4$. Según el teorema 5 se deduce que

$$2x^2 - x - 2 = 2\left(x - \frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{17}}{4}\right)$$

Por tanto, tenemos

$$f(x) = 2(2x + 1)\left(x - \frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{17}}{4}\right)$$

La teoría de las raíces de polinomios tiene muchas aplicaciones en la solución de ecuaciones y en la graficación de funciones polinomiales.

EJEMPLO 9

Halle las soluciones reales de $3x^3 + 4x^2 + 4x = -1$.

Solución. Hallar las soluciones reales de esta ecuación equivale a hallar las raíces reales del polinomio $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1$. Las raíces racionales posibles son -1 , 1 , $-\frac{1}{3}$, y $\frac{1}{3}$. Ya que no hay variaciones de signo en $f(x)$, podemos descartar los números positivos 1 y $\frac{1}{3}$. Entonces, probamos sólo -1 y $-\frac{1}{3}$ por medio de la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ & & -3 & -1 & -3 \\ \hline & 3 & 1 & 3 & -2 = r \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 3 & 4 & 4 & 1 \\ & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 0 = r \end{array}$$

Por tanto, $-\frac{1}{3}$ es la única raíz racional de $f(x)$, y tenemos la factorización

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + \frac{1}{3})(3x^2 + 3x + 3) \\ &= (3x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Según la fórmula cuadrática, encontramos que $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales. Por consiguiente, $-\frac{1}{3}$ es la única solución real de la ecuación dada.

EJEMPLO 10

Explique por qué las gráficas de

$$f(x) = 4x^3 + 6x - 3 \quad \text{y} \quad g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 1$$

pueden intersectarse en máximo 3 puntos.

Solución. La coordenada en x de cualquier punto del *intersección* de las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ es una solución de

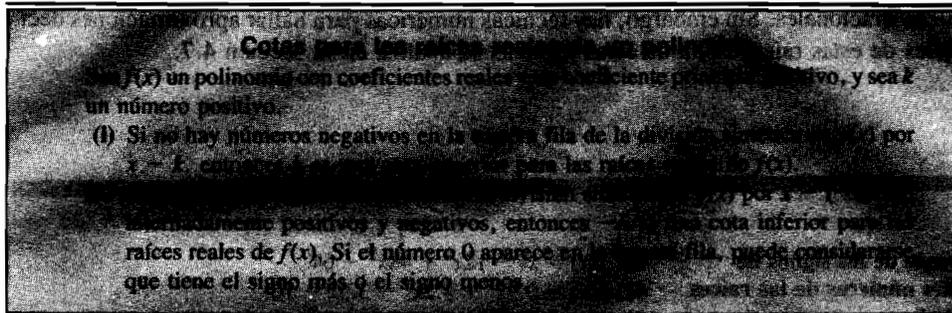
$$\begin{aligned} 4x^3 + 6x - 3 &= 3x^3 - 6x^2 + 1 \\ \text{o} \qquad x^3 + 6x^2 + 6x - 4 &= 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

Puesto que según el teorema 6 el polinomio cúbico $x^3 + 6x^2 + 6x - 4$ tiene a lo sumo 3 raíces reales, hay máximo 3 soluciones para (16). Por tanto, las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ pueden intersectarse en máximo 3 puntos.

LOCALIZACION DE RAICES REALES

Sea $f(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales. Si c_1, c_2, \dots, c_m , $m \leq n$, denotan números reales tales que $f(c_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, entonces existen números reales a y b tales que $a \leq c_i \leq b$, $i = 1, 2, \dots, m$. Al número a se le llama **cota inferior para las raíces de $f(x)$** y a b se le llama **cota superior para las raíces**. En otras palabras, a y b son números que determinan un intervalo $[a, b]$ en el cual se encuentran todas las raíces reales de $f(x)$. Las cotas para las raíces reales no son únicas; *cualquier* número que sea menor o igual a la raíz menor es una cota inferior para las raíces, y *cualquier* número que sea mayor o igual a la raíz mayor es una cota superior.

La siguiente regla, la cual presentamos sin demostración, utiliza la división sintética para hallarle cotas a las raíces de un polinomio.



EJEMPLO 11 _____

Halle cotas superiores e inferiores para las raíces reales de $f(x) = x^4 + x^3 - 1$.

Solución. Puesto que hay una variación de signo en $f(x)$ y una variación de signo en $f(-x)$, la regla de Descartes señala que el polinomio dado tiene una raíz positiva y una negativa. Para aplicar la regla de las cotas arriba mencionada, escogemos k por ensayo y error.

Si $k = 1$, entonces la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & 1 & 2 & 2 & 2 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1
 \end{array}$$

Números no negativos \rightarrow

demuestra que 1 es una cota superior para las raíces de $f(x)$. Ahora, si escogemos $k = 2$ de modo que $-k = -2$, entonces se deduce de

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & -2 & 2 & -4 & 8 \\
 \hline
 & 1 & -1 & 2 & -4 & 7
 \end{array}$$

Números alternados en signo \rightarrow

que -2 es una cota inferior para las raíces de $f(x)$. Por tanto las raíces reales del polinomio deben estar en el intervalo $[-2, 1]$.

EJEMPLO 12 _____

Por la regla de Descartes, sabemos que el polinomio

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 8x - 6$$

tiene raíces reales. Observe que en la división

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -5 & 1 & 3 & -10 & -8 & -6 \\
 & & -5 & 10 & 0 & 40 \\
 \hline
 & 1 & -2 & 0 & -8 & 34
 \end{array}$$

podemos considerar el 0 de la tercera fila como +0. Puesto que los números de la tercera fila son alternadamente positivos y negativos, concluimos que -5 es una cota inferior para las raíces reales de $f(x)$.

Habrá notado que no hemos dado un método general para hallar las raíces irracionales de un polinomio. De hecho, usualmente es imposible determinar con exactitud todas las

raíces irracionales. Sin embargo, hay técnicas numéricas para hallar aproximaciones decimales de estas raíces. Una de estas técnicas se analiza en la sección 4.7.

EJERCICIO 4.4

En los problemas 1 al 10, utilice la regla de los signos de Descartes para determinar los posibles números de las raíces positivas y negativas del polinomio dado.

1. $f(x) = 8x^2 + 2x - 3$
2. $f(x) = x^2 + 4x + 4$
3. $f(x) = 7x^3 - 6x^2 + x - 5$
4. $f(x) = 10x^3 - 8x - 2$
5. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + 1$
6. $f(x) = x^3 - 2$
7. $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 5x - 9$
8. $f(x) = x^5 - 12x^4 + 2x^2 + 7x - 16$
9. $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x + 1$
10. $f(x) = 3x^6 + 5x^3 + x + 8$

En los problemas 11 al 26, halle todas las raíces racionales del polinomio dado.

11. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$
12. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$
13. $f(x) = x^3 - 8x - 3$
14. $f(x) = 8x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 4x - 2$
15. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 10x^2 + 14x + 21$
16. $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 1$
17. $f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 8x + 3$
18. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3$
19. $f(x) = x^4 + 6x^3 - 7x$
20. $f(x) = x^5 - 2x^2 - 12x$
21. $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x$
22. $f(x) = 128x^6 - 2$
23. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 3$
24. $f(x) = 0.2x^3 - x + 0.8$
25. $f(x) = 2.5x^3 + x^2 + 0.6x + 0.1$
26. $f(x) = x^4 + \frac{5}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

En los problemas 27 al 42, halle todas las raíces reales del polinomio dado.

27. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
28. $f(x) = 6x^3 - 4x^2 - 5x - 1$
29. $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 8x - 10$
30. $f(x) = 12x^3 - 20x^2 - 33x + 20$
31. $f(x) = 16x^4 - 8x^2 + 1$
32. $f(x) = 4x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x - 1$
33. $f(x) = 8x^3 + 5x^2 - 11x + 3$
34. $f(x) = 6x^3 + 23x^2 + 3x - 14$
35. $f(x) = 10x^4 - 33x^3 + 66x - 40$
36. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144$
37. $f(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 5x + 20$
38. $f(x) = 18x^5 + 75x^4 + 47x^3 - 52x^2 - 11x + 3$
39. $f(x) = 6x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 2x$

40. $f(x) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$
41. $f(x) = 0.9x^3 + 4.2x^2 - 3.5x - 10$
42. $f(x) = 0.5x^5 + x^4 - 2x^3 - 4x^2$

En los problemas 43 al 48, halle todas las soluciones racionales de la ecuación dada.

43. $2x^3 + 3x^2 + 5x + 2 = 0$
44. $8x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 6x - 1 = 0$
45. $2x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 25x - 6 = 0$
46. $9x^4 + 21x^3 + 22x^2 + 2x - 4 = 0$
47. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
48. $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

En los problemas 49 al 58, halle las cotas superior e inferior para las raíces reales del polinomio dado.

49. $f(x) = 7x^3 - 4x^2 - 2x + 1$
50. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x + 6$
51. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 7$
52. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 4$
53. $f(x) = x^4 - 5x^2 - 13$
54. $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 9x$
55. $f(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 13x + 11$
56. $f(x) = 3x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 9x + 6$
57. $f(x) = 3x^5 + 2x^2 + 5x - 17$
58. $f(x) = x^6 - 10x^4 - x^2 + 10$

59. Si el coeficiente principal de un polinomio con coeficientes enteros es 1, ¿qué puede decirse sobre las posibles raíces racionales?
60. Si k es un número primo* tal que $k > 2$, ¿cuáles son las posibles raíces racionales de

$$f(x) = 6x^4 - 9x^2 + k?$$

61. ¿Para que valor de k será 3 una raíz de

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + k?$$

62. ¿Pueden hallarse valores reales de k tales que 1 sea una raíz de

$$f(x) = 4x^3 - 2k^2x + k?$$

63. Determine los valores de k tales que 1 sea una raíz de

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - k^2x + k$$

64. Enumere, pero no pruebe, todas las raíces racionales posibles de

$$f(x) = 24x^3 - 14x^2 + x - 15$$

* Un número primo es un entero positivo mayor que 1, cuyos únicos factores enteros positivos son el mismo número y el número 1. Los enteros 2, 3, 5, 7 y 11 son números primos, por ejemplo.

65. Halle un polinomio cúbico $f(x)$ con 1 y 2 como raíces, tal que $f(0) = 1$ y $f(-1) = 4$
66. Demuestre que $\sqrt{2}$ es una raíz de $f(x) = x^2 - 2$. Use el teorema 7 para probar que $\sqrt{2}$ es irracional.
67. Demuestre que $1 + \sqrt{2}$ es irracional.
68. Demuestre que $1 + \sqrt[3]{7}$ es irracional.
69. Determine el número máximo de veces que las gráficas de
- $$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
- y
- $$g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$
- pueden intersectarse.
70. La gráfica de un polinomio de grado n ($n \geq 1$) con coeficientes reales puede intersectar una recta máximo n veces. Explique.
71. Considere el polinomio
- $$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$
- donde los coeficientes a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 son enteros pares. Explique por qué -1 y 1 no pueden ser raíces de $f(x)$.
72. La gráfica de un polinomio no tiene rupturas. Suponga que $f(x)$ es un polinomio y que $f(a)f(b) < 0$. Explique por qué $f(x)$ tiene una raíz en alguna parte del intervalo (a, b) .

4.5 Raíces complejas y el teorema fundamental del álgebra

En la sección anterior nos centramos en el problema de hallar raíces reales de una función polinomial de grado mayor que 2. En la discusión que sigue, consideramos raíces complejas de estas funciones.

EJEMPLO 1

La función polinomial $f(x) = x^2 + 1$ no tiene raíces reales, ya que $x^2 + 1 > 0$ para todos los números reales. Sin embargo, puesto que el número complejo i tiene la propiedad de que $i^2 = -1$, tenemos

$$f(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

y

$$f(-i) = (-i)^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Por tanto, $f(x)$ tiene dos raíces complejas, i y $-i$.

Para un polinomio cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b y c constantes reales, sabemos que cuando $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales. Sin embargo, cuando $b^2 - 4ac < 0$, podemos escribir $-(b^2 - 4ac) > 0$; por tanto,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}i}{2a} \\ &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i \end{aligned}$$

En otras palabras, cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces de un polinomio cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$ son números complejos.

EJEMPLO 2

Halle las raíces de $f(x) = x^2 - 12x + 40$.

Solución. Según la fórmula cuadrática obtenemos

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(40)}}{2}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} x &= \frac{12 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{12 \pm 4i}{2} \\ &= 6 \pm 2i \end{aligned}$$

Por tanto, las raíces de $f(x)$ son $6 + 2i$ y $6 - 2i$.

PARES CONJUGADOS

Observe tanto en el ejemplo 1 como en el 2 que las raíces complejas del polinomio dado son pares conjugados. En otras palabras, una raíz compleja es la conjugada de la otra. Esto no es coincidencia; las raíces complejas de polinomios con coeficientes reales *siempre* aparecen en pares conjugados. Para probar esto, utilizamos los siguientes resultados concernientes a los conjugados.

Si z_1 y z_2 son números complejos, entonces puede demostrarse que

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{y} \quad \overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n \quad (17)$$

(Véanse problemas 72 y 74 en el ejercicio 2.4).

TEOREMA 8

Sea $f(x)$ un polinomio de grado $n > 1$ con coeficientes reales. Si z es una raíz compleja de $f(x)$, entonces el conjugado \bar{z} es también una raíz de $f(x)$.

Prueba: Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, donde los coeficientes a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, son números reales. Por hipótesis,

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Sacando el conjugado de ambos lados de esta ecuación da

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{0}$$

Ahora, utilizando (17) y el hecho de que el conjugado de cualquier número real es el mismo número, obtenemos

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$$

Esto significa que $f(\bar{z}) = 0$, y por tanto, \bar{z} es una raíz de $f(x)$, siempre que z sea una raíz.

EJEMPLO 3

Dado que $1 + 2i$ es una raíz del polinomio cúbico

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 20,$$

se deduce del teorema 8 que $1 - 2i$ es también una raíz.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

El siguiente teorema, llamado **teorema fundamental del álgebra**, se aplica a polinomios con coeficientes reales o complejos. Su demostración requiere matemática avanzada, y no se realizará.

TEOREMA 9

El teorema fundamental del álgebra

Un polinomio $f(x)$ de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces, donde una raíz de multiplicidad k se cuenta k veces.

Según el teorema 8, las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales se dan en pares conjugados. Por tanto cualquier polinomio de éstos debe tener un número par de raíces complejas. Por consiguiente, según el teorema 9, cualquier polinomio de *grado impar* con coeficientes reales tiene *al menos* un cero real. Por ejemplo, según el teorema fundamental del álgebra, sabemos que un polinomio cúbico tiene tres raíces. Estas podrían ser 3 números reales o un número real y dos complejos.

EJEMPLO 4

Halle todas las raíces de

$$f(x) = 2x^5 + x^4 + 10x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

Solución. Puesto que $f(x)$ es un polinomio de quinto grado, se deduce del análisis anterior que existen cinco raíces, y al menos una de ellas es real. Ahora, aplicando el teorema 7, vemos que las raíces racionales posibles son $\pm 4, \pm 2, \pm 1$, y $\pm \frac{1}{2}$. Pero puesto que no hay variaciones de signo en $f(x)$, descartamos los números positivos de esta lista. Probando el resto de números negativos por medio de la división sintética, encontramos

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 1 & 10 & 5 & 8 & 4 \\ & & -1 & 0 & -5 & 0 & -4 \\ \hline & 2 & 0 & 10 & 0 & 8 & 0 \end{array} \quad | 0 = r$$

y por tanto $-\frac{1}{2}$ es una raíz de $f(x)$. Se deduce del teorema 4 que

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + \frac{1}{2})(2x^4 + 10x^2 + 8) \\ &= (2x + 1)(x^4 + 5x^2 + 4) \end{aligned}$$

Ahora, se puede verificar fácilmente que $q(x) = x^4 + 5x^2 + 4$ no tiene raíces racionales. Entonces, las raíces de $q(x)$ son o irracionales, o complejas. Observando que

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$$

vemos que las raíces restantes de $f(x)$ son $-i, i, -2i$, y $2i$.

Si un número real c es raíz de un polinomio $f(x)$, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$. Este resultado también se aplica para las raíces complejas. El siguiente teorema es una extensión natural del teorema del factor, y es consecuencia del teorema fundamental del álgebra.

TEOREMA 10

Sean c_1, c_2, \dots, c_n (no necesariamente diferentes) las n raíces de la función polinomial de grado n :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n > 0$$

Entonces $f(x)$ puede escribirse como producto de factores lineales:

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$$

EJEMPLO 5

Sabemos por el ejemplo anterior que las raíces de

$$f(x) = 2x^5 + x^4 + 10x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

son $-\frac{1}{2}, -i, i, -2i$, y $2i$. Por consiguiente, según el teorema 10 podemos escribir

$$f(x) = 2(x + \frac{1}{2})(x + i)(x - i)(x + 2i)(x - 2i)$$

EJEMPLO 6

En el ejemplo 3 vimos que $1 + 2i$ y $1 - 2i$ son raíces de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 20$. Se deduce del teorema 10 que

$$f(x) = [x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)]q(x)$$

Dividiendo $f(x)$ por el polinomio cuadrático (con coeficientes reales),

$$[x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)] = x^2 - 2x + 5$$

encontramos

$$q(x) = x + 4$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)](x + 4) \\ &= (x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i)(x + 4) \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.5

En los problemas 1 al 10, halle todas las raíces de la función polinomial dada. Escriba $f(x)$ como un producto de factores lineales.

1. $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$

2. $f(x) = 4x^2 + 3x + 1$

3. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 2$

4. $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 30x - 22$

5. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5$

6. $f(x) = -x^3 + x^2 - 2$

7. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 16$

8. $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - x^2 - 8x + 2$

9. $f(x) = x^4 - 81$

10. $f(x) = x^6 - 1$

En los problemas 11 al 14, halle una función polinomial con coeficientes reales que tenga el grado dado y las raíces dadas.

11. Grado 2; $10i$

12. Grado 2; $7 - i$

13. Grado 3; $2, 1 + 2i$

14. Grado 4; $i, 3 - i$

15. Halle una función polinomial de cuarto grado con coeficientes reales que tenga $1 + i$ como una raíz de multiplicidad dos.

16. Explique por qué la función $f(x) = \pi x^5 + \sqrt{2}x^4 - x^2 + \sqrt{11}$ tiene al menos una raíz real.

17. Verifique que $2 + i$ es una raíz de

$$f(x) = (1 + i)x^2 - 7x + 15$$

¿Se deduce que su conjugado $2 - i$ es también una raíz de $f(x)$? Explique.

18. Explique por qué no existe un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga coeficientes reales y raíces 1, 2 e i .
19. Halle un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales de grado 2 tal que $f(0) = 5$ y $f(1 - i) = 0$.
20. Halle un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales de grado 3 tal que $f(0) = 2$, $f(1) = 0$ y $f(-i) = 0$.
- En los problemas 21 al 30, halle las raíces restantes de cada polinomio, dado que el número complejo indicado es una raíz.
21. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$; $2i$
22. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 15$; $2 - i$
23. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 21x + 34$; $-1 + 4i$
24. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$; $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
25. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$; $1 + i$
26. $f(x) = x^4 + x^2 + 1$; $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
27. $f(x) = x^4 + 7x^2 - 8$; $-2\sqrt{2}i$
28. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 28x - 24$; $2 - 2i$
29. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 10x^3 - x^2 + 6x - 10$; $3 + i$
30. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 8$; $\sqrt{2}i$

4.6 Gráficas de funciones polinomiales de grado mayor

La gráfica de una función lineal, o una función polinomial de primer grado, $f(x) = a_1x + a_0$, es siempre una recta. La gráfica de una función cuadrática, o una función polinomial de grado 2, $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, es siempre una parábola. Tales enunciados definitivos no pueden hacerse con respecto a la gráfica de una función polinomial de grado mayor. ¿Cuál es la forma de una función polinomial de quinto grado? Resulta que la gráfica de una función polinomial de grado ≥ 3 puede tener una o varias formas posibles. En general, graficar funciones polinomiales de grado ≥ 3 no es una labor directa y, a menudo, requiere técnicas avanzadas de cálculo. En consecuencia, en esta sección limitaremos nuestro análisis a graficar tipos especiales de funciones polinomiales de grados 3, 4, y 5.

FUNCION POLINOMIAL DE UN TERMINO

Comenzamos por considerar un caso especial de función potencia (véase sección 3.8).

$$f(x) = ax^n, \quad n \text{ un entero positivo} \quad (18)$$

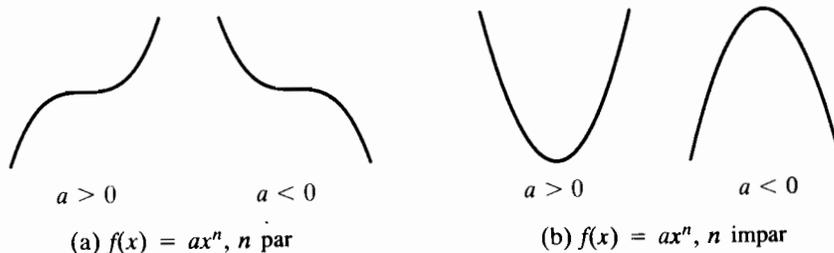


FIGURA 23

Se dice también que la función en (18) es un **polinomio de un solo término**. Puesto que $f(0) = 0$, la gráfica de f pasa por el origen. La figura 23 ilustra las 4 posibles formas de la gráfica de $f(x) = ax^n$.

Cuando $a < 0$, la gráfica se obtiene de la gráfica de $f(x) = ax^n$, $a > 0$, por medio de una reflexión por el eje x . Observe que cuando n es un entero par, $(-x)^n = x^n$, y cuando n es un entero impar, $(-x)^n = -x^n$. En consecuencia, $f(x) = ax^n$ es una función par cuando n es par y una función impar cuando n es impar.

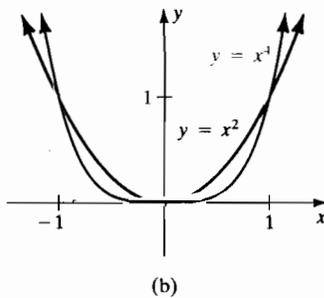
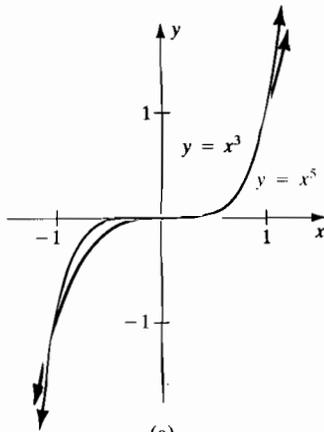


FIGURA 24

EJEMPLO 1 _____

Compare las gráficas de cada uno de los siguientes pares de funciones:

- (a) $y = x^3$, $y = x^5$
- (b) $y = x^2$, $y = x^4$

Solución. Ya hemos visto las gráficas de $y = x^2$ (figura 1(a)) y $y = x^3$ (figura 75 cap. 3). Para contrastar, las gráficas de $y = x^5$ y $y = x^4$ se muestran a color en la figura 24. Puesto que $a = 1 > 0$ para cada una de estas funciones, las gráficas son similares a las de la izquierda en (a) y (b) de la figura 23.

GRAFICAS TRASLADADAS

Para $k > 0$, las gráficas de

$$y = a(x + k)^n, \quad y = a(x - k)^n$$

y

$$y = ax^n + k, \quad y = ax^n - k$$

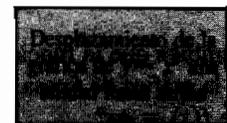
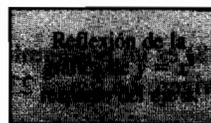
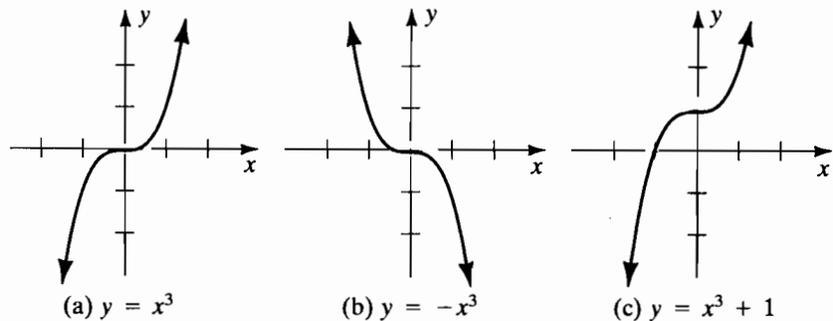
pueden obtenerse por medio de traslaciones horizontales y verticales, respectivamente, de la gráfica de $f(x) = ax^n$.

EJEMPLO 2 _____

Compare las gráficas de lo siguiente.

- (a) $f(x) = x^3$
- (b) $f(x) = -x^3$
- (c) $f(x) = x^3 + 1$
- (d) $f(x) = (x - 3)^3$
- (e) $f(x) = -x^3 + 2$
- (f) $f(x) = (x + 2)^3 + 1$

Solución. Las gráficas de las funciones en (b)–(f) pueden obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^3$, mostrada en la figura 25(a), por medio de una traslación o una reflexión.



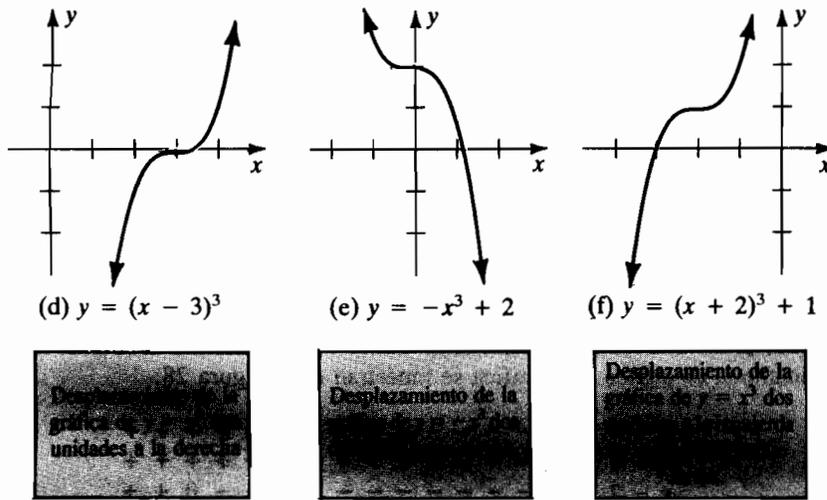


FIGURA 25

En general, la gráfica de un polinomio de tercer grado,

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

puede tener una de cuatro formas básicas, las cuales se muestran en la figura 26.

La gráfica de un polinomio de cuarto grado,

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

puede tener una de las seis formas mostradas en la figura 27.

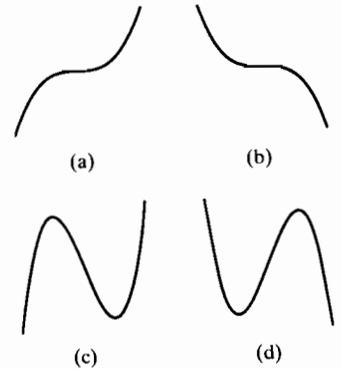


FIGURA 26

POLINOMIOS QUE SE PUEDEN FACTORIZAR

En los ejemplos restantes consideraremos sólo gráficas de polinomios que se pueden factorizar. En la mayoría de los casos, se puede obtener una gráfica totalmente precisa utilizando el procedimiento enumerado a continuación.

... suponga que se desea graficar una función polinomial $y = f(x)$ en el plano cartesiano. Para ello se debe seguir el siguiente procedimiento:

1. Determinar el grado del polinomio.
2. Determinar los coeficientes del polinomio.
3. Determinar los interceptos de la función en el eje x y en el eje y .
4. Determinar los intervalos de la función, basándose en las raíces de la ecuación $f(x) = 0$.
5. Trazar una recta numérica. Determinar los signos de la función en todos los intervalos entre los interceptos en x . Esto puede hacerse evaluando la función en un punto de cada intervalo.
6. Graficar la función utilizando los resultados de los pasos 1, 2, 3 y 5, considerando cualquier simetría adicional donde sea necesario.

En los intervalos en los que los valores de $f(x)$ son positivos ($f(x) > 0$), la gráfica de la función está por encima del eje x . La gráfica de la función está por debajo del eje x , en aquellos intervalos donde los valores de $f(x)$ son negativos ($f(x) < 0$).

EJEMPLO 3

Grafique $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

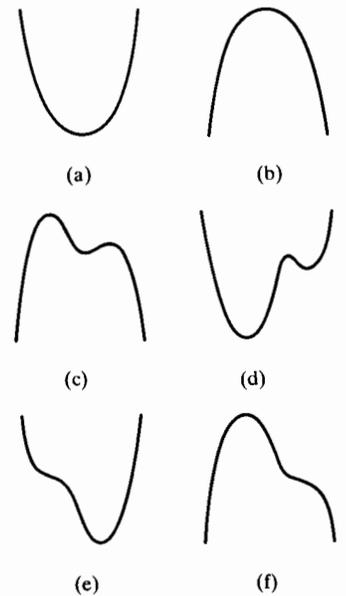


FIGURA 27

Solución

1. Puesto que

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 2(-x) = -x^3 - x^2 + 2x$$

$f(-x)$ no es igual a $-f(x)$, ni a $f(x)$. Por tanto la función no es par, ni impar. Esto es, la gráfica no es simétrica con respecto al origen, ni con respecto al eje y.

2. El intersección en y es $f(0) = 0$. La gráfica pasa por el origen.

3. El polinomio se factoriza como

$$f(x) = x(x + 1)(x - 2)$$

4. A partir del paso 3 vemos que $f(x) = 0$ para $x = 0, x = -1, y x = 2$. Los intersecciones en x son 0, -1, y 2.

5 y 6. El diagrama de signos y la gráfica se muestran en la figura 28.

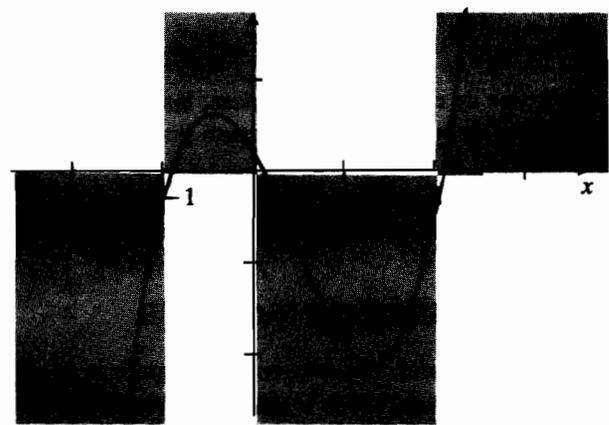
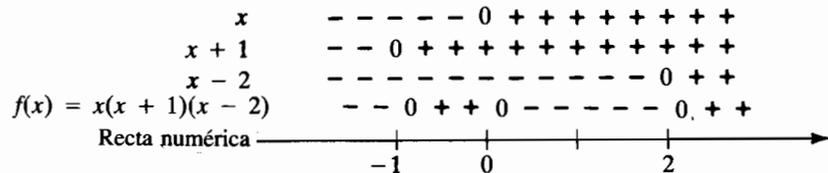


FIGURA 28

En el ejemplo 3 no hicimos ningún intento por localizar con precisión los **puntos críticos** de la gráfica, esto es, los puntos donde la función polinomial cambia de creciente a decreciente, o de decreciente a creciente. Una inspección a la figura 28 muestra que la gráfica tiene dos puntos críticos. Localizar estos puntos con precisión, requeriría, en general, técnicas de cálculo. Sin embargo, observamos que una **parábola** tiene solamente un punto crítico —a saber, su vértice— que puede encontrarse utilizando las técnicas de la sección 4.1.

EJEMPLO 4 _____

Grafique $f(x) = (1 - x)(x + 1)^2$.

Solución

1. La función no es par ni impar.
2. El intersección en y es $f(0) = 1$.
3. El polinomio ya está factorizado.
4. La inspección de la función muestra que $f(x) = 0$ en $x = -1$ y $x = 1$. Los intersecciones en x son -1 y 1.
- 5 y 6. El diagrama de signos y la gráfica se muestran en la figura 29.

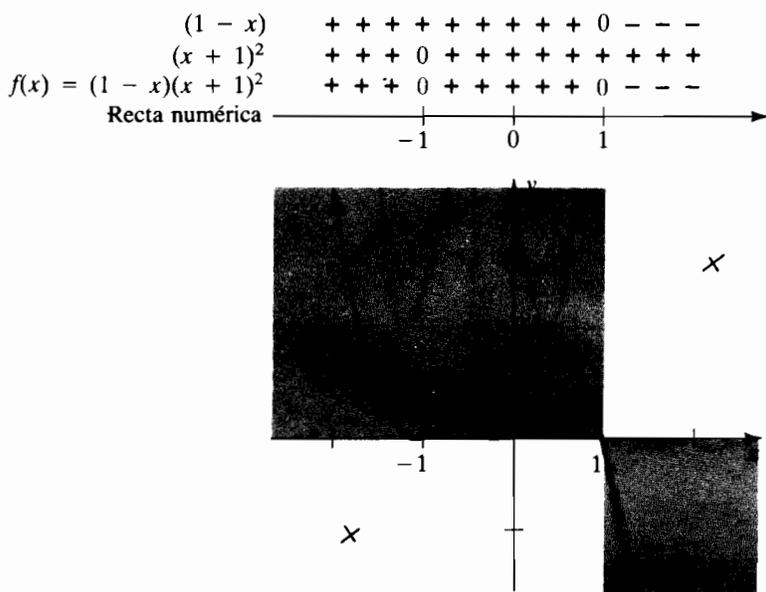


FIGURA 29

TANGENTE AL EJE x

En el ejemplo 4 observamos que a pesar de que $f(-1) = 0$, la gráfica no atraviesa el eje x en $x = -1$, sino que solamente lo “toca”. Esto se debe al hecho de que $f(x)$ no cambia signos en $x = -1$, ya que el exponente en $(x + 1)^2$ es par.

En general, si una función polinomial $f(x)$ contiene el factor $(x - k)^n$, $n > 1$, la gráfica será **tangente al eje x** en $x = k$. Si n es *par*, la gráfica estará o completamente por encima o completamente por debajo del eje de x , en un intervalo que contiene $x = k$ (excepto, por supuesto, en el punto de tangencia $x = k$, donde toca al eje x). Sin embargo, si n es *impar*, la gráfica de $f(x)$ atravesará el eje x como en la figura 25(d).

EJEMPLO 5

Grafique $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

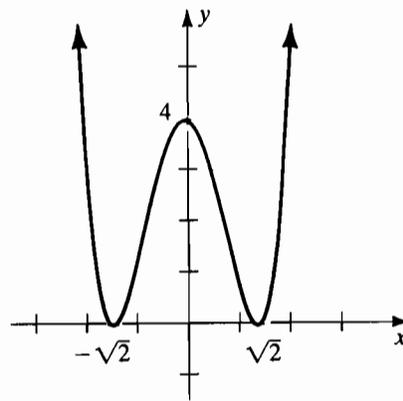
Solución

1. Puesto que $f(-x) = f(x)$, la función es par y, por tanto, su gráfica es simétrica con respecto al eje y .
2. El intersección en y es $f(0) = 4$.
3. Reconocemos que la función puede escribirse como

$$f(x) = (x^2 - 2)^2, \quad \text{o} \quad f(x) = (x + \sqrt{2})^2(x - \sqrt{2})^2$$

Por la discusión anterior, sabemos que la gráfica es tangente al eje x en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

4. Los intersecciones en x son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.
5. No hay necesidad de un diagrama de signos en este caso, ya que $(x^2 - 2)^2 \geq 0$ para todo x .
6. La gráfica es simétrica con respecto al eje y , pasa por los tres puntos $(0, 4)$, $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$, y es tangente, pero no atraviesa el eje x en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$. La gráfica en la figura 30 es una interpretación de estos datos.



$$y = x^4 - 4x^2 + 4$$

FIGURA 30

EJEMPLO 6

Grafique $f(x) = x^4 - 2x^3$.

Solución

1. La función no es par ni impar.
2. El intersección en y es $f(0) = 0$.
3. El polinomio se factoriza como

$$f(x) = x^3(x - 2)$$

Debido a que $x^3 = (x - 0)^3$, la gráfica es tangente al eje x en $x = 0$. Además, puesto que el exponente en el factor $(x - 0)^3$ es un entero impar positivo, la gráfica atraviesa el eje x en 0.

4. Los intersecciones en x son 0 y 2.
- 5 y 6. El diagrama de signos y la gráfica se muestran en la figura 31.

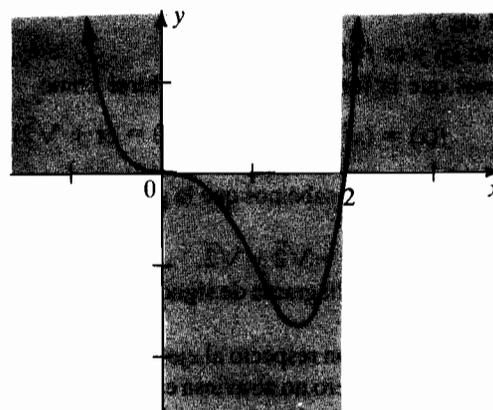
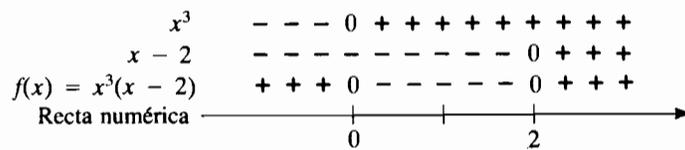


FIGURA 31

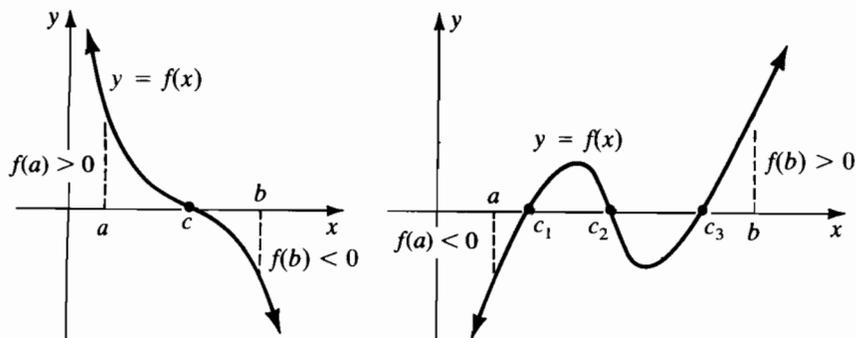


FIGURA 36 (a) $f(c) = 0$ (b) $f(c_1) = 0, f(c_2) = 0, f(c_3) = 0$

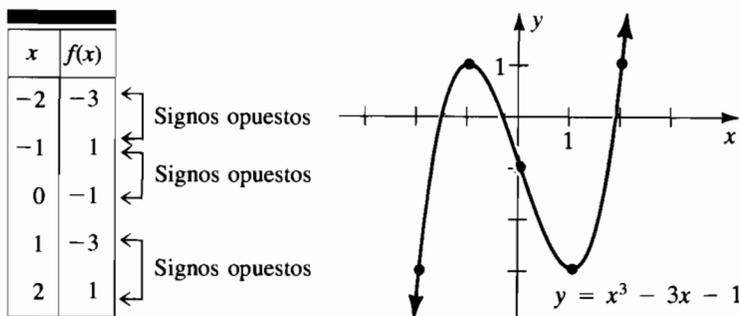


FIGURA 37

En el siguiente ejemplo obtendremos una aproximación a una raíz irracional, utilizando una técnica llamada el **método de bisección**, que puede sintetizarse como sigue:

Método de bisección

Sea $f(x)$ una función polinomial tal que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos.

1. Divida el intervalo $[a, b]$ por la mitad, hallando su punto medio $m = (a + b)/2$.
2. Calcule $f(m)$.
3. Si $f(a)$ y $f(m)$ tienen signos opuestos, entonces f tiene una raíz en el intervalo $[a, m]$.
Si $f(m)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces f tiene una raíz en el intervalo $[m, b]$.
Si $f(m) = 0$, entonces m es una raíz de f .

Si $m = (a + b)/2$ no es una raíz de f , entonces hay una raíz en un intervalo (bien sea $[a, m]$ o $[m, b]$) que tiene la mitad de la longitud del intervalo original $[a, b]$. Dividimos por la mitad este intervalo de menor longitud: el nuevo punto medio es una raíz, o hemos localizado una raíz en un intervalo que tiene la cuarta parte de la longitud del intervalo $[a, b]$. Continuando de esta manera, podemos localizar una raíz de la función en intervalos sucesivos de menor longitud. Luego tomaremos los puntos medios de estos intervalos como aproximaciones a una raíz de la función. Utilizando este método, vemos en la figura 38 que el error en la aproximación a una raíz en un intervalo es menor que la mitad de la longitud del intervalo.

Debido a que el método de bisección se usa repetitivamente, se denomina **técnica iterativa**.

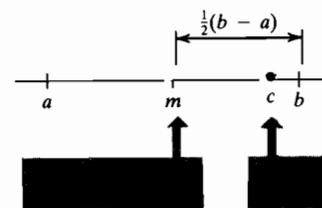


FIGURA 38

EJEMPLO 2

Halle una aproximación a la raíz de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en el intervalo $[1, 2]$ que es exacto para 3 decimales.

Solución. Recuerde que en el ejemplo 1 $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$. Ahora, para obtener la precisión deseada, debemos tener un error menor que 0.0005^* . La primera aproximación a la raíz en $[1, 2]$ es

$$m_1 = \frac{1 + 2}{2} = 1.5, \quad \text{con error} < \frac{1}{2}(2 - 1) = 0.5$$

Puesto que $f(1.5) < 0$, la raíz se encuentra en $[1.5, 2]$.

La segunda aproximación a la raíz es

$$m_2 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75, \quad \text{con error} < \frac{1}{2}(2 - 1.5) = 0.25$$

Puesto que $f(1.75) < 0$, la raíz se encuentra en $[1.75, 2]$.

La tercera aproximación a la raíz es

$$m_3 = \frac{1.75 + 2}{2} = 1.875, \quad \text{con error} < \frac{1}{2}(2 - 1.75) = 0.125$$

Después de 11 iteraciones encontramos

$$m_{11} = 1.879395, \quad \text{con error} < 0.0005$$

Por tanto el número 1.879 es una aproximación a la raíz de f en $[1, 2]$ que es precisa para tres decimales.

Dejamos como ejercicio las aproximaciones a las raíces de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en los intervalos $[-2, -1]$ y $[-1, 0]$.

Puesto que el proceso de iteración del método de bisección es a menudo largo y tedioso, es conveniente utilizar un computador. Hemos listado a continuación un programa de computador escrito en BASIC. Usted sólo necesita proporcionar una función en la línea 20.

```

10  REM METODO DE BISECCION
20  DEF FNC(X) =
30  INPUT "ESCRIBA EL EXTREMO IZQUIERDO DEL INTERVALO: ", A
40  INPUT "ESCRIBA EL EXTREMO DERECHO DEL INTERVALO: ", B
50  INPUT "ESCRIBA UNA COTA PARA EL ERROR: ", E
60  LET M = (A + B)/2
70  IF (B - A)/2 < E GOTO 170
80  IF FNC(M) = 0 GOTO 170
90  IF FNC(A)*FNC(M) < 0 GOTO 140
100 REM LA RAIZ ESTA EN LA MITAD DERECHA DEL INTERVALO
110 A = M
120 GOTO 60
130 REM LA RAIZ ESTA EN LA MITAD IZQUIERDA DEL INTERVALO
140 B = M
150 GOTO 60
160 REM PRESENTA LA RAIZ
170 PRINT "LA RAIZ ES"; M; "CON UN ERROR A LO MAS"; E
180 END

```

* Si deseamos una aproximación que sea precisa para dos decimales, iteramos hasta que el error sea menor que 0.005.

Nota de advertencia: si $f(a)$ y $f(b)$ tienen el mismo signo, la función polinomial f podría tener una o más raíces en el intervalo $[a, b]$. Véase figura 39.

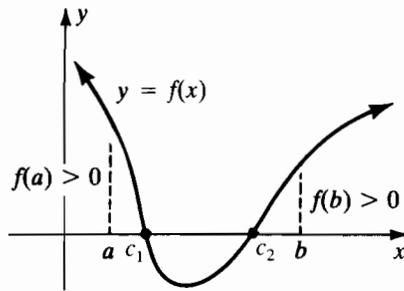


FIGURA 39

EJERCICIO 4.7

En los problemas 1 y 2, halle una aproximación que sea precisa para 3 decimales, para la raíz de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en el intervalo dado.

1. $[-2, -1]$

2. $[-1, 0]$

En los problemas 3 al 6, utilice el método de bisección para aproximar con una precisión de 3 decimales, la(s) raíz (raíces) indicada(s) por la gráfica de la función dada.

3. $f(x) = x^3 - x^2 + 4$

4. $f(x) = -x^3 - x + 11$

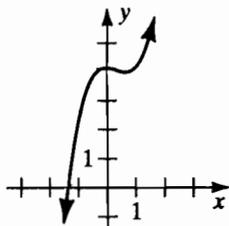


FIGURA 40

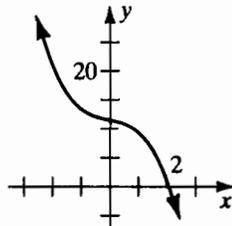


FIGURA 41

5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

6. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

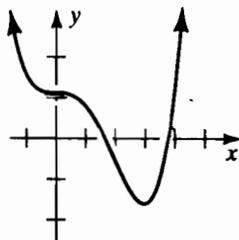


FIGURA 42

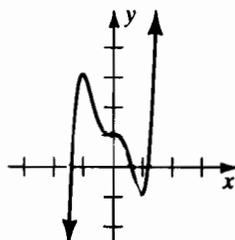


FIGURA 43

7. Una esfera de madera de radio r se coloca en el agua. Para determinar la profundidad h a la cual se hundirá, igualamos el peso del agua desplazada con el peso de la esfera (principio de Arquímedes):

$$\frac{\pi}{3} \rho_w h^2 (3r - h) = \frac{4\pi}{3} \rho_b r^3$$

donde ρ_w y ρ_b son las densidades del agua y la madera, respectivamente. (véase figura 44). Suponga que $\rho_b = 0.4\rho_w$ y $r = 2$ pulgadas.

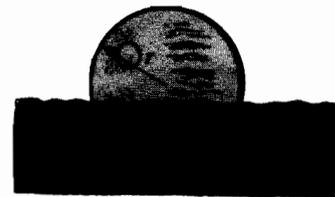


FIGURA 44

Utilice el método de bisección para aproximar con una exactitud de dos decimales la profundidad h a la cual una esfera de madera se hundirá.

8. La longitud L de un cable entre dos soportes verticales de un puente colgante está dada por

$$L = r + \frac{8}{3r} s^2 - \frac{32}{5r^3} s^4$$

donde r es el tramo de los soportes y s es la comba del cable entre los soportes (véase figura 45). Si $r = 400$ pies y $L = 404$

pies, utilice el método de bisección para aproximar a una exactitud de dos decimales, la comba s del cable. [Sugerencia: considere el intervalo $[20, 30]$.]

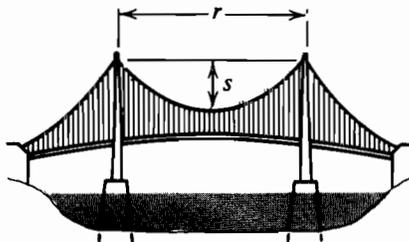


FIGURA 45

En los problemas 9 y 10, utilice el método de bisección para aproximar hasta 3 decimales, la(s) coordenada(s) x del punto(s) de intersección de las gráficas dadas.

9.

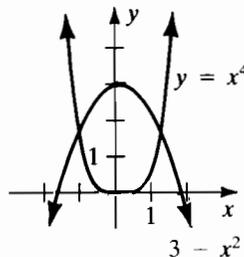


FIGURA 46

10.

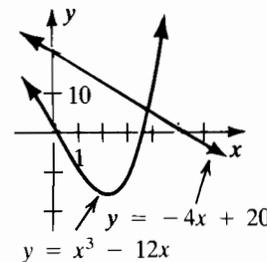


FIGURA 47

4.8 Funciones racionales

El cociente de dos funciones polinomiales

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

se denomina **función racional**. El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los cuales el denominador es cero. Por ejemplo, $f(x) = (2x^3 - 1)/(x^2 - 9)$ es una función racional con dominio $\{x | x \neq \pm 3\}$.

Para graficar una función racional, comenzamos como antes: determinamos cualquier simetría y luego hallamos los intersejos. El intersejo en y es $f(0)$, siempre y cuando el número 0 esté en el dominio de f . Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = (1 - x)/x$ no atraviesa el eje y , puesto que $f(0)$ no está definido. Si $g(x)$ y $h(x)$ no tienen factores comunes, entonces los intersejos en x de la gráfica de una función racional $f(x) = g(x)/h(x)$ son las raíces reales de $g(x)$. Esto es, la única forma como $f(x) = g(x)/h(x) = 0$ es teniendo $g(x) = 0$.

EJEMPLO 1

Grafique la función $f(x) = 2/(x - 1)$.

Solución. Puesto que $f(-x)$ no es igual a $f(x)$ ni a $-f(x)$ ni a $-f(x)$, la gráfica de f no es simétrica con respecto al eje y o al origen. El intersejo en y es $f(0) = -2$. Puesto que el numerador de la función nunca es 0, la gráfica no tiene intersejos en x . Igualando el denominador a 0, vemos que $x = 1$ no está en el dominio de la función. Como lo muestran las tablas adjuntas, cuando los valores de $|x|$ son grandes, los valores funcionales corres-

pendientes están cerca a 0. Esto es, la gráfica de la función se aproxima al eje x a medida que $|x|$ aumenta sin límite. De la misma manera, para valores de x cercanos a 1, los valores funcionales correspondientes son grandes en valor absoluto. Por tanto, la gráfica de la función se aproxima a la recta vertical $x = 1$ a medida que x se aproxima a 1. La gráfica se muestra en la figura 48.

x	$f(x)$
-999	-0.002
-99	-0.02
-9	-0.2
-1	-1
0	-2
0.5	-4
0.9	-20
0.99	-200
0.999	-2000

x	$f(x)$
1.001	2000
1.01	200
1.1	20
1.5	4
2	2
3	1
11	0.2
101	0.02
1001	0.002

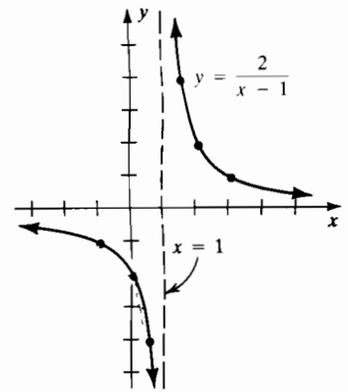


FIGURA 48

ASINTOTAS

Para indicar que x se está aproximando a un número a , utilizamos la notación

- $x \rightarrow a^-$ para indicar que x se está aproximando a a por la izquierda, y
- $x \rightarrow a^+$ para indicar que x se está aproximando a a por la derecha.

También utilizamos la notación

- $x \rightarrow \infty$ para indicar que x crece sin límite, y
- $x \rightarrow -\infty$ para indicar que x decrece sin límite.

Interpretaciones similares se dan a los símbolos $f(x) \rightarrow \infty$ y $f(x) \rightarrow -\infty$.

Por tanto, en el ejemplo 1, podemos escribir

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ a medida que } x \rightarrow 1^- \text{ y } f(x) \rightarrow \infty \text{ a medida que } x \rightarrow 1^+$$

En palabras, los valores funcionales decrecen sin límite a medida que x se aproxima a 1 por la izquierda, y los valores funcionales crecen sin límite a medida que x se aproxima a 1 por la derecha.

En la figura 48 es evidente que

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ a medida que } x \rightarrow \infty \text{ y } f(x) \rightarrow 0 \text{ a medida que } x \rightarrow -\infty$$

La recta $x = 1$ se denomina **asíntota vertical** para la gráfica de f , y la recta $y = 0$ se denomina **asíntota horizontal**. Estos dos conceptos se definen como sigue.

DEFINICION 3

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ a medida que } x \rightarrow a^- \text{ o } x \rightarrow a^+, \text{ o}$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ a medida que } x \rightarrow a^- \text{ o } x \rightarrow a^+$$

DEFINICION 4

Se dice que una recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \rightarrow c \text{ a medida que } x \rightarrow -\infty \text{ o } x \rightarrow \infty$$

La figura 49 ilustra el comportamiento ilimitado de una función cerca de una asíntota vertical $x = a$. En la figura 50 hemos ilustrado algunas asíntotas horizontales típicas. Observamos, con ayuda de la figura 50(d) que, en general, la gráfica de una función puede tener máximo *dos* asíntotas horizontales pero la gráfica de una *función racional* puede tener máximo *una* asíntota horizontal. Además, una gráfica de una función *nunca* puede atravesar una asíntota, vertical pero, como se muestra en la figura 50(a), una gráfica puede atravesar una asíntota horizontal varias veces. (Véanse problemas 19, 27, y 28).

FIGURA 49
Asíntotas verticales

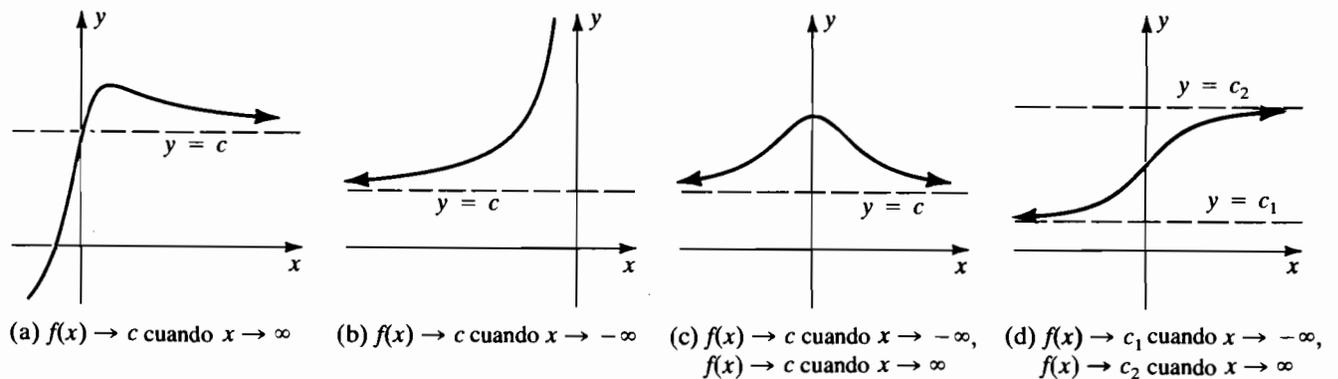
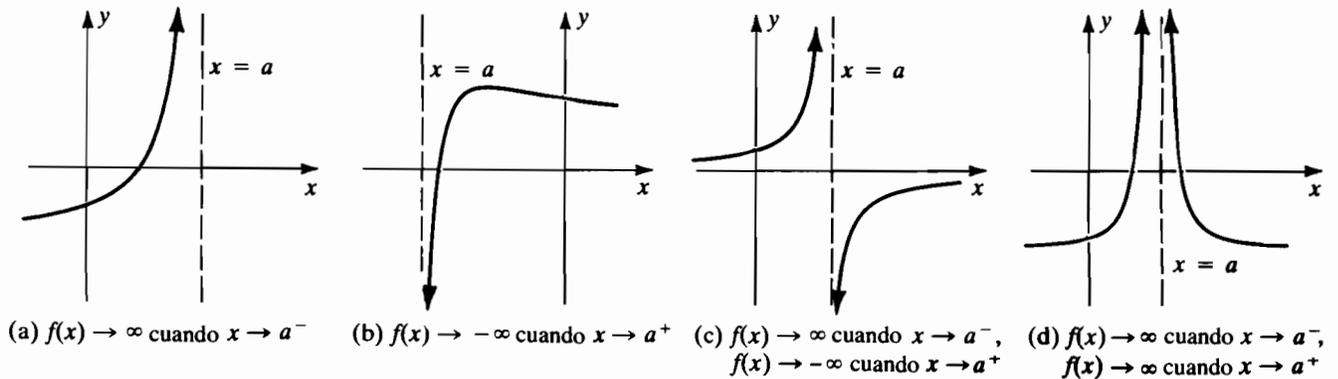


FIGURA 50
Asíntotas horizontales

En un nivel práctico, las asíntotas verticales pueden determinarse para una función racional, encontrando las raíces reales de su denominador.

Asíntotas verticales

Sea
$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{g(x)}{h(x)}$$
 una función racional tal que $g(x)$ y $h(x)$ no tengan factores comunes. La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de f si a es un número real tal que $h(a) = 0$.

EJEMPLO 2

Grafique la función $f(x) = 1/x^2$.

Solución. La función no tiene intersecciones en x o y . Pero $f(-x) = 1/(-x)^2 = f(x)$ indica que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y . Ya que el denominador de la función racional es 0 cuando $x = 0$, concluimos que la recta $x = 0$ (eje y) es una asíntota vertical. Además, cuando $x \rightarrow \infty$, vemos que $f(x) \rightarrow 0$ y por tanto la recta $y = 0$ (eje x) es una asíntota horizontal. Al usar esta información con los puntos que se obtienen de la tabla adjunta, obtenemos la gráfica que se observa en la figura 51.

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	4
1	1
2	$\frac{1}{4}$

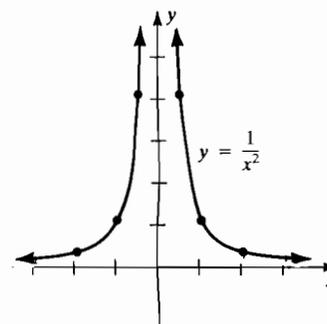


FIGURA 51

EJEMPLO 3

Grafique la función $f(x) = 1/(x + 4)^2$.

Solución. La gráfica de $f(x) = 1/(x + 4)^2$ es la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ trasladada cuatro unidades a la izquierda. En otras palabras, la recta $x = -4$ es la asíntota vertical. Al usar la figura 51 obtenemos la gráfica de la figura 52. Nótese que la función dada ahora tiene un intersección en y $f(0) = 1/4^2 = 1/16$.

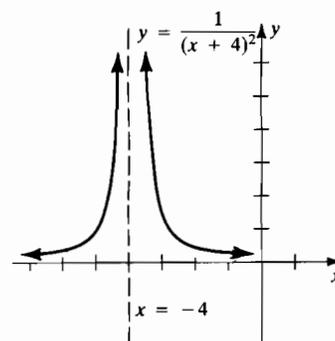


FIGURA 52

Un método para determinar si la gráfica de una función racional tiene una asíntota horizontal es dividir tanto el numerador como el denominador por la potencia más alta de x que exista en el denominador. Entonces examinamos la conducta del cociente resultante a medida que $x \rightarrow -\infty$ y $x \rightarrow \infty$.

EJEMPLO 4

Grafique la función $f(x) = (3 - x)/(2 + x)$.

Solución. La gráfica de f no es simétrica con respecto al eje y o al origen. El intersección en y es $f(0) = \frac{3}{2}$, y el intersección en x es $x = 3$. Puesto que el numerador y el denominador no tienen factores comunes y ya que el denominador es 0 cuando $x = -2$, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. Para hallar asíntotas horizontales, dividimos el numerador y el denominador por x :

$$f(x) = \frac{\frac{3}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{2}{x} + \frac{x}{x}} = \frac{\frac{3}{x} - 1}{\frac{2}{x} + 1}$$

A medida que $x \rightarrow -\infty$ y $x \rightarrow \infty$, los términos $3/x$ y $2/x$ se aproximan a 0 y los valores funcionales de $f(x)$ están cerca de $-1/1 = -1$. Por tanto, la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica se muestra en la figura 53 con las líneas punteadas indicando las asíntotas.

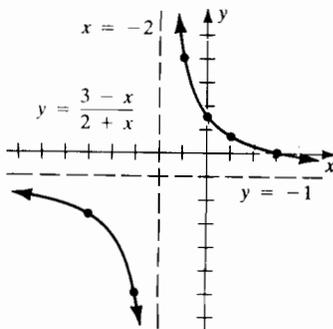


FIGURA 53

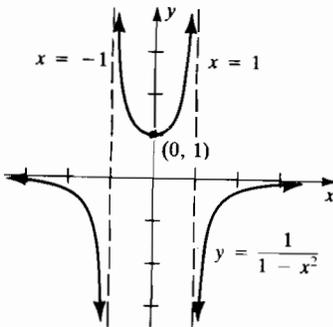


FIGURA 54

x	$f(x)$
-5	$-\frac{3}{8}$
-3	-6
-1	4
0	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{3}{2}$
3	0

EJEMPLO 5

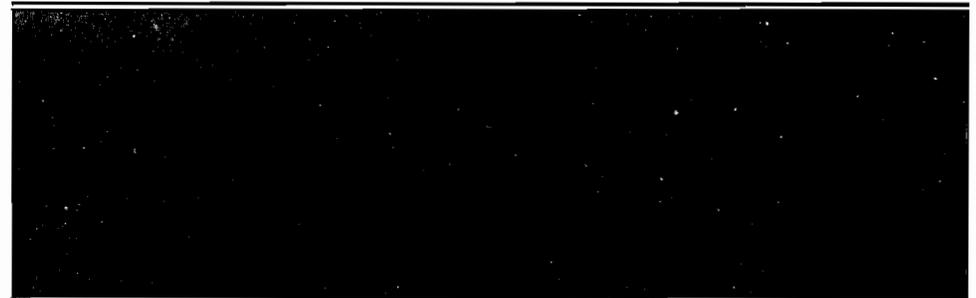
Grafique la función $f(x) = 1/(1 - x^2)$.

Solución. Puesto que

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{1 - (-x)^2} \\ &= \frac{1}{1 - x^2} = f(x) \end{aligned}$$

sabemos que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y . El intersección en y es $f(0) = 1$; no hay intersecciones en x porque el numerador 1 nunca es cero. A medida que $x \rightarrow -\infty$ y $x \rightarrow \infty$, los valores funcionales se aproximan a 0. Por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. Finalmente, resolviendo $1 - x^2 = 0$, encontramos que $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Con esta información es posible dar un esbozo aproximado de la gráfica (véase figura 54). Como en los ejemplos anteriores, es buena idea marcar algunos puntos en cualquier lado de las asíntotas verticales.

En general, el siguiente resultado sobre asíntotas horizontales puede probarse para funciones racionales de una manera similar a la ilustrada en el ejemplo 4.

**EJEMPLO 6**

Determine si la gráfica de la función dada f posee una asíntota horizontal.

(a) $f(x) = \frac{5x^3 + 1}{2x + 6}$

(b) $f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{8x^2 + 1}$

Solución

- (a) Puesto que el grado del numerador $5x^3 + 1$ es 3 y el grado del denominador $2x + 6$ es 1 (y $3 > 1$), concluimos, en vista de (iii), que la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.
- (b) En este caso, el grado del numerador $3x^2 + 4x$ es igual al grado del denominador (ambos grados son 2). Por tanto, según (ii), la gráfica de f tiene asíntota horizontal $y = \frac{3}{8}$.

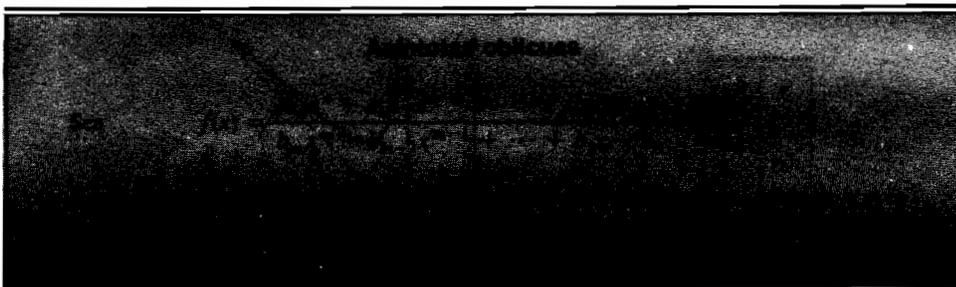
Solución alterna para (b). Dividiendo el numerador y el denominador por x^2 , podemos escribir la función f como

$$f(x) = \frac{3 + \frac{4}{x}}{8 + \frac{1}{x^2}}$$

A medida que $x \rightarrow -\infty$, $y x \rightarrow \infty$, $4/x \rightarrow 0$ y $1/x^2 \rightarrow 0$. Por tanto, $f(x) \rightarrow \frac{3}{8}$. De la definición 4, la recta $y = \frac{3}{8}$ es una asíntota horizontal.

ASINTOTAS OBLICUAS

La gráfica de una función racional f puede aproximarse a la recta $y = ax + b$, $a \neq 0$, a medida que $x \rightarrow -\infty$ y $x \rightarrow \infty$. Tal recta se denomina **asíntota oblicua** para la gráfica de f . Una asíntota oblicua para una función racional puede hallarse de la siguiente manera:



Si $g(x)$ y $h(x)$ no tienen factores comunes y el grado de $g(x)$ es uno más que el grado de $h(x)$, entonces la división da

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = ax + b + \frac{r}{h(x)}$$

donde el residuo r es una constante diferente de cero. A medida que $x \rightarrow -\infty$ o $x \rightarrow \infty$ $r/h(x) \rightarrow 0$ y entonces los valores funcionales de f se aproximan más y más a $ax + b$.

EJEMPLO 7 _____

Grafique la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 4}$$

Solución. Para esclarecer la discusión identificamos las funciones $g(x) = x^2 - x - 6$ y $h(x) = x - 4$.

Simetría: no hay simetría con respecto al eje y o al origen.

$$\text{Intersecto en } y: f(0) = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

Intersectos en x: $f(x) = 0$ cuando $g(x) = x^2 - x - 6 = 0$. Puesto que $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$, vemos que -2 y 3 son los intersecciones en x .

Asíntotas verticales: $h(x) = x - 4 = 0$ cuando $x = 4$. La recta $x = 4$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: ninguna

Asíntotas oblicuas: puesto que el grado de $g(x) = x^2 - x - 6$ (el cual es 2) es uno más que el grado de $h(x) = x - 4$ (el cual es 1), la gráfica de f tiene una asíntota oblicua. Para hallarla, dividimos:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 4} = \underbrace{x + 3}_{\text{Cociente}} + \frac{6}{x - 4} \leftarrow \text{Residuo}$$

Observe que $r/h(x) = 6/(x - 4) \rightarrow 0$ a medida que $x \rightarrow -\infty$ y $x \rightarrow \infty$. Por tanto la recta $y = x + 3$ es una asíntota oblicua.

Marcación de puntos: utilizando la información anterior y marcando puntos de la tabla adjunta, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 55. Las asíntotas son las líneas punteadas en la figura.

x	$f(x)$
-2	0
-1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{3}{2}$
1	2
2	2
3	0
5	14
6	12
7	12
8	$\frac{23}{2}$

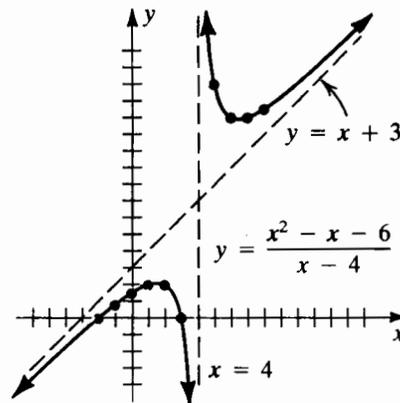


FIGURA 55

EJERCICIO 4.8

En los problemas 1 al 20, halle las asíntotas horizontales y verticales. Grafique.

1. $f(x) = \frac{1}{x - 2}$

2. $f(x) = \frac{4}{x + 3}$

3. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

4. $f(x) = \frac{x}{2x - 5}$

5. $f(x) = \frac{4x - 9}{2x + 3}$

6. $f(x) = \frac{2x + 4}{x - 2}$

7. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

9. $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$

11. $f(x) = \frac{1}{x^3}$

13. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

8. $f(x) = \frac{2 - 3x}{x}$

10. $f(x) = \frac{4}{(x + 2)^3}$

12. $f(x) = \frac{8}{x^4}$

14. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

15. $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$

16. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$

17. $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$

18. $f(x) = \frac{16}{x^2 + 4}$

19. $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^3}$

20. $f(x) = \frac{x(x-5)}{x^2 - 9}$

En los problemas 21 y 22, determine si la función dada tiene una asíntota vertical. Grafique.

21. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

22. $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

En los problemas 23 al 26, halle las asíntotas verticales y oblicuas. Grafique.

23. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x}$

24. $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x}$

25. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 2}$

26. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

En los problemas 27 y 28, halle el punto(s) en la gráfica de la función dada en donde la gráfica corte su asíntota horizontal. No grafique.

27. $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 + 1}$

28. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^3 + 3}$

En los problemas 29 y 30, halle las asíntotas verticales. No grafique.

29. $f(x) = \frac{5x + 7}{9x^3 - 12x^2 + x + 2}$

30. $f(x) = \frac{1}{5x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x}$

31. Una resistencia de 5 ohmios y una resistencia variable se colocan en paralelo, como se muestra en la figura 56. La resistencia resultante R (en ohmios) está relacionada con la resistencia r (en ohmios) de la resistencia variable, por medio de la ecuación

$$R = \frac{5r}{5 + r}$$

Trace la gráfica de R como una función de r .

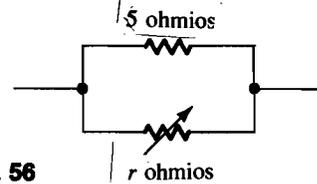


FIGURA 56

32. La potencia eléctrica P producida por cierta fuente está dada por

$$P = \frac{E^2 r}{R^2 + 2Rr + r^2}$$

donde E es el voltaje de la fuente, R es la resistencia de la fuente, y r es la resistencia del circuito. Trace la gráfica de P como una función de r utilizando los valores $E = 5$ voltios y $R = 1$ ohmio.

33. Las distancias moleculares en bioquímica se pueden medir con una espectroscopia fluorescente debido a un fenómeno de transferencia de energía. La eficiencia de transferencia E está relacionada con la distancia molecular r entre el donante y el beneficiario por

$$E = \frac{r_0^6}{r_0^6 + r^6}$$

donde r_0 es una constante relacionada con el donante-beneficiario. Trace la gráfica de E como una función de r , para $r_0 = 1$.

34. La intensidad de iluminación de una fuente de luz en cualquier punto es directamente proporcional a la fuerza de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente. Dadas dos fuentes de fuerza de 16 unidades y dos unidades, separadas 100 cm, como lo muestra la figura 57, la intensidad I en cualquier punto P entre ellos está dada por

$$I(x) = \frac{16}{x^2} + \frac{2}{(100-x)^2}$$

donde x es la distancia en centímetros desde la fuente de 16 unidades. Trace la gráfica de $I(x)$ para $0 < x < 100$.

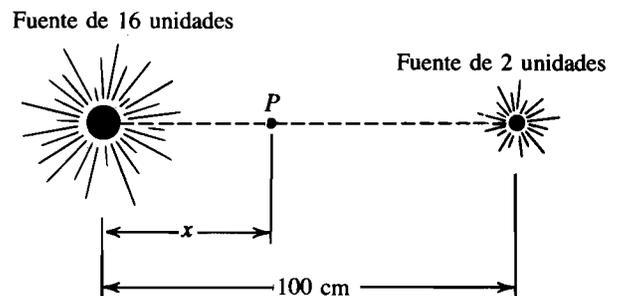


FIGURA 57

CONCEPTOS IMPORTANTES

Función polinomial
gráficas
raíces

Raíces de multiplicidad k

Función cuadrática
vértice

Función creciente

Función decreciente
Algoritmo de la división
División sintética

Teorema del residuo

Teorema del factor

Regla de signos de Descartes

Cotas para ceros reales

Teorema fundamental del álgebra

Teorema del valor intermedio

Método de bisección

Función racional

asíntota vertical

asíntota horizontal

asíntota oblicua

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 20 llene los espacios o responda falso o verdadero.

- La función $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 5x - 1$ no es una función polinomial. _____
- La función racional $f(x) = (4x^2 - 6)/(x^2 - 5x + 4)$ tiene asíntotas verticales. _____
- La función racional $f(x) = (x^3 - x)/(4 - 2x^3)$ tiene la asíntota horizontal _____. _____
- La gráfica de una función con una asíntota horizontal nunca puede atravesar esa asíntota. _____
- El vértice de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 4x + 4$ es _____. _____
- El vértice de la gráfica de $f(x) = x^2$ es $(0, 0)$. Por tanto el vértice de la gráfica de $f(x) = (x - 10)^2 + 2$ es $(10, 2)$. _____
- El rango de la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 2x + 5$ es _____. _____
- La función $f(x) = x^2 - 6x$ es creciente en el intervalo _____. _____
- Cuando un polinomio de grado mayor de 1 se divide por $x - 1$, el residuo es siempre una constante. _____
- Un polinomio de tercer grado con raíces 0, 1, $y - 1$ es _____. _____
- La gráfica de la función polinomial $f(x) = x^3(x - 1)^2(x - 5)$ es tangente al eje x en _____. _____
- La gráfica de la función polinomial $f(x) = 3x^3 + x^2 - x - 8$ puede atravesar el eje x a lo sumo 4 veces. _____
- La función polinomial $f(x) = 5x^3 + x + 9$ tiene al menos un cero real. _____
- La gráfica de la función racional $f(x) = (x^2 + x + 1)/x$ tiene una asíntota oblicua. _____
- La gráfica de $f(x) = x(x - 1)(x + 2)$ es simétrica con respecto al origen. _____
- Si $-1 + i$ es una raíz de

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$
entonces otra raíz es _____. _____
- La gráfica de $y = (x - 6)^5$ es la gráfica de $y = x^5$ trasladada 6 a la _____. _____
- La gráfica de $f(x) = x^4 + 5x^2 + 2$ no corta el eje x . _____
- Un polinomio debe tener al menos un cero racional. _____
- $x - 1$ es un factor de $f(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x$.
- Utilice la división larga para dividir $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 4$ por $g(x) = 3x^2 - 1$.
- Utilice la división larga para dividir $f(x) = 15x^4 - 2x^3 + 8x + 6$ por $g(x) = 5x^3 + x + 2$.
- Utilice la división sintética para dividir $f(x) = 7x^4 - 6x^2 + 9x + 3$ por $g(x) = x - 2$.
- Utilice la división sintética para dividir $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 8x$ por $g(x) = x + 1$.
- Determine el residuo cuando $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 9$ se divide por $g(x) = x + 3$, sin hacer en realidad la división.
- Determine el valor de k tal que el residuo en la división de $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + kx - 1$ por $g(x) = x - 4$ sea $r = 6$.
- Utilice la división sintética para hallar el valor de

$$f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 1$$
en $x = 2$.
- Halle un valor de k tal que $x + \frac{1}{2}$ sea un factor de $f(x) = 8x^2 - 4kx + 9$.
- Halle un valor de k tal que $x - k$ sea un factor de $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 12$.
- Factorice el polinomio cuadrático $f(x) = 3x^2 + 12x - 1$.
- Explique por qué la función polinomial

$$f(x) = 4x^{10} + 9x^6 + 5x^4 + 13x^2 + 3$$
no tiene raíces reales.
- Enumere, pero no pruebe, todas las raíces racionales posibles de

$$f(x) = 8x^4 + 19x^3 + 31x^2 + 38x - 15$$
- Halle todos las raíces de $f(x) = 12x^3 + 16x^2 + 7x + 1$.
- Pruebe que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un número irracional.
- Considere el polinomio

$$f(x) = \pi x^6 - (1 + \sqrt{2})x^3 - 151$$
Sin hallarlas, determine el número de raíces reales de $f(x)$ y el número de raíces complejas.
- Halle cotas superiores e inferiores para las raíces reales de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.
- Explique por qué las gráficas de los polinomios

$$f_1(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
y

$$f_2(x) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$
pueden intersectarse a lo sumo dos veces.

38. Se lanza una bola hacia arriba. Suponga que su posición en pies por encima del suelo después de t segundos está dada por $s(t) = -16t^2 + 64t$.
- ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la bola?
 - ¿Cuándo se alcanza la máxima altura?
 - ¿Cuándo toca el suelo la bola?
39. Determine una función cuadrática que describa el arco parabólico mostrado en la figura 58.

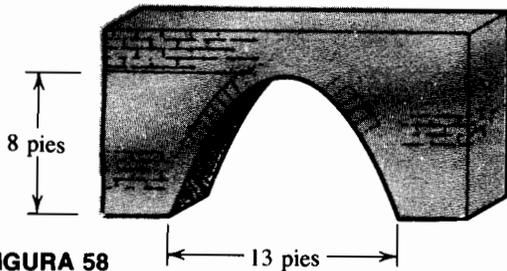


FIGURA 58

40. Si un cilindro de altura h se inscribe en una esfera de radio 1, verifique que el volumen $V(h)$ del cilindro esté dado por $V(h) = \pi h [1 - (h/2)^2]$ (véase figura 59). Trace la gráfica de $V(h)$ para $h < 0$.

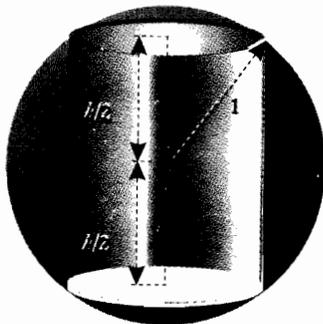


FIGURA 59

En los problemas 41 al 50, aparece la función racional dada con una de las gráficas (a) - (j).

41. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 42. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ 43. $f(x) = \frac{2x}{x - 2}$
44. $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ 45. $f(x) = \frac{x}{(x - 2)^2}$ 46. $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x - 2}$
47. $f(x) = \frac{x^2 - 10}{2x - 4}$ 48. $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 2}$
49. $f(x) = \frac{2x}{x^3 + 1}$ 50. $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

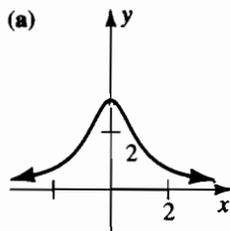


FIGURA 60

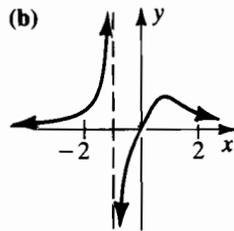


FIGURA 61

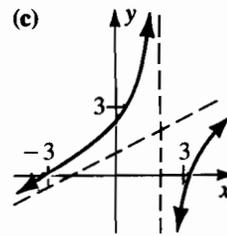


FIGURA 62

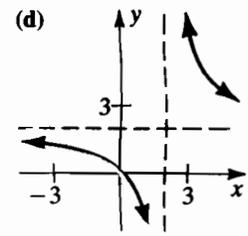


FIGURA 63

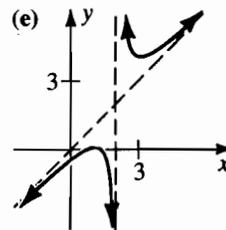


FIGURA 64

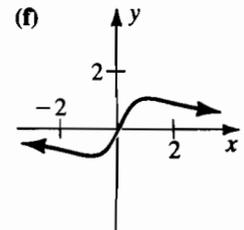


FIGURA 65

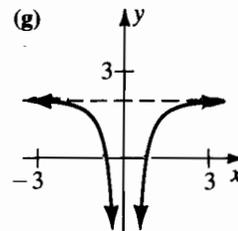


FIGURA 66

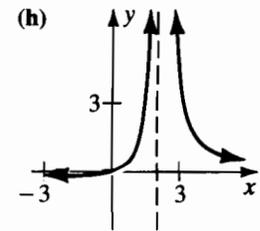


FIGURA 67

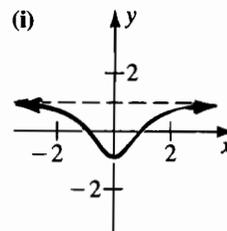


FIGURA 68

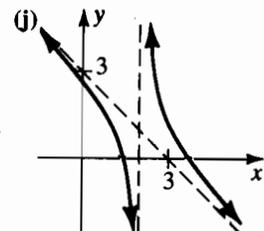


FIGURA 69

En los problemas 51 y 52, grafique la función racional dada. Halle los intersejos y las asíntotas.

51. $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 6}$

52. $f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 + 9}{x^2}$

53. Debido a que un supervisor debe emplear parte de su tiempo inspeccionando a cada subordinado, una organización pondrá generalmente un límite máximo s , llamado *periodo de control*, sobre el número de subordinados que un supervisor pueda tener. Puesto que la supervisión disminuye el trabajo "productivo", el número actual N de empleados que se requie-

5.1 Funciones exponenciales

EXPONENTES IRRACIONALES

En la sección 1.5 definimos b^r para cualquier base positiva b y cualquier exponente *racional* r ; por ejemplo:

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3} \quad \text{y} \quad 3^{1.4} = 3^{14/10} = 3^{7/5} = (\sqrt[5]{3})^7$$

Para cualquier número *irracional* r , b^r puede definirse, pero una definición más precisa va más allá del alcance de este texto. Sin embargo, podemos insinuar un procedimiento posible para definir un número como $3^{\sqrt{2}}$. Ya que

$$\sqrt{2} = 1.414213562. \dots$$

los números racionales

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \dots$$

dan en orden sucesivo mejores aproximaciones a $\sqrt{2}$. Esto indica que los números

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, \dots$$

dan en orden sucesivo mejores aproximaciones al valor de $3^{\sqrt{2}}$. De hecho esto puede demostrarse con una definición precisa de b^r para un r irracional. Utilizando la tecla $\boxed{y^x}$ de una calculadora científica, encontramos que la aproximación con nueve cifras decimales para $3^{\sqrt{2}}$ es 4.728804386.

Aceptemos la siguiente formulación como un hecho:

Para $b > 0$ y cualquier número real r , la expresión b^r representa un único número real, además, las leyes de los exponentes son válidas para todos los exponentes reales.

FUNCION EXPONENCIAL

Ahora podemos dar una definición de una **función exponencial**.

DEFINICION 1

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, la **función exponencial con base b** es

$$f(x) = b^x \quad (1)$$

En la definición 1 la base b se limita a los números positivos así que b^x siempre será un número real. Con esta restricción una expresión como $(-4)^{1/2}$ no es posible. Cuando $b = 1$, simplemente obtenemos la función constante $f(x) = 1^x = 1$.

En los siguientes dos ejemplos graficamos las funciones exponenciales con bases 3 y $\frac{1}{3}$, respectivamente.

EJEMPLO 1 _____

Grafique la función $f(x) = 3^x$

Solución. Primero obtenemos una tabla de valores para $y = 3^x$. Como se indica en la figura 1, marcamos los puntos que se obtienen de la tabla y los unimos con una curva uniforme.

Nótese que la gráfica de $f(x) = 3^x$ es una función creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	f(x)
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9

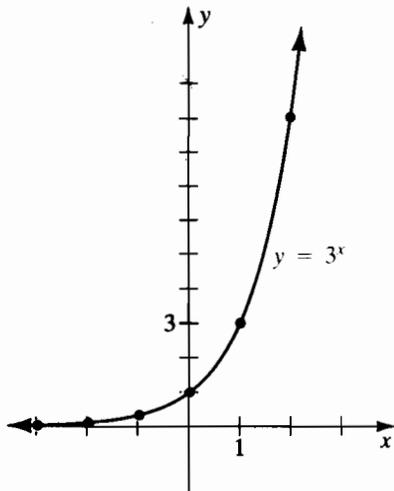


FIGURA 1

EJEMPLO 2 _____

Grafique la función $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.

Solución. Obtenemos la gráfica de esta función marcando los puntos cuyas coordenadas se enumeran en la tabla anexa.

Como se aprecia en la figura 2, $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ es una función decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	f(x)
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$

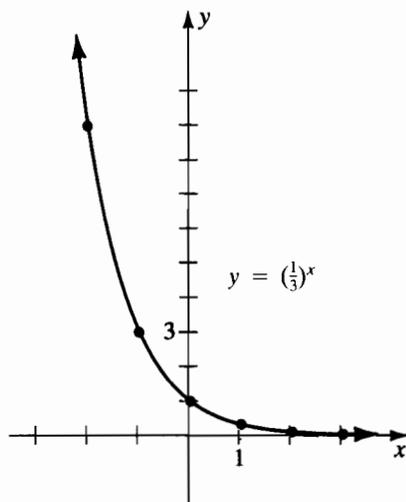


FIGURA 2

Nótese que la gráfica de la función $f(x) = 3^{-x}$ es exactamente la misma gráfica de la figura 2 ya que $3^{-x} = (\frac{1}{3})^x$.

Como los dos ejemplos anteriores indican, la gráfica de una función exponencial $f(x) = b^x$ puede tener dos formas, dependiendo de si $0 < b < 1$ o $b > 1$. En la figura 3 vemos el bosquejo de las gráficas para cada uno de estos casos.

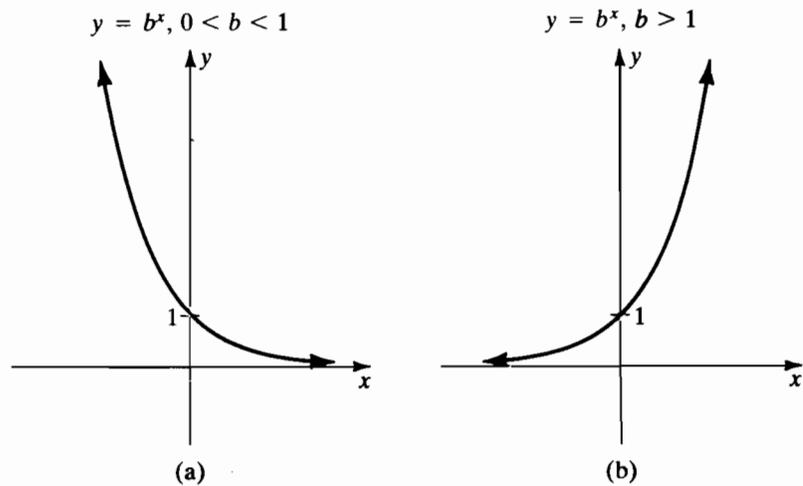


FIGURA 3

PROPIEDADES DE LA FUNCION EXPONENCIAL

En los bocetos de la figura 3 observamos las siguientes propiedades de la función exponencial f con base b .

- El dominio de f es el conjunto de los números reales.
- El rango de f es el conjunto de los números reales positivos.
- El intersección en y para la gráfica de f es 1. La gráfica de f no tiene intersecciones en x .
- El eje x es una asíntota horizontal para la gráfica de f .
- La función f es creciente si $b > 1$ y decreciente si $0 < b < 1$.
- la función f es uno a uno.

EJEMPLO 3

Una función como $f(x) = 3^{x+2}$ es un múltiplo constante de una función exponencial (1) ya que

$$f(x) = 3^{x+2} = (3^2)3^x = (9)3^x$$

Además, en la sección 3.6 aprendimos que la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ es la gráfica de $y = 3^x$ trasladada dos unidades hacia la izquierda (véase figura 4).

OTROS EXPONENTES

Como se indica en los siguientes dos ejemplos, cuando el exponente de la base b es una expresión algebraica que contiene x , la gráfica de la función no se parece a las que muestra la figura 3.

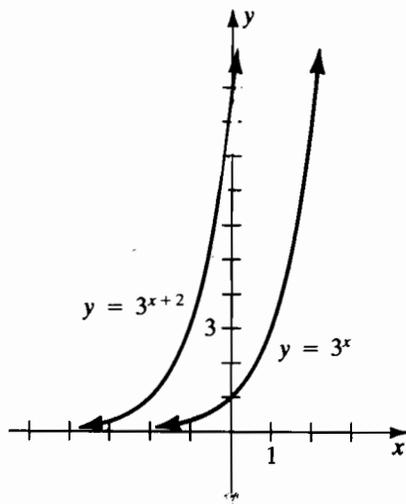


FIGURA 4

EJEMPLO 4

Grafique la función $f(x) = 3^{x^2}$.

Solución. Observamos que

$$f(-x) = 3^{(-x)^2} = 3^{x^2} = f(x)$$

implica que f es una función par. En consecuencia su gráfica es simétrica con respecto al eje y . El intersección en y de la gráfica es $f(0) = 3^0 = 1$.

Utilizando esta información y marcando los puntos que resultan de la tabla anexa podemos graficar la función como se muestra en la figura 5.

x	$f(x)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	3
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	9
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	27

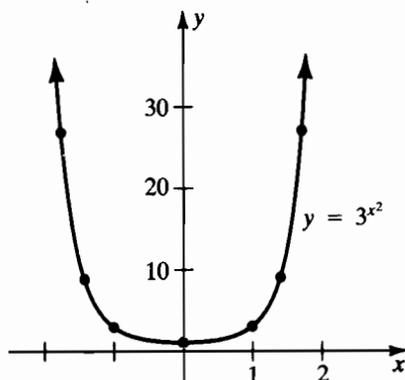


FIGURA 5

EJEMPLO 5

Grafique la función $f(x) = 3^{-x^2}$.

Solución. Como en el ejemplo 4, esta función es par. Obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 6 usando la simetría y marcando los puntos cuyas coordenadas se indican en la tabla adjunta. Nótese que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$. Esto significa que la recta $y = 0$, es decir, el eje x es una asíntota horizontal.

x	f(x)
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

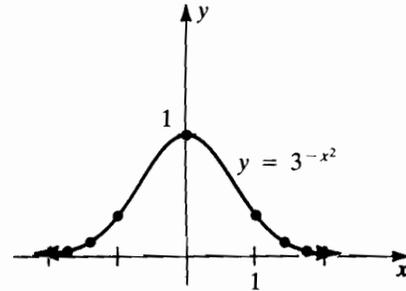


FIGURA 6

EL NUMERO e

Aunque no podemos probarlo, la base b más importante en (1) es el número irracional

$$e = 2.718281828459. . .$$

Debido a su importancia, muchas calculadoras con funciones científicas tienen una tecla e^x que nos permite calcular e^x directamente (en lugar de utilizar y^x) para cualquier número real x . En algunas calculadoras e^x se calcula utilizando a cambio, las teclas INV y ln . Veremos el porqué en la sección 5.2. Ya que $b = 1/e < 1$ y $b = e > 1$, las gráficas de $f(x) = e^{-x}$ y $f(x) = e^x$ son similares a las que se muestran en las figuras 3(a) y (b) respectivamente. Véase figura 7.

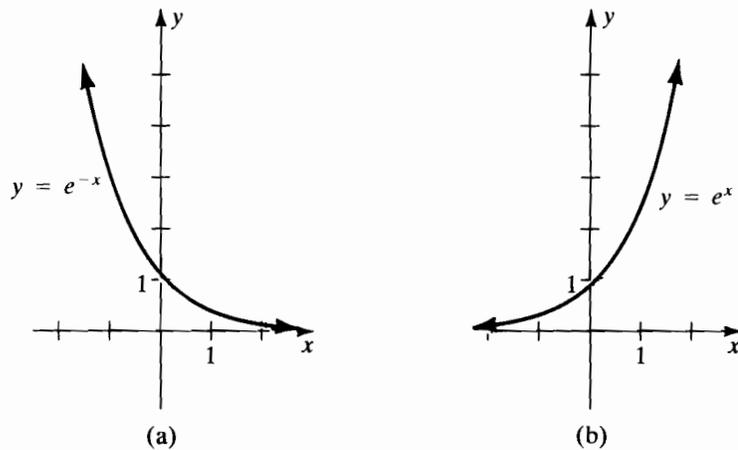


FIGURA 7

En cálculo el número e surge del estudio de la función f definida por

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

en donde n es un entero positivo. Puede probarse que los valores funcionales $f(n)$ se acercan al número e , a medida que n aumenta sin límite, es decir,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \text{ cuando } n \rightarrow \infty \tag{2}$$

(Véase problema 67).

EJEMPLO 6

Calcule (a) e^3 y (b) $1/e^2$.

Solución

(a) Utilizando la tecla e^x (o INV y ln) de una calculadora, encontramos

$$e^3 \approx 20.0855$$

(b) Primero $1/e^2$ como e^{-2} , registramos -2 en la calculadora, y luego presionamos la tecla e^x :

$$e^{-2} \approx 0.1353$$



Muchas calculadoras tienen capacidad para ocho o nueve cifras decimales. Sin embargo, en este texto, por comodidad y espacio las respuestas de los cálculos se redondearán a cuatro cifras decimales.

La curva adoptada por un cable telefónico o una cuerda larga que cuelga sobre su propio peso entre dos soportes fijos se llama **catenaria**. La palabra "catenaria" viene del término en latín para cadena, *catena*. La forma del famoso arco de entrada en San Louis, Missouri, es una catenaria invertida. Puede probarse que bajo ciertas condiciones un cable colgante asume la forma de la gráfica de la función

$$f(x) = c \frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2} \tag{3}$$

donde c es una constante positiva que depende de las características físicas del cable. Las funciones como (3) constan de ciertas combinaciones de e^x y e^{-x} , y aparecen en tantas aplicaciones que los matemáticos les han dado nombres. En particular, si $c = 1$ en (3), la función f definida por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

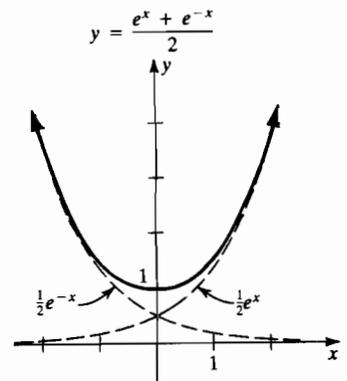


FIGURA 8

se llama el **coseno hiperbólico**. Su gráfica, una catenaria, se muestra en la figura 8 y puede obtenerse con la suma de las coordenadas en y .

EJERCICIO 5.1

En los problemas del 1 al 20, grafique la función dada.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. $f(x) = 2^x$ | 2. $f(x) = 2^{-x}$ |
| 3. $f(x) = -2^x$ | 4. $f(x) = -2^{-x}$ |
| 5. $f(x) = 2^{x+1}$ | 6. $f(x) = 2^{2-x}$ |
| 7. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ | 8. $f(x) = 2^{x^2}$ |
| 9. $f(x) = (2^x)^2$ | 10. $f(x) = 2^{(x-1)^2}$ |
| 11. $f(x) = 2^{-x^2}$ | 12. $f(x) = x2^x$ |
| 13. $f(x) = 2^{ x }$ | 14. $f(x) = 2^{- x }$ |
| 15. $f(x) = (\frac{3}{2})^x$ | 16. $f(x) = (\frac{2}{3})^x$ |
| 17. $f(x) = 3^x - 3$ | 18. $f(x) = 3^{-x} + 1$ |
| 19. $f(x) = 3^{-x+1}$ | 20. $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ |

En los problemas del 21 al 38, conteste verdadero o falso.

- | | |
|---|--|
| 21. $2^{2x} = 4^x$ ___ | 22. $2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$ ___ |
| 23. $2^{x-1} = \frac{1}{2}(2^x)$ ___ | 24. $2^{-x} = (2^x)^{-1}$ ___ |
| 25. $2^x \cdot 2^y = 4^{x+y}$ ___ | 26. $3^x \cdot 4^x = 12^x$ ___ |
| 27. $2^{3x} \cdot 2^{2x} = 2^{5x}$ ___ | |
| 28. $2^x + 2^{-x} = (2 + 2^{-1})^x$ ___ | |
| 29. $2^{x^2} = (2^x)^2$ ___ | 30. $2^{-x^2} = (\frac{1}{2x})^2$ ___ |
| 31. $\frac{2^{x^2}}{2^x} = 2^x$ ___ | 32. $(\frac{2}{3})^x = 3^x \cdot 2^{-x}$ ___ |
| 33. $4^{x/2} = 2^x$ ___ | 34. $2^{-x} = 2^{1/x}$ ___ |

35. $2^{x-1} = (2^x)^{-1}$ ___ 36. $2^{|x|} = |2^x|$ ___
 37. $2^{3+3x} = 8^{1+x}$ ___ 38. $e^x + e^{-x} = e^0$ ___

En los problemas del 39 al 42, la gráfica de una función exponencial $f(x) = b^x$ pasa por el punto dado. Encuentre f .

39. (3, 216) 40. (-1, 5)
 41. (-1, e^2) 42. (2, e)

En los problemas 43 al 48 encuentre los intersejos en x y en y de la gráfica de la función dada. No grafique.

43. $f(x) = 2^x - 4$
 44. $f(x) = 3^{2x} + 9$
 45. $f(x) = xe^x + e^{x+1}$
 46. $f(x) = x^2 2^x - 2^x$
 47. $f(x) = x^3 8^x + 5x^2 8^x + 6x 8^x$
 48. $f(x) = \frac{2^x - 6 + 2^{3-x}}{x + 2}$

49. Encuentre una ecuación de la recta que se muestra en la figura 9.

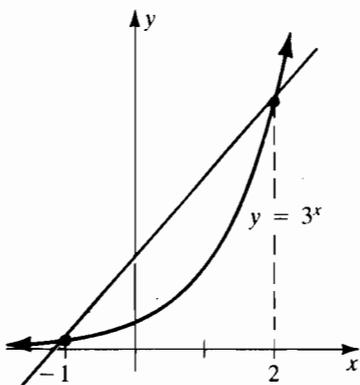


FIGURA 9

50. Encuentre el área de la región sombreada en la figura 10.

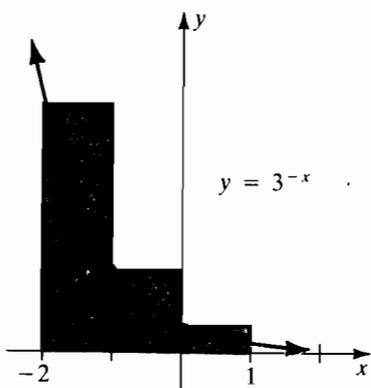


FIGURA 10

En los problemas 51 al 54, utilice las gráficas para determinar el número de soluciones de cada ecuación. No trate de resolver la ecuación. [Sugerencia: tome el lado derecho de la ecuación como $f(x)$ y el izquierdo como $g(x)$].

51. $2^x = 3 - x^2$
 52. $4^{-x} = 2x + 4$
 53. $e^x = x$
 54. $2^{x^2} = 2^{-x} + 2$

En los problemas 55 y 56 determine el rango de la función dada.

55. $f(x) = 5 + 10^{-x}$ 56. $f(x) = 4 - 2^{-x}$

57. Grafique la función $f(x) = (e^x - e^{-x})/2$. La función f se llama seno hiperbólico.

58. La gráfica de la función

$$f(x) = ae^{-be^{-cx}}$$

se llama **curva de Gompertz** y se presenta en algunos estudios empresariales y de población. Diseñe una gráfica de f en cada uno de estos casos.

- (a) $a = 5, b = 1, c = 1$
 (b) $a = 10, b = 1, c = -1$

En los problemas 59 al 66 utilice una calculadora para expresar el número dado en cuatro cifras decimales.

59. (a) $4^{1.7}$; (b) $4^{1.73}$; (c) $4^{1.732}$; (d) $4^{1.7321}$; (e) $4^{\sqrt{3}}$
 60. (a) $2^{2.7}$; (b) $2^{2.71}$; (c) $2^{2.718}$; (d) $2^{2.7182}$; (e) 2^e
 61. $8^{\sqrt{7}}$
 62. $6^{-\sqrt{2}}$
 63. $\sqrt{5 + \sqrt{5}}$
 64. $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^{2/\sqrt{3}}$
 65. $e^{-0.02589}$
 66. $(\sqrt{e})^{e^{0.64}}$

67. Sea f la función definida por

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

donde n es un entero positivo. Llenando la siguiente tabla, verifique que $f(n) \rightarrow e$ cuando $n \rightarrow \infty$.

n	$f(n)$
1	2.0000000
10	2.5937425
100	
1,000	
10,000	
100,000	
1,000,000	
10,000,000	

Funciones logarítmicas

Ya que la función exponencial $y = b^x$ ($b > 0, b \neq 1$) es uno a uno, tiene en consecuencia una función inversa. Para encontrarla, utilizamos la alternativa que se discute en la sección 3.7: intercambiamos las variables x y y para obtener $x = b^y$. Esta fórmula define y como una función de x .

Remplazando la palabra "exponente" por la palabra "logaritmo" podemos reformular (4) así: y es el logaritmo en la base b de x .

y abreviarla utilizando

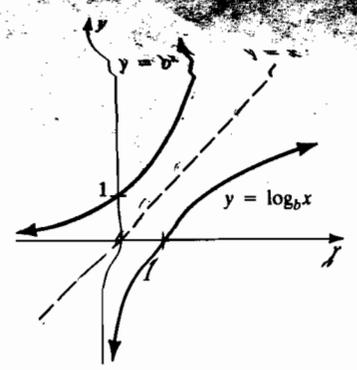
DEFINICION 2

La función logarítmica con base b ,

$$f(x) = \log_b x$$

es la inversa de la función exponencial con base b .

Recordemos de la sección 3.7 que la gráfica de una función inversa puede obtenerse reflejando la gráfica de la función original en la recta $y = x$. Esta técnica se utiliza en la figura 11(a) para obtener la gráfica de $y = \log_b x$ para $b > 1$. La gráfica de $y = \log_b x$ para $0 < b < 1$ se muestra en la figura 11(b).

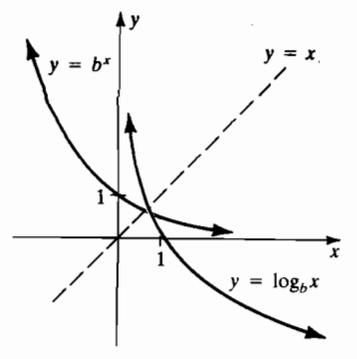


(a) $b > 1$

PROPIEDADES DE LA FUNCION LOGARITMICA

Como se ve en la figura 11, la función logarítmica f con base b tiene las siguientes propiedades:

- El dominio de f es el conjunto de los números reales positivos.
- El rango de f es el conjunto de los números reales.
- El intersección en x para la gráfica de f es 1. La gráfica de f no tiene intersección en y .
- El eje y es una asíntota vertical de la gráfica de f .
- La función f es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ si $b > 1$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$ si $0 < b < 1$.
- La función f es uno a uno.



(b) $0 < b < 1$

FIGURA 11

Ya que las dos ecuaciones $y = \log_b x$ y $b^y = x$ son equivalentes, podemos utilizar la que sea más conveniente. La siguiente tabla enumera varios ejemplos de enunciados exponenciales y logarítmicos equivalentes.

FORMA LOGARITMICA	FORMA EXPONENCIAL EQUIVALENTE
$\log_3 9 = 2$ $\log_{10} 0.0001 = -4$ $\log_8 4 = \frac{2}{3}$	$9 = 3^2$ $0.0001 = 10^{-4}$ $4 = 8^{2/3}$

De (5) se deduce que

$$\log_b b = 1 \quad (6)$$

y

$$\log_b 1 = 0 \quad (7)$$

ya que $b^1 = b$ y $b^0 = 1$, respectivamente. También debe notarse que $\log_b x$ no tiene sentido para $x \leq 0$, pues no hay exponente y para el que $b^y \leq 0$. El resultado en (7) confirma que 1 es el intersección en x de la gráfica de una función logarítmica $f(x) = \log_b x$.

EJEMPLO 1 _____

Despeje las incógnitas.

(a) $\log_2 8 = y$ (b) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$ (c) $\log_b 25 = 2$

Solución. En cada caso utilizamos la forma exponencial equivalente dada en (5):

(a) $\log_2 8 = y$ es equivalente a

$$\begin{aligned} 2^y &= 8 \\ &= 2^3 \end{aligned}$$

Así concluimos que $y = 3$.

(b) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$ es equivalente a

$$4^{-1/2} = x$$

así que $x = 1/4^{1/2} = \frac{1}{2}$.

(c) $\log_b 25 = 2$ es equivalente a

$$\begin{aligned} b^2 &= 25 \\ &= 5^2 \end{aligned}$$

y así encontramos que $b = 5$.

Reemplazando $y = \log_b x$ por la ecuación equivalente $x = b^y$, obtenemos una importante identidad:

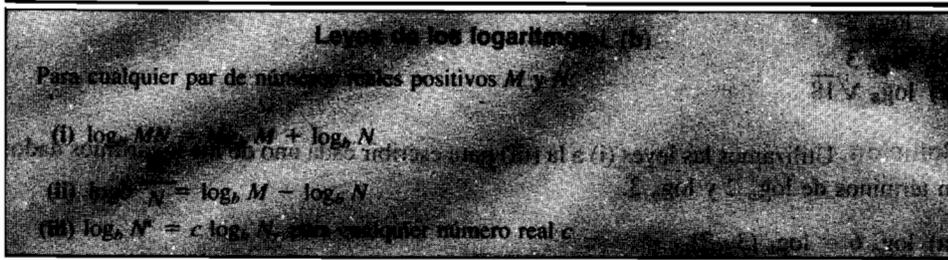
$$x = b^{\log_b x} \quad (8)$$

EJEMPLO 2 _____

(a) $3^{\log_3 7} = 7$ (b) $10^{\log_{10} 5^2} = 5^2$

LEYES DE LOS LOGARITMOS

Las siguientes tres propiedades o **leyes de los logaritmos** son, simplemente, una reformulación de las leyes de los exponentes.



Para verificar estas leyes utilizamos la identidad (8) para escribir dos números positivos cualesquiera M y N como

$$M = b^{\log_b M} \quad \text{y} \quad N = b^{\log_b N}$$

de forma que $MN = b^{\log_b M} \cdot b^{\log_b N}$

o $MN = b^{\log_b M + \log_b N}$

De (5) vemos que el último enunciado exponencial es equivalente al enunciado logarítmico

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

que es la ley (i).

Similarmente, $\frac{M}{N} = \frac{b^{\log_b M}}{b^{\log_b N}} = b^{\log_b M - \log_b N}$

y $N^c = (b^{\log_b N})^c = b^{c \log_b N}$

son equivalentes a las leyes (ii) y (iii), respectivamente.

EJEMPLO 3

Simplificar $\frac{1}{2} \log_9 36 + 2 \log_9 4 - \log_9 4$.

Solución. Hay varias formas para resolver este problema. Nótese, por ejemplo, que el segundo y tercer términos pueden combinarse así:

$$2 \log_9 4 - \log_9 4 = \log_9 4$$

De manera alterna, podemos utilizar la ley (iii) seguida por la ley (ii) para combinar estos términos:

$$\begin{aligned} 2 \log_9 4 - \log_9 4 &= \log_9 4^2 - \log_9 4 \\ &= \log_9 16 - \log_9 4 \\ &= \log_9 \frac{16}{4} \\ &= \log_9 4 \end{aligned}$$

En consecuencia, $\frac{1}{2} \log_9 36 + 2 \log_9 4 - \log_9 4 = \log_9 (36)^{1/2} + \log_9 4$ Por (iii)

$$\begin{aligned} &= \log_9 6 + \log_9 4 \\ &= \log_9 24. \end{aligned}$$

Por (i)

EJEMPLO 4

Si $\log_b 2 = 0.3010$ y $\log_b 3 = 0.4771$, halle el valor de:

- (a) $\log_b 6$ (b) $\log_b \frac{2}{3}$
 (c) $\frac{\log_b 2}{\log_b 3}$ (d) $\log_b 64$
 (e) $\log_b \sqrt[3]{18}$

Solución. Utilizamos las leyes (i) a la (iii) para escribir cada uno de los logaritmos dados en términos de $\log_b 2$ y $\log_b 3$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \log_b 6 &= \log_b (3 \cdot 2) \\ &= \log_b 3 + \log_b 2 \quad \leftarrow \text{Por (i)} \\ &= 0.4771 + 0.3010 \\ &= 0.7781 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \log_b \frac{2}{3} &= \log_b 2 - \log_b 3 \quad \leftarrow \text{Por (ii)} \\ &= 0.3010 - 0.4771 \\ &= -0.1761 \end{aligned}$$

(c) Dividiendo

$$\begin{aligned} \frac{\log_b 2}{\log_b 3} &= \frac{0.3010}{0.4771} \\ &\approx 0.6309. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \log_b 64 &= \log_b 2^6 \\ &= 6 \log_b 2 \quad \leftarrow \text{Por (iii)} \\ &= 6(0.3010) \\ &= 1.8060 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \log_b \sqrt[3]{18} &= \log_b (18)^{1/3} \\ &= \frac{1}{3} \log_b 18 \quad \leftarrow \text{Por (iii)} \\ &= \frac{1}{3} \log_b (2 \cdot 3^2) \\ &= \frac{1}{3} [\log_b 2 + \log_b 3^2] \quad \leftarrow \text{Por (i)} \\ &= \frac{1}{3} [\log_b 2 + 2 \log_b 3] \quad \leftarrow \text{Por (iii)} \\ &= \frac{1}{3} [0.3010 + 2(0.4771)] \\ &= 0.4184 \end{aligned}$$

Nota de advertencia: observe que la ley (ii) de los logaritmos *no* se puede aplicar en la parte (c) del ejemplo 4. En otras palabras, *un cociente de logaritmos no es la diferencia de los logaritmos*. También debe tenerse en cuenta que

$$\log_b (M + N) \neq \log_b M + \log_b N$$

En general, no hay forma de expresar $\log_b (M + N)$ en términos de $\log_b M$ y $\log_b N$.

GRAFICAS

En los siguientes tres ejemplos examinaremos las gráficas de algunas funciones que tienen que ver con logaritmos de base 10.

EJEMPLO 5

Graficar $f(x) = \log_{10} x$

Solución. La siguiente tabla muestra los valores correspondientes de y para valores escogidos de x . Utilizando los puntos $(1, 0)$, $(10, 1)$ y $(100, 2)$ y el conocimiento de la forma básica de la gráfica de un logaritmo como en la figura 11(a), obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 12.

x	$f(x)$
0.001	-3
0.01	-2
0.1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3

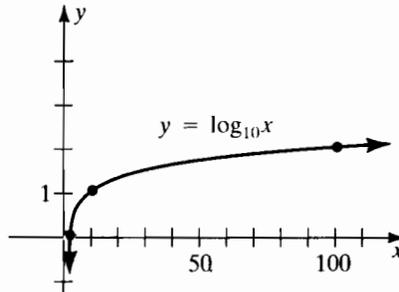


FIGURA 12

EJEMPLO 6

Grafique $f(x) = \log_{10}(x + 10)$

Solución. El dominio de esta función está determinado por la condición de que $x + 10 > 0$, ó $x > -10$. También por la sección 3.6 sabemos que la gráfica de la función es la de la figura 12 trasladada diez unidades hacia la izquierda. Con esta información y la tabla anexa obtenemos la gráfica de la figura 13.

x	$f(x)$
-9	0
0	1
90	2

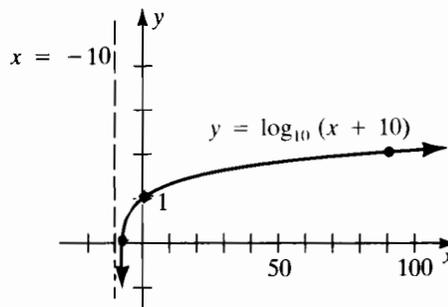


FIGURA 13

EJEMPLO 7

Grafique $f(x) = \log_{10} |x|$.

Solución. Ya que $|x| > 0$ para $x \neq 0$, el valor absoluto amplía el dominio de la función logarítmica dada a todos los números reales con excepción de $x = 0$. Además, ya que

$$f(-x) = \log_{10} |-x| = \log_{10} |x| = f(x)$$

vemos que f es una función par; en consecuencia, su gráfica es simétrica con respecto al eje y . Ahora la parte de la gráfica de f para $x > 0$ es idéntica a la gráfica de la figura 12. Obtenemos una parte de la gráfica de f para $x < 0$ por simetría. (Véase figura 14).

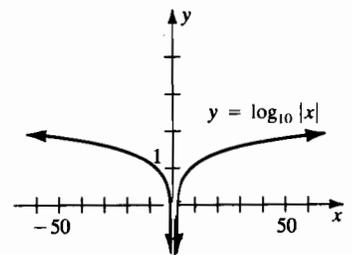


FIGURA 14

LOGARITMOS COMUNES Y NATURALES

Como vimos en la definición 2, la base b de una función logarítmica puede ser cualquier número real positivo diferente de 1. En la práctica, sin embargo, dos de las bases más importantes son $b = 10$ y $b = e = 2.718281828459\dots$. Los logaritmos con $b = 10$ se conocen como **logaritmos comunes** y los logaritmos con $b = e$ se llaman **logaritmos naturales**. Es usual además escribir el logaritmo natural

$$\log_e x \text{ así } \ln x$$

El símbolo "ln x " suele leerse fonéticamente "ele ene de x ". Ya que $b = e > 1$, la gráfica de $f(x) = \ln x$ tiene la forma logarítmica de la figura 11(a) (véase figura 15). Para la base e , (5) llega a ser

$$y = \ln x \text{ es equivalente a } x = e^y$$

También (8) llega a ser

$$x = e^{\ln x}$$

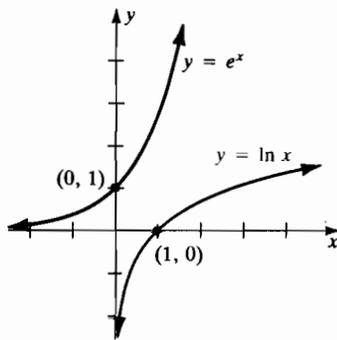


FIGURA 15

Para calcular $f(x) = \log_{10} x$ y $f(x) = \ln x$, utilizamos las teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$, respectivamente, en una calculadora científica. Consulte el manual si su calculadora no tiene estas teclas.

EJEMPLO 8

Encuentre los valores de (a) $\log_{10} 647$ y (b) $\ln 123$.

Solución

(a) Después de teclear 647, presionamos $\boxed{\log}$ para obtener

$$\log_{10} 647 \approx 2.8109$$

(b) Utilizando la tecla $\boxed{\ln}$ vemos que

$$\ln 123 \approx 4.8122$$

FORMULA DE CAMBIO DE BASE

Es posible expresar un logaritmo de base a en términos de logaritmos de base b . Para ello, supongamos que

$$y = \log_a x \text{ así que } x = a^y$$

Tomando el logaritmo de base b de ambos lados de la última ecuación vemos que

$$\begin{aligned} \log_b x &= \log_b a^y \\ &= y \log_b a \end{aligned}$$

o

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Pero ya que $y = \log_a x$ obtenemos la **fórmula de cambio de base**:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (9)$$

EJEMPLO 9

Encuentre el valor de $\log_2 50$.

Solución. Podemos utilizar la fórmula de cambio de base para convertir el logaritmo dado a base 10 o a base e . Si escogemos la base 10, (9) nos indica

$$\log_2 50 = \frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 2}$$

Utilizando la tecla $\boxed{\log}$ para calcular los dos logaritmos y luego dividiendo, tenemos la aproximación

$$\log_2 50 \approx 5.6439$$

Solución alterna. Si escogemos base e , (9) nos indica

$$\log_2 50 = \frac{\ln 50}{\ln 2}$$

y utilizando la tecla $\boxed{\ln}$ encontramos

$$\log_2 50 \approx 5.6439$$

Podemos verificar la respuesta del ejemplo 9 en una calculadora utilizando la tecla $\boxed{y^x}$. Registramos $y = 2$ y $x = 5.6439$ para obtener

$$2^{5.6439} \approx 50$$

USO DE LA CALCULADORA

En el ejemplo 9 suponemos que $\log_{10} 50$ y $\log_{10} 2$ se calculan en cuatro cifras decimales con los siguientes resultados *escritos*:

$$\frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 2} \approx \frac{1.6990}{0.3010}$$

Si estos números se vuelven a registrar en una calculadora y se dividen, obtenemos 5.6445 y no 5.6439, como una aproximación para $\log_2 50$. En la solución $\log_{10} 50$ y $\log_{10} 2$ se computaron y almacenaron en la calculadora y luego se dividieron. La razón de esta diferencia en las dos respuestas es que la calculadora, en realidad, trabaja internamente con los valores de los logaritmos hasta ocho o más cifras significativas, aunque muestre una cantidad menor. En otras palabras, es posible hacer todas las operaciones en la calculadora sin estar tomando nota de los resultados intermedios. Usted logrará una mayor precisión en la respuesta de esta manera.

EJERCICIO 5.2

En los problemas 1 al 12, escriba el enunciado exponencial dado en la forma logarítmica equivalente.

- 1. $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$
- 2. $10^{0.3010} = 2$
- 3. $9^0 = 1$
- 4. $(3^2)^{-2} = \frac{1}{81}$
- 5. $10^y = x$
- 6. $t^{-s} = v$
- 7. $(\frac{1}{84})^{-1/2} = 8$
- 8. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- 9. $36^{-3/2} = \frac{1}{216}$
- 11. $8^{2/3} = 4$

- 10. $10^{-3} = 0.001$
- 12. $e^1 = e$

En los problemas 13 al 24, escriba el enunciado logarítmico, dado en la forma exponencial equivalente.

- 13. $\log_3 81 = 4$
- 14. $\log_2 32 = 5$
- 15. $\log_{10} 10 = 1$
- 16. $\log_{17} 17^5 = 5$

17. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ 18. $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$
 19. $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$ 20. $\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$
 21. $\log_b b^2 = 2$ 22. $\log_b u = v$
 23. $\ln 1 = 0$ 24. $\ln(1/e) = -1$

En los problemas 25 al 36, encuentre el valor de los logaritmos dados, sin utilizar calculadora.

25. $\log_{10} (0.000001)$ 26. $\log_4 \frac{1}{64}$
 27. $\log_2 (2^2 + 2^2)$ 28. $\log_7 \sqrt[3]{49}$
 29. $\log_{64} \frac{1}{32}$ 30. $\log_{\sqrt{3}} 9$
 31. $\log_{1/2} 16$ 32. $\log_8 \frac{1}{4}$
 33. $\log_{5/2} \frac{8}{125}$ 34. $\log_6 216$
 35. $\ln e^e$ 36. $\ln(ee^2e^3)$

En los problemas 37 al 48, despeje las incógnitas.

37. $\log_b 125 = 3$ 38. $\log_{10} N = -2$
 39. $\log_7 343 = x$ 40. $\log_5 25^c = 4$
 41. $\log_2 (1/N) = 5$ 42. $\log_b 6 = -1$
 43. $2 \log_9 N = 1$ 44. $\log_2 4^{-3} = x$
 45. $\log_3 \frac{1}{27} = x$ 46. $\log_{10} (\frac{1}{1000})^c = 1$
 47. $\sqrt{\ln N} = 3$ 48. $\ln(N/2) = 4$

En los problemas 49 al 52, encuentre el número dado sin utilizar calculadora.

49. $10^{\log_{10} 6^2}$
 50. $25^{\log_5 8}$
 51. $e^{-\ln 7}$
 52. $(\sqrt{e})^{\ln 9}$

En los problemas 53 al 64, utilice $\log_b 4 = 0.6021$ y $\log_b 5 = 0.6990$ para evaluar el logaritmo dado.

53. $\log_b 2$
 54. $\log_b 20$
 55. $\log_b 64$
 56. $\log_b 625$
 57. $\log_b \sqrt{5}$
 58. $\log_b \frac{1}{4}$
 59. $\log_b \sqrt[3]{4}$
 60. $\log_b 80$
 61. $\log_b 0.8$
 62. $\log_b 3.2$
 63. $\log_4 b$
 64. $\log_5 5b$

En los problemas 65 al 70, simplifique y reduzca la expresión a un solo logaritmo.

65. $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$
 66. $\frac{1}{2} \log_5 49 - \frac{1}{3} \log_5 8 + 13 \log_5 1$
 67. $\log_{10} (x^4 - 4) - \log_{10} (x^2 + 2)$
 68. $\log_{10} \left(\frac{x}{y}\right) - 2 \log_{10} x^3 + \log_{10} y^{-4}$
 69. $\log_2 5 + \log_2 5^2 + \log_2 5^3 - \log_2 5^6$
 70. $5 \ln 2 + 2 \ln 3 - 3 \ln 4$

En los problemas 71 al 84, grafique la función dada y encuentre su dominio.

71. $f(x) = \log_2 x$ 72. $f(x) = \log_4 x$
 73. $f(x) = \log_2 |x|$ 74. $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$
 75. $f(x) = \log_2 (x - 3)$ 76. $f(x) = \log_2 (3 - x)$
 77. $f(x) = \log_4 (x + 1)$ 78. $f(x) = \log_4 |x + 1|$
 79. $f(x) = \log_2 2x$ 80. $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$
 81. $f(x) = -1 + \log_2 x$ 82. $f(x) = 1 - \log_2 x$
 83. $f(x) = \log_{1/2} x$ 84. $f(x) = \log_{1/4} 2x$

En los problemas 85 al 88, use la fórmula de cambio de base (9) y la tecla $\boxed{\log}$ para encontrar el valor de los logaritmos dados.

85. $\log_7 23$ 86. $\log_3 1000$
 87. $2 \ln 6$ 88. $-\log_{1/2} 18$

En los problemas 89 al 92, utilice la fórmula de cambio de base (9) y la tecla $\boxed{\ln}$ para encontrar el valor del logaritmo dado.

89. $\log_5 16$
 90. $\log_4 537$
 91. $\log_{10} 265$
 92. $\log_{2/3} 41$

93. El logaritmo desarrollado por John Napier fue en realidad

$$10^7 \log_{1/e} \left(\frac{x}{10^7} \right)$$

Utilice la fórmula de cambio de base (9) para expresar este logaritmo en términos del logaritmo natural.

94. Demuestre que $(\log_a b)(\log_b a) = 1$.

95. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones determina la gráfica que se indica en la figura 16?

- (a) $y = 2x + 1$ (b) $y = 10 + x^2$
 (c) $y = 10x^2$ (d) $x^2y = 10$

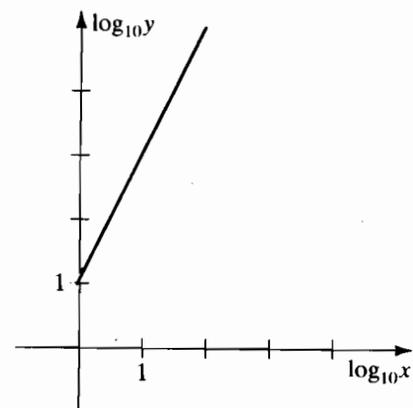


FIGURA 16

5.3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

ECUACIONES EXPONENCIALES

Consideremos la función $P(t) = 1,000(\frac{3}{2})^t$. Cuando $t = 1$, vemos que $P(1) = 1,500$. Supongamos que ahora cambiamos el problema: para un valor dado de P , encontremos el valor correspondiente de t . Por ejemplo si $P = 2,250$, debemos resolver la ecuación exponencial

$$2,250 = 1,000(\frac{3}{2})^t, \quad \text{o} \quad (\frac{3}{2})^t = 2.25$$

para encontrar el valor de la variable t . Escribiendo la última ecuación en una forma logarítmica equivalente, tenemos

$$\begin{aligned} t &= \log_{3/2} 2.25 \\ &= \log_{3/2} \frac{9}{4} \\ &= \log_{3/2} (\frac{3}{2})^2 \\ &= 2 \log_{3/2} (\frac{3}{2}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 1

Resuelva $4^{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

Solución. Si escribimos la ecuación dada en forma logarítmica, tenemos

$$x^2 - 1 = \log_4 \frac{1}{2}$$

Pero $\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, ya que $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= -\frac{1}{2} \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Prueba: $4^{(\sqrt{1/2})^2-1} = 4^{-1/2} = \frac{1}{2}$ y $4^{(-\sqrt{1/2})^2-1} = 4^{-1/2} = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 2

Resuelva $4^x = 69$.

Solución. Escrita en forma logarítmica, la ecuación tiene la siguiente solución

$$x = \log_4 69$$

Ya que las calculadoras científicas sólo usan logaritmos comunes y naturales, entonces no podemos dar un valor numérico inmediato para $\log_4 69$. Sin embargo, podemos salir de este pequeño dilema utilizando logaritmos de base 10 y la fórmula de cambio de base (9):

$$x = \log_4 69 = \frac{\log_{10} 69}{\log_{10} 4}$$

Ahora podemos obtener con la calculadora: $x \approx 3.0543$.

Solución alterna. Tomando el logaritmo de base 10 de ambos lados de la ecuación $4^x = 69$, vemos que

$$\begin{aligned}\log_{10} 4^x &= \log_{10} 69 \\ x \log_{10} 4 &= \log_{10} 69 \\ x &= \frac{\log_{10} 69}{\log_{10} 4} \approx 3.0543\end{aligned}$$

EJEMPLO 3

Resuelva $5x - 5^{-x} = 2$

Solución. Ya que $5^{-x} = 1/5^x$, la ecuación es

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 2$$

Multiplicando ambos lados por 5^x tenemos

$$(5^x)^2 - 1 = 2(5^x)$$

$$\text{o} \quad (5^x)^2 - 2(5^x) - 1 = 0$$

Esta última ecuación puede interpretarse como una ecuación de segundo grado en 5^x . Utilizando la fórmula de segundo grado para resolver para 5^x , tenemos

$$\begin{aligned}5^x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{2}\end{aligned}$$

Pero como 5^x siempre es positivo, debemos rechazar el número negativo $1 - \sqrt{2}$. En consecuencia,

$$5^x = 1 + \sqrt{2}. \quad (10)$$

Tomando el logaritmo de base 10 de ambos lados, tenemos

$$\begin{aligned}\log_{10} 5^x &= \log_{10} (1 + \sqrt{2}) \\ x \log_{10} 5 &= \log_{10} (1 + \sqrt{2}) \\ x &= \frac{\log_{10} (1 + \sqrt{2})}{\log_{10} 5} \\ x &\approx 0.5476\end{aligned} \quad (11)$$

En los ejemplos 2 y 3 pudimos utilizar el logaritmo natural en lugar del logaritmo común para hallar x . Por ejemplo, tomando el logaritmo natural de ambos lados de (10), tenemos

$$x = \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\ln 5}$$

Usted debe verificar en una calculadora que el resultado sea el mismo del obtenido en (11).

EJEMPLO 4 _____

Resuelva $e^{4t} = 23$.

Solución. Tenemos $4t = \ln 23$
 $t = \frac{1}{4} \ln 23$

Utilizando una calculadora encontramos

$$t \approx 0.7839$$

Como una función exponencial $f(x) = b^x$ es uno a uno, una ecuación como

$$b^{x_1} = b^{x_2} \text{ implica que } x_1 = x_2 \tag{12}$$

EJEMPLO 5 _____

Resuelva $7^{2(x+1)} = 343$

Solución. Observando que $343 = 7^3$, tenemos la misma base en ambos lados de la ecuación:

$$7^{2(x+1)} = 7^3$$

De esta forma basándonos en (12) podemos igualar exponentes:

$$\begin{aligned} 2(x + 1) &= 3 \\ 2x + 2 &= 3 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ECUACIONES LOGARITMICAS

Aprovechando el hecho de que los enunciados $b^y = x$ y $y = \log_b x$ son equivalentes, también podemos resolver ciertas cuestiones que tienen que ver con logaritmos.

EJEMPLO 6 _____

Resuelva $\log_{10}(2x + 50) = 2$.

Solución. La ecuación puede escribirse de manera equivalente así:

$$\begin{aligned} 2x + 50 &= 10^2 \\ \text{o} \quad 2x + 50 &= 100 \\ 2x &= 50 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Usted debe verificar esta solución.

EJEMPLO 7Resuelva $\log_2 x + \log_2 (x - 2) = 3$.

(13)

Solución. Basándonos en la ley (i) de la sección 5.2, podemos escribir la suma de logaritmos como un solo logaritmo:

$$\log_2 x(x - 2) = 3$$

En consecuencia, tenemos

$$x(x - 2) = 2^3$$

$$x^2 - 2x = 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

Concluimos que x puede ser igual a 4 o a -2 . Sin embargo, $x = -2$ debe desecharse ya que $\log_2 x$ en (13) no está definido para $x \leq 0$. De esta forma, la única solución de la ecuación es $x = 4$.

Prueba:

$$\begin{aligned} \log_2 4 + \log_2 2 &= \log_2 2^2 + \log_2 2 \\ &= 2 \log_2 2 + \log_2 2 \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8Resuelva $\log_3 (7 - x) - \log_3 (1 - x) = 1$.

(14)

Solución. Basándonos en la ley (ii) de la sección 5.2, podemos escribir la ecuación así:

$$\log_3 \frac{7 - x}{1 - x} = 1$$

de forma que

$$\frac{7 - x}{1 - x} = 3^1$$

Multiplicamos la última ecuación por $1 - x$ y despejamos x :

$$7 - x = 3(1 - x)$$

$$7 - x = 3 - 3x$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

En este momento *no* debemos concluir que $x = -2$ no es una solución de (14) simplemente porque es negativa. En realidad $x = -2$ sí es una solución, pues

$$\begin{aligned} \log_3 (7 - (-2)) - \log_3 (1 - (-2)) &= \log_3 9 - \log_3 3 \\ &= \log_3 \frac{9}{3} \\ &= \log_3 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Recordemos que $f(x) = \log_b x$ también es una función uno a uno. Así que

$$\log_b x_1 = \log_b x_2 \text{ implica que } x_1 = x_2 \quad (15)$$

EJEMPLO 9

Resuelva $2 \log_2 x + 3 \log_2 2 = 3 \log_2 x - \log_2 \frac{1}{32}$.

Solución. Primero, reformulamos cada lado de la ecuación como un solo logaritmo:

$$\log_2 x^2 + \log_2 2^3 = \log_2 x^3 - \log_2 \frac{1}{32}$$

$$\log_2 2^3 x^2 = \log_2 \frac{x^3}{1/32}$$

$$\log_2 8x^2 = \log_2 32x^3$$

Entonces, resulta de (15) que:

$$8x^2 = 32x^3$$

$$8x^2 - 32x^3 = 0$$

$$8x^2(1 - 4x) = 0$$

de esa forma, x puede ser 0 ó $\frac{1}{4}$. Pero $\log_2 x$ no se define por $x = 0$, por tanto, la única solución posible es $x = \frac{1}{4}$.

Solución alterna: según el álgebra, la ecuación original puede escribirse así:

$$3 \log_2 2 + \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 x,$$

ya que $3 \log_2 x - 2 \log_2 x = \log_2 x$. Luego encontramos

$$\log_2 8 + \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 x$$

$$\log_2 \frac{8}{32} = \log_2 x$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 x.$$

En este caso, (15) nos indica que $x = \frac{1}{4}$. Lo importante aquí es que dependiendo del método que se utilice, usted puede introducir soluciones extrañas

EJERCICIO 5.3

En los problemas 1 al 22 resuelva la ecuación exponencial dada.

1. $5^{x-2} = 1$

2. $3^x = 27x^3$

3. $10^{-2x} = \frac{1}{10,000}$

4. $27^x = \frac{9^{2x-1}}{3^x}$

5. $5 - 10^{2x} = 0$

6. $7^{-x} = 9$

7. $e^{5x-2} = 30$

8. $4^{\log_2 x} = 9$

9. $2^x + 2^{-x} = 2$

10. $e^x - e^{-x} = -1$

11. $2^x = 8^{2x-3}$

12. $\frac{1}{4}(10^{-2x}) - 25(10^x) = 0$

13. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+2} = 8(2^{x-1})^3$

14. $6^{2t} + 6^t - 6 = 0$

15. $\frac{1}{3} = (2^{|x|-2} - 1)^{-1}$

16. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{1-2x}$

17. $5^{|x|-1} = 25$

18. $(e^2)^{x^2} - \frac{1}{e^{5x+3}} = 0$

19. $4^x = 5^{2x+1}$

20. $3^{x+4} = 2^{x-16}$

21. $(5^y)^2 - 26(5^y) + 25 = 0$

22. $64^t - 10(8^t) + 16 = 0$

En los problemas del 23 al 42 resuelva la ecuación logarítmica dada.

23. $\log_3 5x = \log_3 160$

24. $\ln(10 + x) = \ln(3 + 4x)$

25. $\log_2 x = \log_2 5 + \log_2 9$ 26. $3 \log_8 x = \log_8 36 + \log_8 12 - \log_8 2$
27. $\log_{10} \frac{1}{x^2} = 2$ 28. $\log_3 \sqrt{x^2 + 17} = 2$
29. $\log_2 (\log_3 x) = 2$ 30. $\log_5 |1 - x| = 1$
31. $\log_3 81^x - \log_3 3^{2x} = 3$ 32. $\frac{\log_2 8^3}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
33. $\log_{10} x = 1 + \log_{10} \sqrt{x}$
34. $\log_2 (x - 3) - \log_2 (2x + 1) = -\log_2 4$
35. $\log_2 x + \log_2 (10 - x) = 4$
36. $\log_8 x + \log_8 x^2 = 1$
37. $\log_6 2x - \log_6 (x + 1) = 0$
38. $\log_{10} 54 - \log_{10} 2 = 2 \log_{10} x - \log_{10} \sqrt{x}$
39. $\log_9 \sqrt{10x + 5} - \frac{1}{2} = \log_9 \sqrt{x + 1}$
40. $\log_{10} x^2 + \log_{10} x^3 + \log_{10} x^4 - \log_{10} x^5 = \log_{10} 16$
41. $\log_4 x^2 = (\log_4 x)^2$
42. $(\log_{10} x)^2 + \log_{10} x = 2$

En los problemas 43 al 44 resuelva la ecuación dada.

43. $x^{\ln x} = e^9$ 44. $x^{\log_{10} x} = \frac{1000}{x^2}$

En los problemas 45 al 50 grafique las funciones dadas. Determine la coordenada x (aproximada) de los puntos de intersección de sus gráficas.

45. $f(x) = 4e^x$,
 $g(x) = 3^{-x}$
46. $f(x) = 2^x$,
 $g(x) = 3 - 2^x$
47. $f(x) = 3^{x^2}$,
 $g(x) = 2(3^x)$
48. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^{x^2}$,
 $g(x) = 2^{x^2} - 1$
49. $f(x) = \log_{10} \frac{10}{x}$,
 $g(x) = \log_{10} x$
50. $f(x) = \log_{10} \frac{x}{2}$,
 $g(x) = \log_2 x$

51. Los investigadores médicos utilizan la fórmula empírica

$$\log_{10} A = -2.144 + (0.425) \log_{10} m + (0.725) \log_{10} h$$

para calcular el área de la superficie de un cuerpo A (medida en metros cuadrados), dado el peso de una persona (en kilogramos) y su altura (en centímetros).

- (a) Calcule el área de la superficie del cuerpo de una persona cuyo peso es de 70 kg y mide 175 cm.
(b) Determine su peso y altura y calcule el área de la superficie de su cuerpo.

52. Una fórmula empírica descubierta por DeGroot y Gebhard relaciona el diámetro d de la pupila del ojo (en milímetros) a la luminancia B de una fuente de luz (medida en mililamberts, mL):

$$\log_{10} d = 0.8558 - 0.000401(8.1 + \log_{10} B)^3$$

(Véase figura 17).



FIGURA 17

- (a) El promedio de luminancia del cielo despejado es de, aproximadamente, 255 mL. Encuentre el correspondiente diámetro de la pupila.
(b) La luminancia del Sol varía de aproximadamente 190,000 mL al amanecer a 51,000,000 mL al mediodía. Encuentre los correspondientes diámetros de la pupila.
(c) Encuentre la correspondiente luminancia para una pupila de diámetro de 7 mm.

5.4 Aplicaciones

Una forma de la función exponencial dada por

$$f(t) = Cb^{kt} \quad (16)$$

donde C , b y k son constantes, juega un papel importante para describir muchos y diversos fenómenos en ciencia, ingeniería y en negocios.

CRECIMIENTO

En biología la fórmula (16) se utiliza con frecuencia como modelo matemático para describir el **crecimiento** de poblaciones de bacterias, de pequeños animales y, en algunas circunstancias, de humanos.

EJEMPLO 1

La población P en una comunidad después de t años se da por

$$P(t) = 1,000 \left(\frac{3}{2}\right)^t$$

¿La población crece o decrece con el incremento del tiempo?, ¿cuál es la población inicial?, ¿cuál es la población después de 1, 2 y 5 años?

Solución. Podemos pensar en $P(t)$ como un múltiplo constante de $\left(\frac{3}{2}\right)^t$. Ya que $1,000 > 0$ y $b = \frac{3}{2} > 1$, la población aumenta a medida que lo hace el tiempo. La población inicial se da cuando $t = 0$:

$$P(0) = 1,000 \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1,000$$

También

$$P(1) = 1,000 \left(\frac{3}{2}\right)^1 = 1,500$$

$$P(2) = 1,000 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1,000 \left(\frac{9}{4}\right) = 2,250$$

$$P(5) = 1,000 \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 1,000 \left(\frac{243}{32}\right) \approx 7,594$$

A comienzos del siglo XIX el religioso y economista inglés Thomas R. Malthus (1776-1834) utilizó la función $P(t) = P_0 e^{kt}$, $k > 0$ como modelo matemático para pronosticar la población mundial. Para unos valores específicos de P_0 y k , los valores funcionales $P(t)$ eran, en realidad, aproximaciones razonables a la población mundial durante el siglo XVIII. Como $P(t)$ es una función creciente, Malthus predijo que el futuro crecimiento de la población sobrepasaría la capacidad mundial para producir alimentos. En consecuencia, Malthus también predijo las guerras y hasta las hambrunas mundiales. Siendo más adivino que profeta, Malthus no pudo prever que el abastecimiento de alimentos igualaría el ritmo de crecimiento de la población, gracias a los avances simultáneos en ciencia y tecnología.

Un modelo más realista para predecir las poblaciones en pequeños países fue perfeccionado por el matemático y biólogo belga P.F. Verhulst en 1840. La llamada **función logística**

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}} \quad (17)$$

donde a , b y P_0 son constantes, también ha demostrado ser bastante certera para describir poblaciones de protozoos, bacterias, insectos de las frutas, insectos acuáticos y animales que viven en espacios limitados. Aunque (17) es una función creciente, la gráfica de P contiene asíntotas horizontales en $P = 0$ y $P = a/b$. De esta forma, en contraste con el modelo maltusiano, las poblaciones pronosticadas por (17) deben presentar un crecimiento limitado, es decir, no crecerán más allá de cierta cantidad. Este crecimiento inhibido podría ser causado por depredadores, superpoblación, competencia por el alimento, polución, planificación familiar, etc. Grafique un caso especial de (17) en el problema 45.

DESINTEGRACION

El elemento 88, mejor conocido como radio, es radiactivo. Esto significa que los átomos de radio se **desintegran** espontáneamente, emitiendo una radiación en forma de partículas alfa,

beta o rayos gama. Cuando un átomo se desintegra de esta manera, su núcleo se transforma en el núcleo de otro elemento. El núcleo de un átomo de radio en desintegración se transforma en el núcleo de un átomo de radón. La función exponencial (16) también puede servir como modelo matemático para aproximar la cantidad que queda de un elemento en proceso de desintegración mediante la radiactividad.

EJEMPLO 2

Supongamos que hay 20 gramos de radio disponibles inicialmente. Después de t años la cantidad restante es dada por

$$A(t) = 20e^{-0.000418t}$$

Encuentre la cantidad de radio que queda después de 100 años. ¿Qué porcentaje de los 20 gramos se habrá desintegrado después de 100 años?

Solución. Utilizando una calculadora, encontramos que

$$\begin{aligned} A(100) &= 20e^{-0.000418(100)} \\ &\approx 19.1812 \text{ g} \end{aligned}$$

En otras palabras, después de 100 años sólo

$$\frac{20 - 19.182}{20} \times 100\% \approx 4.1\%$$

de la cantidad inicial se ha desintegrado.

VIDA MEDIA

La **vida media** de un elemento radiactivo se define por el tiempo que se tarda la mitad de cierta cantidad de ese elemento en desintegrarse y transformarse en un nuevo elemento. La vida media es la medida de la estabilidad del elemento, es decir, cuanto más corta sea la vida media, más inestable es el elemento. Por ejemplo, la vida media del altamente radiactivo estroncio 90, Sr-90, es de 29 días, mientras que la vida media del isótopo del uranio U-238 es de 4,560 millones de años. La vida media del californio, Cf-244, descubierto en 1950, es sólo de 45 minutos. El polonio, Po-213, tiene una vida media de 0.000001 de segundo.

EJEMPLO 3

Si hay A_0 gramos de radio inicialmente, entonces el número de gramos que quedan t años después es de

$$A(t) = A_0e^{-0.000418t}$$

Determine la vida media del radio.

Solución. Debemos encontrar el tiempo en que $A = A_0/2$, es decir, debemos resolver la ecuación

$$\frac{A_0}{2} = A_0e^{-0.000418t}$$

para t . Dividiendo por A_0 y reformulándola en términos logarítmicos:

$$-0.000418t = \ln \frac{1}{2}$$

$$o \quad t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0.000418}$$

Utilizando la tecla $\boxed{\ln}$ y luego dividiendo obtenemos el resultado de una calculadora:

$$t \approx 1,658 \text{ años}$$

Nótese en el ejemplo 3 que la cantidad inicial A_0 de radio no ha hecho parte del cálculo real de la vida media. Así, la vida media de 1 gramo, 20 gramos ó 10,000 gramos de radio es la misma. La mitad de *cualquier* cantidad de radio tarda 1,700 años para transformarse en radón.

CARBONO 14

La edad aproximada de los fósiles puede determinarse por un método conocido como **carbóno 14**. Este método, inventado por el químico Willard Libby en 1950, se basa en el hecho de que los organismos vivos absorben carbono 14 radiactivo, C-14, a través de los procesos de alimentación y respiración, dejando de absorberlo al morir. Como se indica en el siguiente ejemplo, el procedimiento de carbono 14 se basa en que la vida media del C-14 es de 5,600 años. Libby ganó el Premio Nobel en Química en 1960 por este trabajo.

EJEMPLO 4

Se encontró un fósil con 1/1,000 de la cantidad de C-14 que el organismo contenía mientras vivió. Determine la edad aproximada del fósil.

Solución. Si había una cantidad inicial de A_0 g de C-14 en el organismo, entonces t años después de su muerte hay $A(t) = A_0 e^{kt}$ gramos restantes. Cuando $t = 5,600$, $A(t) = A_0/2$, y así

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{5,600k}$$

Resolviendo la última ecuación para k tenemos

$$e^{5,600k} = \frac{1}{2} \quad y \quad k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5600} = -0.000124$$

Así, $A(t) = A_0 e^{-0.000124t}$

Finalmente, para determinar la edad del fósil, despejamos t en la última ecuación cuando $A(t) = A_0/1,000$:

$$\frac{A_0}{1,000} = A_0 e^{-0.000124t}$$

$$t = -\frac{\ln \frac{1}{1,000}}{0.000124} \approx 55,708 \text{ años}$$

CIRCUITOS

El **circuito en serie** que se muestra en la figura 18 consta de un voltaje constante E , una inductancia de L henrios y una resistencia de R ohmios. Puede demostrarse que la corriente I se da en cualquier momento por

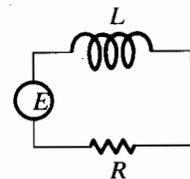


FIGURA 18

$$I = \frac{E}{R} [1 - e^{-(R/L)t}]. \quad (18)$$

EJEMPLO 5 _____

Despejar t según (18) en términos de la corriente I .

Solución. Según el álgebra, encontramos que

$$\frac{IR}{E} = 1 - e^{-(R/L)t}$$

$$e^{-(R/L)t} = 1 - \frac{IR}{E}$$

obteniendo

$$-\left(\frac{R}{L}\right)t = \ln\left(1 - \frac{IR}{E}\right)$$

$$t = -\frac{L}{R} \ln\left(1 - \frac{IR}{E}\right)$$

INTERES COMPUESTO

Las inversiones, tales como las cuentas de ahorros, pagan una tasa anual de interés que puede componerse anual, trimestral, semanal, diaria y así sucesivamente. En general, si una suma de C dólares se invierte con una tasa de interés anual r que se compone n veces al año, entonces la cantidad S incrementada al cabo de t años se da por

$$S = C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad (19)$$

S es el **valor futuro** del capital C . Ahora, si el número de n crece sin límite, se dice que el interés se compone **continuamente**. Para encontrar el valor futuro de C en este caso, sea $m = n/r$. Entonces, $n = mr$ y

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mrt}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{rt}$$

A medida que n aumenta sin límite, m crece necesariamente sin límite, es decir, $n \rightarrow \infty$ implica que $m \rightarrow \infty$. De (2), sección 5.1 deducimos que cuando

$$C \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{rt} \rightarrow C[e]^{rt} \text{ cuando } m \rightarrow \infty$$

De esta manera, si una tasa anual r de interés se compone continuamente, el valor futuro S de un capital C en t años es de

$$S = Ce^{rt} \quad (20)$$

EJEMPLO 6 _____

Supongamos que una suma de US\$1,000 se deposita en una cuenta de ahorros, cuya tasa de interés anual es 9%. Compare el valor futuro de esta suma en 5 años (a) si el interés se compone mensualmente y (b) si el interés se compone continuamente.

Solución

(a) Como el año tiene 12 meses, identificamos $n = 12$. Además con $C = 1,000$, $r = 0.09$ y $t = 5$, (19) llega a ser

$$C = 1,000 \left(1 + \frac{0.09}{12} \right)^{12(5)}$$

$$= 1,000(1.0075)^{60}$$

Utilizando la tecla $\boxed{y^x}$ en una calculadora, obtenemos US\$1,565.68

$$C \approx \$1,565.68$$

(b) Ahora, según (20) tenemos

$$C = 1,000 e^{(0.09)(5)}$$

$$= 1,000 e^{0.45}$$

$$\approx \$1,568.31$$

Acumulando el interés continuo y no mensualmente, hemos ganado US\$2.63 en cinco años.

En los siguientes dos ejemplos observaremos algunas aplicaciones del logaritmo común.

pH DE UNA SOLUCION

En química el potencial de hidrógeno o **pH** de una solución se define de la siguiente manera:

$$\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+] \tag{21}$$

donde el símbolo $[\text{H}^+]$ denota la concentración de iones de hidrógeno en una solución medida en moles por litro. (La escala pH fue inventada en 1909 por el químico danés Soren Sorensen).

Las soluciones se clasifican de acuerdo con su valor de pH como *ácida*, *básica* o *neutras*. Cuando $0 < \text{pH} < 7$ la solución es *ácida*; cuando $\text{pH} > 7$ la solución es *básica* (o alcalina); y cuando $\text{pH} = 7$, la solución es *neutra*. El agua (no contaminada por otras soluciones o lluvia ácida) es un ejemplo de solución neutra, mientras que el jugo de limón no diluido es altamente ácido y tiene un pH en nivel $\text{pH} \leq 3$. Dejamos como ejercicio (véase problema 30) demostrar que una solución con un $\text{pH} = 6$ es diez veces más ácida que una solución neutra.

Como lo muestra el siguiente ejemplo, el pH suele calcularse en una cifra decimal.

EJEMPLO 7 _____

La concentración de iones de hidrógeno en la sangre de una persona saludable suele ser $[\text{H}^+] = 3.98 \times 10^{-8}$ moles/litro. Encuentre el pH de la sangre.

Solución. Según (21) y las leyes de logaritmos, vemos que

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log_{10} (3.98 \times 10^{-8}) \\ &= -[\log_{10} 3.98 + \log_{10} 10^{-8}] \\ &= -[\log_{10} 3.98 - 8 \log_{10} 10] \\ &= -[\log_{10} 3.98 - 8(1)]. \end{aligned}$$

Con la ayuda de la tecla $\boxed{\log}$ de una calculadora, encontramos que

$$\begin{aligned} \text{pH} &\approx -[0.5999 - 8] \\ &\approx 7.4 \end{aligned}$$

La sangre humana es casi siempre una solución básica. El pH de la sangre suele oscilar entre el estrecho nivel de $7.2 < \text{pH} < 7.6$. Una persona que tenga un pH en la sangre por fuera de estos límites puede sufrir enfermedades e, incluso, la muerte.

ESCALA RICHTER

En 1935 el sismólogo norteamericano Charles F. Richter (1900-1985) ideó una escala para comparar la fuerza de los diferentes terremotos. En la **escala Richter** la magnitud R de un terremoto se define por:

$$R = \log_{10} \frac{A}{A_0} \quad (22)$$

donde A es la amplitud de la onda sísmica mayor del terremoto y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a la magnitud $R = 0$.

EJEMPLO 8

La magnitud del famoso terremoto de San Francisco de 1906 se ha calculado en 8.25 en la escala Richter. En 1979 un terremoto de magnitud 5.95 se dio en esta ciudad. ¿Cuántas veces más intenso fue el de 1906?

Solución. Según (22) tenemos

$$8.25 = \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)_{1906} \quad \text{y} \quad 5.95 = \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)_{1979}$$

Esto significa que

$$\left(\frac{A}{A_0} \right)_{1906} = 10^{8.25} \quad \text{y} \quad \left(\frac{A}{A_0} \right)_{1979} = 10^{5.95}$$

Ahora, como $8.25 = 2.3 + 5.95$, se deduce de las leyes de exponentes que

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{A_0} \right)_{1906} &= 10^{8.25} \\ &= 10^{2.3} \cdot 10^{5.95} \\ &= 10^{2.3} \left(\frac{A}{A_0} \right)_{1979} \\ &\approx (199.5) \left(\frac{A}{A_0} \right)_{1979} \end{aligned}$$

Es decir, que el terremoto de 1906 fue aproximadamente 200 veces más intenso que el de 1979.



Los terremotos de magnitud 6 o más se consideran potencialmente destructivos.

EJERCICIO 5.4

- El número de bacterias presentes en un cultivo después de t minutos se da por $N(t) = (200)4^{t/2}$. Encuentre la cantidad inicial de bacterias. Luego, encuentre la cantidad existente después de 2 minutos, 4 minutos y 10 minutos. Con ayuda de una calculadora estime la cantidad existente después de una hora.
- El número de bacterias existentes en un cultivo después de t horas se da por $N(t) = N_0 e^{kt}$.

- Encuentre k si se sabe que, después de una hora, la colonia ha extendido a 1.5 veces su población inicial.
- Encuentre el tiempo que tarda la colonia para cuadruplicar su tamaño.

- La población de una pequeña comunidad después de t años es aproximadamente de $P(t) = 1,500e^{kt}$. Si la población inicial aumenta 25% en 10 años, ¿cuál será la población en 20 años?
- La población mundial en 1976, según el informe de un semanario, era de 4,000 millones de personas. La misma revista pronosticó que, con una tasa anual de crecimiento de 1.8%, la población del mundo sería de 8,000 millones en 45 años. Compare este número con el pronosticado por el modelo maltusiano.

$$P(t) = (4 \times 10^9)e^{0.018t}$$

- Suponga que cierta sustancia radiactiva se desintegra a tal ritmo que, al final de cualquier día, sólo existe la mitad de la cantidad presente al comienzo del día.
 - Si hay 100 g de la sustancia inicialmente, ¿cuánta quedará después de t días? [Sugerencia: si $f(t)$ es el número de gramos que quedan al final del día t , entonces $f(0) = 100$, $f(1) = \frac{1}{2}(100)$, $f(2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})(100)$ y así sucesivamente].
 - ¿Qué cantidad de la sustancia queda al final de una semana?
- La cantidad que queda de 50 gramos de plutonio, Pu-239 después de t años se da por $A(t) = 50e^{-0.000287t}$. Después de 1,000 años, ¿qué porcentaje de plutonio habrá desaparecido? (Pu-239 es el isótopo utilizado en las bombas atómicas).
- Utilice el problema 6 para determinar la vida media del plutonio 239.
- La cantidad que queda de una sustancia radiactiva después de t horas se da por $A(t) = 100e^{kt}$. Después de 12 horas la cantidad inicial ha disminuido 7%. ¿Qué cantidad queda después de 48 horas?, ¿cuál es la vida media de la sustancia?
- La vida media del polonio 210, Po-210 es de 140 días. Si $A(t) = A_0 e^{kt}$ es la cantidad que queda después de t días, ¿cuál es la cantidad restante después de 80 días?, ¿y después de 300 días?
- Se determinó que 88% del carbono 14 radiactivo en un fósil se desintegró mediante el proceso de la radiactividad. ¿Cuál es la edad aproximada del fósil?
- Se calcula que entre 90% y 95% de carbono 14 se desintegró en un fósil. Calcule la edad del fósil.
- Por medio del método del carbono 14 se calcula que la edad de un fósil es de 9,000 años. ¿Qué porcentaje de carbono 14 se desintegró en el fósil a través de la radiactividad?
- Suponga que se invierten US\$1,000 a un interés anual de 10%. Utilice (19) y (20) y una calculadora para comparar los valores

futuros de esa cantidad en un año, completando la siguiente tabla.

INTERES COMPUESTO	n	VALORES FUTUROS DE US\$1,000 EN UN AÑO
Anual	1	
Semestral	2	
Trimestral	4	
Mensual	12	
Semanal	52	
Diario	365	
Cada hora	8,760	
Continuamente	$n \rightarrow \infty$	

- Suponga que se deposita 1 ¢ en una cuenta de ahorros a un interés anual de 1% que se compone continuamente. ¿Cuánto dinero se habrá acumulado en la cuenta después de 2,000 años?, ¿cuál es el valor futuro de 1¢ en 2,000 años si la cuenta paga 2% de interés anual que se compone continuamente?
- Suponga que se depositan US\$5,000 en una cuenta que paga un interés anual de 8% que se compone continuamente. ¿Qué interés se habrá ganado en cuatro años?
- Si con (20) se despeja C , es decir, $C = Se^{-rt}$, obtenemos la cantidad que debe invertirse a una tasa anual r de interés con el fin de obtener S dólares después de t años. Decimos que C es el **valor presente** de la cantidad S . ¿Cuál es el valor presente de US\$100,000 a un interés anual de 9% compuesto continuamente durante 20 años?

En los problemas 17 al 22 encuentre el pH de una solución con la concentración de iones de hidrógeno: $[H^+]$.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 17. 10^{-7} | 18. 4×10^{-6} |
| 19. 3.9×10^{-8} | 20. 6.8×10^{-3} |
| 21. 7.2×10^{-3} | 22. 5.4×10^{-5} |

En los problemas 23 al 28 encuentre la concentración de iones de hidrógeno $[H^+]$ de una solución con el pH dado.

- | | |
|----------|---------|
| 23. 2.9 | 24. 6.4 |
| 25. 10.3 | 26. 7.1 |
| 27. 8.8 | 28. 3.5 |

- Necesariamente, las frutas requieren un suelo más ácido que los vegetales. Suponga que dos suelos tienen un pH de 4.5 y 6.2, respectivamente. ¿Cuántas veces es más ácido el primer suelo que el segundo?
- Demuestre que una solución con un pH = 6 es diez veces más ácida que una solución neutra.
- Las concentraciones de iones de hidrógeno de NaOH y HCl son $[H^+] = 10^{-14}$ y $[H^+] = 1$, respectivamente. ¿Cuántas veces es más ácida la segunda solución que la primera?

32. En septiembre de 1985 un terremoto de magnitud 7.8 en la escala Richter ocurrió en la ciudad de México. Comparado con este terremoto, ¿cuántas veces más intenso fue el terremoto de San Francisco de 1906?
33. La magnitud del terremoto de marzo de 1964 en Alaska, fue de 8.5 en la escala Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue este terremoto comparado con el de 1906 en San Francisco?, ¿comparado con el de México en 1985?, ¿comparado con el del Valle de San Fernando de 1971 de magnitud 6.6?
34. ¿Cuántas veces más intenso que el terremoto del Japón en 1933 de magnitud 8.9 comparado con el de Alaska de 1964?
35. El nivel de intensidad b de un sonido medido en decibeles (dB) se define por

$$b = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (23)$$

donde I es la intensidad del sonido medida en vatios/cm² y $I_0 = 10^{-16}$ vatios/cm² es la intensidad del sonido más débil que pueda oírse (0 dB). Complete la siguiente tabla:

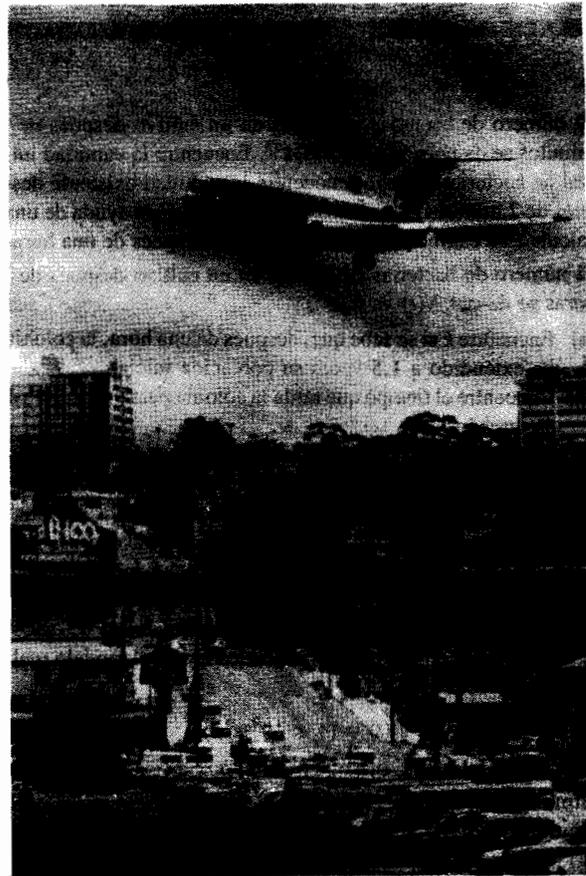
SONIDO	INTENSITY (VATIOS/CM ²)	INTENSIDAD NIVEL DE INT. (dB)
Susurro	10^{-14}	
Conversación	10^{-11}	
Algunos comerciales de TV	10^{-10}	
Alarma de fuego	10^{-9}	
Despegue de un jet	10^{-7}	
Umbral del dolor	10^{-4}	

36. La intensidad del sonido I es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente. Si d_1 y d_2 son las distancias desde una fuente de sonido, demuestre que los niveles de intensidad correspondientes b_1 y b_2 (véase problema 35) se relacionan por

$$b_2 = b_1 + 20 \log_{10} \frac{d_1}{d_2} \quad (24)$$

37. El nivel de intensidad b_1 de un avión P_1 que pasa sobre un punto de la tierra a una altitud de 1,500 pies, es de 70 dB. Utilice (24) para encontrar el nivel de intensidad b_2 de un segundo avión P_2 que pasa sobre el mismo punto a una altitud de 2,600 pies.
38. A una distancia de 4 pies el nivel de intensidad de una conversación animada es de 50 dB. Utilice (24) para encontrar el nivel de intensidad a 14 pies de la conversación.
39. Después de que un estudiante con un virus gripal regresa a un campo universitario aislado, de 2,000 estudiantes, el número N de estudiantes infectados después de t días se pronostica por

$$N(t) = \frac{2,000}{1 + 1999e^{-0.895t}}$$



¿Cuántos estudiantes estarán infectados después de 5 días? Después de un largo periodo, ¿cuántos estudiantes pronostica la función dada que estarán infectados?

40. Utilice la función dada en el problema 39 para predecir cuánto tardará la mitad de una población estudiantil para infectarse con el virus.
41. Suponga que un pastel se saca del horno calentado a 300°F en un cuarto, a una temperatura de 70°F. La ley de enfriamiento de Newton predice que la temperatura T del pastel en cualquier tiempo t (en minutos) después de retirarlo del horno se da por la función $T(t) = 70 + 230e^{-0.0246t}$. ¿Cuál es la temperatura del pastel después de 20 minutos? Bosqueje una gráfica de la función T . Después de un largo periodo, ¿cuál es la temperatura aproximada del pastel?
42. En el problema 41 determine en qué momento la temperatura del pastel es de 150°F.
43. Las magnitudes absolutas M_A y M_B de dos estrellas A y B se relacionan con sus luminosidades absolutas L_A y L_B por la ecuación

$$\frac{L_A}{L_B} = 10^{0.4(M_B - M_A)}$$

Si la magnitud absoluta del Sol es 4.75 y la luminosidad absoluta de la estrella Betelgeuse es 10^5 veces la luminosidad del Sol, determine la luminosidad absoluta de Betelgeuse.

44. Cuando dos sustancias químicas se combinan para formar un nuevo compuesto a través de una reacción química de segundo orden, el número de gramos X del nuevo compuesto se da por

$$X = \frac{\alpha\beta[1 - e^{(\alpha-\beta)kt}]}{\beta - \alpha e^{(\alpha-\beta)kt}}, \quad \alpha \neq \beta$$

Despeje t en términos de los otros símbolos.

45. Grafique la función logística (17) cuando $a = 2$, $b = 1$ y $P_0 = 1$.
 46. En 1920 Pearl y Reed propusieron una función logística para la población P de los Estados Unidos basada en los años 1790, 1850 y 1910. La función que propusieron fue

$$P(t) = \frac{2930.3009}{0.014854 + e^{-0.0313395t}}$$

donde P se mide en miles y t representa el número de años desde 1780.

- (a) Utilice esta función, y determine las cifras poblacionales para 1790, 1850 y 1910.
 (b) La fórmula de Pearl y Reed coincide bastante con los guarismos de los censos realizados entre 1790 y 1910. ¿Qué predice la función como límite máximo para la población de los Estados Unidos? Verifique la población actual de los Estados Unidos y compare ese número con el límite máximo que predice la función. [Sugerencia: encuentre una asíntota horizontal para la gráfica de P].

CONCEPTOS IMPORTANTES

Función exponencial base $b > 0$, $b \neq 1$ decreciente, $0 < b < 1$ creciente $b > 1$ Función logarítmica base $b > 0$, $b \neq 1$	Leyes de los logaritmos Inverso de la función exponencial Logaritmo común Logaritmo natural Fórmula de cambio de base El número e Crecimiento	Desintegración Vida media Carbono 14 Composición continua del interés pH de una solución Escala Richter
---	---	--

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 20, llene los espacios o conteste verdadero o falso.

- La función exponencial $f(x) = b^x$ es una función creciente para $b > \underline{\hspace{2cm}}$
- La función logarítmica $f(x) = \log_{1/2} x$ es una función decreciente en el intervalo $(0, \infty)$. $\underline{\hspace{2cm}}$
- La base del logaritmo común es el número $\underline{\hspace{2cm}}$
- $\log_b(M + N) = \log_b M + \log_b N$. $\underline{\hspace{2cm}}$
- $\frac{\log_5 625}{\log_5 4p5} = \underline{\hspace{2cm}}$
- Si $\log_3 N = 0$, entonces $N = \underline{\hspace{2cm}}$
- Si $\log_{10} 5 = 0.6990$, entonces $5 = \underline{\hspace{2cm}}$
- El intersección en x de la gráfica de la función $f(x) = \log_7(x + 5)$ es $\underline{\hspace{2cm}}$
- El intersección en y de la gráfica de $f(x) = \log_8(x + 2)$ es $\underline{\hspace{2cm}}$
- La gráfica de $f(x) = \log_9(x - 4)$ tiene la asíntota vertical $x = 4$. $\underline{\hspace{2cm}}$
- $\log_{10}(2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\ln(e + e) = 1 + \ln 2$. $\underline{\hspace{2cm}}$
- Si $\log_b 12 = 1.0792$ y $\log_b 4 = 0.6021$, entonces $\log_b 9 = \underline{\hspace{2cm}}$

- Si f es una función exponencial, entonces $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$. $\underline{\hspace{2cm}}$
- En términos de logaritmo natural, $\log_4 5$ puede escribirse así $\underline{\hspace{2cm}}$
- $e^{\ln 70} = \underline{\hspace{2cm}}$
- $10^{\log_{10} 4.89} = \underline{\hspace{2cm}}$
- Si $A(t) = A_0 e^{kt}$ representa la cantidad restante de una sustancia radiactiva después de t años, entonces su vida media se da por $t = (\ln 2)/k$. $\underline{\hspace{2cm}}$
- Una solución con un pH de 3.3 es 100 veces más ácida que una solución con un pH de 5.3. $\underline{\hspace{2cm}}$
- Se dice que una solución es neutra cuando su pH = $\underline{\hspace{2cm}}$

En los problemas 21 al 26, $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^{-x}$ y $h(x) = 4^x$. Encuentre los valores indicados.

- | | |
|--------------------------------|----------------|
| 21. $g(3)$ | 22. $f(5)$ |
| 23. $f(h(1))$ | 24. $h(f(-1))$ |
| 25. $[h(\sqrt{2})]^{\sqrt{2}}$ | 26. $f(g(-2))$ |

En los problemas 27 y 28 redefina el enunciado exponencial dado como un enunciado logarítmico equivalente.

27. $5^{-1} = 0.2$ 28. $\sqrt[3]{512} = 8$

En los problemas 29 y 30 redefina el enunciado logarítmico dado como un enunciado exponencial equivalente.

29. $\log_9 27 = 1.5$ 30. $\log_6 (36)^{-1} = -2$

En los problemas 31 y 32, escriba la expresión dada como un solo logaritmo.

31. $2 \log_3 8 + 3 \log_3 2 - 2 \log_3 6 - \log_3 16$
 32. $\ln(x + y) - \ln x - \ln y + \ln(x - y)$

En los problemas 33 al 36, encuentre el dominio de la función dada.

33. $f(x) = \frac{1}{3^x - 1}$ 34. $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$
 35. $f(x) = \log_2 |x - 5|$ 36. $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

En los problemas 37 y 38, grafique las funciones dadas en el mismo sistema de coordenadas.

37. $y = 4^x$,
 $y = \log_4 x$ 38. $y = (\frac{1}{3})^x$,
 $y = \log_{1/3} x$

En los problemas 39 al 42, grafique la función dada.

39. $f(x) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 40. $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$
 41. $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$ 42. $f(x) = \log_{10}(-x)$

En los problemas 43 al 54, resuelva la ecuación dada.

43. $(\frac{1}{3})^x = 9^{1-2x}$ 44. $16^{2-5x} = 2^{-1}$
 45. $7^{x+3} = 5$ 46. $6^{x^2} = 2^x$
 47. $\log_5 x = -2$
 48. $\log_2(x + 1) = \log_2(2x - 15)$
 49. $\log_5(\log_3 2x) = 0$ 50. $\log_{100}(\ln x) = \frac{1}{2}$
 51. $\log_{10} x + \log_{10}(2x - 1) = 1$
 52. $4 \log_2 x - \log_2(x + 2) = \log_2 x^2 + \log_2 1$
 53. $e^{-4x} = 15$ 54. $\ln x = 0.2$

55. Aparee la letra de la gráfica de la figura 19 con la función apropiada.

$f(x) = b^x, b > 2$ ___
 $f(x) = b^x, 1 < b < 2$ ___
 $f(x) = b^x, \frac{1}{2} < b < 1$ ___
 $f(x) = b^x, 0 < b < \frac{1}{2}$ ___

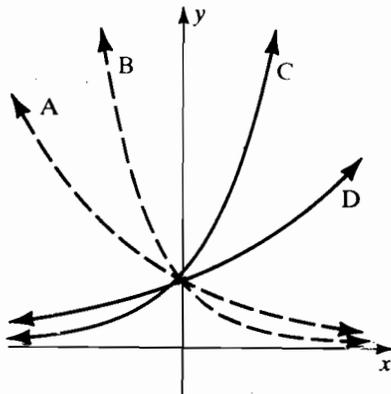


FIGURA 19

56. En la gráfica 20, llene los espacios en blanco para las coordenadas de los puntos en cada gráfica.

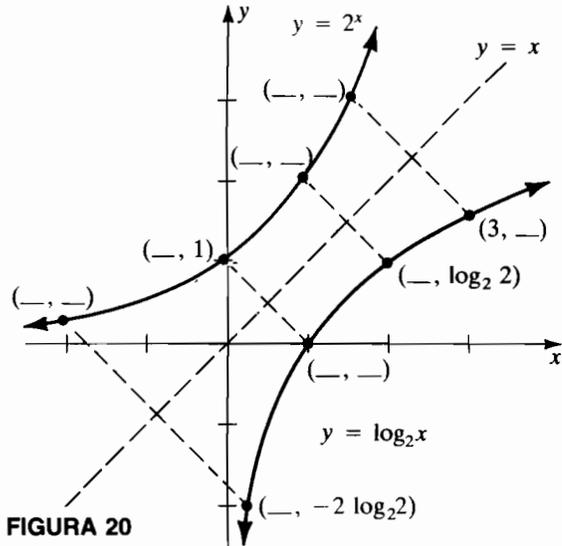


FIGURA 20

57. Utilice una gráfica para resolver la desigualdad $\log_{10}(x + 3) > 0$.
 58. Una suma de US\$10,000 se deposita en una cuenta de ahorros con un interés anual de 8% que se compone continuamente. ¿Cuál es el valor futuro en 5 años?, ¿cuánto tiempo se tardará en triplicar la suma inicial?
 59. Si un terremoto tiene una magnitud de 4.2 en la escala Richter, ¿cuál es la magnitud en la escala Richter de un terremoto que tiene una intensidad 20 veces mayor? [Sugerencia: primero despeje la ecuación $10^x = 20$].
 60. La función

$$x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}, \quad c_1 c_2 < 0, \quad m_1 < 0, \quad m_2 < 0$$

representa el desplazamiento vertical en un tiempo t de una masa atada al extremo de una cuerda, cuando todo este sistema se sumerge en un líquido espeso. Si $c_1 = \frac{3}{2}$, $c_2 = -2$, $m_1 = -1$, y $m_2 = -2$ encuentre el valor de t para el que $x(t) = 0$.

61. El tritio, isótopo de hidrógeno, tiene una vida media de 12.5 años. ¿Cuánto quedará de la cantidad inicial después de 50 años?
 62. La cantidad restante de una sustancia radiactiva después de t años es dada por $A(t) = A_0 e^{kt}$, $k > 0$. Demuestre que si $A(t_1) = A_1$ y $A(t_2) = A_2$ para $t_1 < t_2$, entonces la vida media del elemento es

$$t = \frac{(t_2 - t_1) \ln 2}{\ln(A_1/A_2)}$$

63. Las sustancias radiactivas se retiran de las sustancias vivientes por medio de dos procesos: desintegración física natural y metabolismo biológico. Cada proceso contribuye a una vida media efectiva E definida por

$$1/E = 1/P + 1/B$$

donde P es la vida media física de la sustancia radiactiva y B es la vida media biológica.

- (a) Para el yodo radiactivo I-131, en la glándula tiroidea humana, $P = 8$ días y $B = 24$ días. Encuentre la vida media efectiva del I-131 en la tiroides.
- (b) Suponga que la cantidad de I-131 en la tiroides después de t días se da por $A(t) = A_0 e^{-kt}$, $k > 0$. Utilice la vida media hallada en la parte (a) para determinar el porcentaje de yodo radiactivo que queda en la glándula tiroidea dos semanas después de su ingestión.
64. En el problema 62 de la sección 2.1, vemos un modelo lineal para el número de días D con capas de nieve en la Gran Bretaña, como función de elevación H . Otro modelo utiliza la función definida a trozos:

$$D(H) = \begin{cases} D_0 e^{H/300}, & 0 \leq H \leq 400 \text{ m}, \\ 3.79D_0[1 + (H - 400)/310], & H > 400 \text{ m}, \end{cases}$$

donde D_0 es el número de días con capa de nieve al nivel del mar.

- (a) Asuma que $D_0 = 10$. Grafique $D(H)$ para $0 \leq H \leq 1,000$.
- (b) Si $D_0 = 10$, ¿a qué elevación este modelo predice 100 días con capa de nieve?, ¿y 365 días?
65. Una **pensión anual** es un plan de ahorros en el que la misma cantidad de dinero P se deposita en una cuenta en periodos iguales n (por ejemplo años). Si la tasa de interés anual r se compone continuamente, entonces la cantidad acumulada en la cuenta inmediatamente después del depósito n es

$$S = P + Pe^r + Pe^{2r} + \dots + Pe^{(n-1)r}$$

¿Cuál es el valor de dicha pensión en 15 años si $P = \text{US\$}3,000$ y la tasa de interés anual es de 7%?

66. En el problema 58 del ejercicio 5.1, vimos que la gráfica de $y = ae^{-be^{-cx}}$ es una curva Gompertz. Despeje x en términos de los otros símbolos.

6.1

Angulos y su medición

Comenzamos el estudio de la trigonometría analizando los ángulos y los dos métodos utilizados para medirlos.

ANGULO

Un **ángulo** está formado por dos rayos que tienen un punto final en común llamado **vértice**. Designamos un rayo como **lado inicial** del ángulo y al otro lo llamamos **lado terminal**. Es conveniente considerar el ángulo como el resultado de una rotación desde el lado inicial hasta el lado terminal, como se muestra en la figura 1(a).

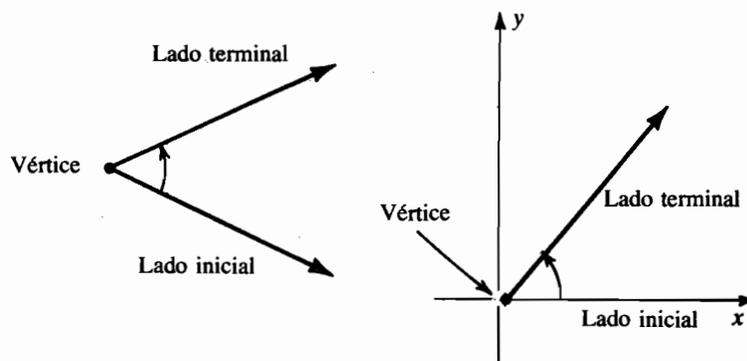


FIGURA 1

(a)

(b)

POSICION NORMAL

Como se muestra en la figura 1(b), podemos situar el ángulo en un plano de coordenadas cartesianas con su vértice en el origen y su lado inicial coincidiendo con el lado positivo del eje x . Se dice que un ángulo de este tipo se encuentra en **posición normal**. En esta sección, consideramos todos los ángulos en posición normal.

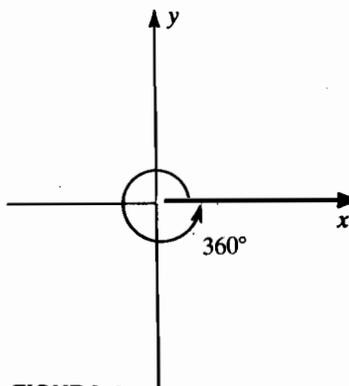


FIGURA 2

MEDIDA EN GRADOS

Las unidades comúnmente usadas para medir los ángulos son los **grados** y los **radianes**. La primera se basa en la asignación de 360 grados, que se escribe 360° , al ángulo que se forma mediante una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 2. Los otros ángulos se miden, entonces, en términos de un ángulo de 360° . Si la rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj, la medida será *positiva*; si la rotación es en sentido igual al de las manecillas del reloj, la medida será *negativa*. Por ejemplo, dos rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj resultarán en un ángulo de 720° ; tres rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj darán como resultado un ángulo de $-1,080^\circ$. Véanse las figuras 3(a) y 3(b). Un ángulo

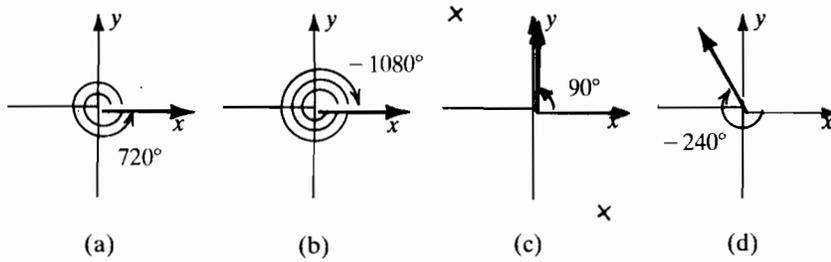


FIGURA 3

obtenido por un cuarto de rotación completa en sentido opuesto al de las manecillas del reloj sería:

$$\frac{1}{4}(360^\circ) = 90^\circ$$

pero si el ángulo se obtiene de dos tercios de una rotación en el mismo sentido de las manecillas del reloj, sería -240° . Véanse figuras 3(c) y 3(d). Un ángulo de 1° se forma por $1/360$ de una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

EJEMPLO 1 _____

Dibuje un ángulo de 120° .

Solución. Como $120^\circ = \frac{1}{3}(360^\circ)$, este ángulo corresponde a un tercio de una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como lo muestra la figura 4.

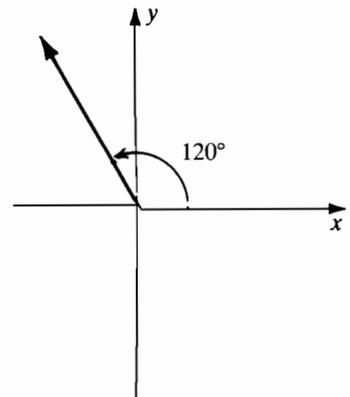


FIGURA 4

EJEMPLO 2 _____

Localice el lado terminal de un ángulo de 960° . Dibuje el ángulo.

Solución. Primero hay que determinar la cantidad de rotaciones completas que puede haber al formarse este ángulo. Si dividimos 960 en 360, obtenemos un cociente de 2 y el residuo sería de 240; esto es,

$$960 = 2(360) + 240$$

Por consiguiente, este ángulo se forma haciendo dos rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj y a continuación

$$\frac{240}{360} = \frac{2}{3}$$

de otra rotación. Como lo ilustra la figura 5, el lado terminal se encuentra en el tercer cuadrante.

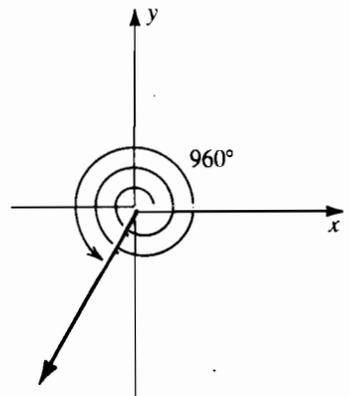


FIGURA 5

ANGULOS COTERMINALES

A partir del ejemplo 2 podemos ver que el lado terminal de un ángulo de 960° coincide con el lado terminal de un ángulo de 240° . Cuando dos ángulos en posición normal tienen el mismo lado terminal decimos que son **coterminal**. Por ejemplo, los ángulos θ , $\theta + 360^\circ$, y $\theta - 360^\circ$ que nos muestra la figura 6 son coterminal. Inclusive, la suma de cualquier múltiplo entero de 360° a un ángulo determinado resulta en un ángulo coterminal. Cualquier par de ángulos coterminal tienen medidas en grados que se diferencian por un múltiplo entero de 360° .

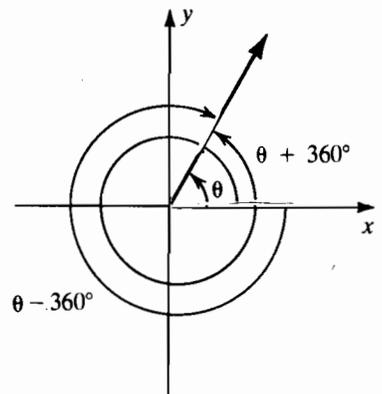


FIGURA 6

EJEMPLO 3

Encuentre el ángulo entre 0° y 360° que es coterminal con un ángulo de -690° .

Solución. Podemos sumarle repetidamente 360° a -690° hasta obtener un ángulo entre 0° y 360° :

$$-690^\circ + 360^\circ + 360^\circ = 30^\circ$$

Así, un ángulo de 30° es coterminal con uno de -690° .

MINUTOS Y SEGUNDOS

Al utilizar las calculadoras es conveniente representar las fracciones de los grados con decimales, como 42.23° . Sin embargo, tradicionalmente, las fracciones de grados eran expresadas en **minutos** y **segundos**, donde

$$1^\circ = 60 \text{ minutos (se escribe } 60')^*$$

y

$$1' = 60 \text{ segundos (se escribe } 60'')$$

Por ejemplo, un ángulo de 7 grados, 30 minutos, 5 segundos se expresa como $7^\circ 30' 5''$. La mayoría de las calculadoras científicas tienen una tecla especial $\boxed{^\circ ' ''}$ para convertir un ángulo dado en grados decimales a grados, minutos y segundos, y viceversa. Los siguientes ejemplos muestran cómo realizar estas conversiones manualmente.

EJEMPLO 4

Convierta 86.23° a grados, minutos y segundos.

Solución. Como 0.23° representa $\frac{23}{100}$ de 1° , y $1^\circ = 60$ minutos, tenemos:

$$\begin{aligned} 86.23 &= 86^\circ + 0.23^\circ \\ &= 86^\circ + (0.23)(60') \\ &= 86^\circ + 13.8' \end{aligned}$$

Ahora, $13.8' = 13' + 0.8'$, entonces, debemos convertir $0.8'$ a segundos. Como $0.8'$ representa $\frac{8}{10}$ de $1'$ y $1' = 60$ segundos, tenemos que

$$\begin{aligned} 86^\circ + 13' + 0.8' &= 86^\circ + 13' + (0.8)(60'') \\ &= 86^\circ + 13' + 48'' \\ &= 86^\circ 13' 48'' \end{aligned}$$

Entonces,

$$86.23^\circ = 86^\circ 13' 48''$$

EJEMPLO 5

Convierta $17^\circ 47' 13''$ a notación decimal.

Solución. Como $1^\circ = 60'$, tenemos que $1' = (\frac{1}{60})^\circ$. Así mismo, $1'' = (\frac{1}{60})' = (\frac{1}{3,600})^\circ$. Entonces, tenemos que:

* La utilización del número 60 como **base** data de los babilonios. Otro ejemplo de la utilización de esta base en nuestra cultura es la medición del tiempo (1 hora = 60 minutos).

$$\begin{aligned}
 17^{\circ}47'13'' &= 17^{\circ} + 47' + 13'' \\
 &= 17^{\circ} + 47\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} + 13\left(\frac{1}{3,600}\right)^{\circ} \\
 &\approx 17^{\circ} + 0.7833^{\circ} + 0.0036^{\circ} \\
 &= 17.7869^{\circ}
 \end{aligned}$$

Usted puede recordar de sus conocimientos de geometría que un ángulo de 90° se llama **ángulo recto**, y que un ángulo de 180° se denomina **ángulo plano** o **llano**. Un **ángulo agudo** mide entre 0° y 90° y un **ángulo obtuso** mide entre 90° y 180° . Dos ángulos agudos se consideran **complementarios** si su suma es 90° . Dos ángulos positivos son **suplementarios** si su suma es 180° . Un **ángulo terminal de cuadrante** es un ángulo cuyo lado terminal coincide con un eje coordenado cuando el ángulo se encuentra en posición normal. Por ejemplo: 0° , 90° , 180° , 270° , o 360° .

EJEMPLO 6

Encuentre el ángulo que es complementario al ángulo dado.

- (a) $\alpha = 74.23^{\circ}$
 (b) $\beta = 34^{\circ}15'$

Solución

- (a) Como dos ángulos son complementarios si su suma es 90° , debemos encontrar $90^{\circ} - \alpha$:

$$90^{\circ} - \alpha = 90^{\circ} - 74.23^{\circ} = 15.77^{\circ}$$

- (b) Para realizar la resta $90^{\circ} - \beta$, debemos ordenar la operación verticalmente y convertir 90° a $89^{\circ}60'$:

$$\begin{array}{r}
 89^{\circ}60' \\
 - 34^{\circ}15' \\
 \hline
 90^{\circ} - \beta = 55^{\circ}45'
 \end{array}$$

MEDIDA EN RADIANES

Otra manera de medir los ángulos es con radianes, los cuales se usan comúnmente en casi todas las aplicaciones trigonométricas que requieren el cálculo.

La medición de un ángulo θ en radianes se basa en la longitud de un arco de una circunferencia. Si situamos el vértice del ángulo θ en el centro de un círculo de radio r , entonces θ se denomina **ángulo central**. La región del círculo contenida dentro del ángulo central se denomina **sector**. Como lo muestra la figura 7, digamos que s denota la longitud del arco subtendido por θ . Entonces, la medida de θ en radianes se define así:

$$\theta = s/r$$

Esta definición no depende del tamaño de la circunferencia. Para observar esto, tomamos otra circunferencia centrada en el vértice de θ con radio r' y longitud de arco subtendido s' . Como podemos observar en la figura 8, los dos sectores circulares son similares y por eso las razones s/r y s'/r' son iguales. Por consiguiente, no importa cuál circunferencia utilicemos, vamos a obtener la misma medida en radianes para θ .

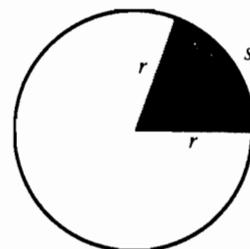


FIGURA 7

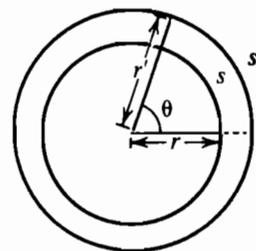


FIGURA 8

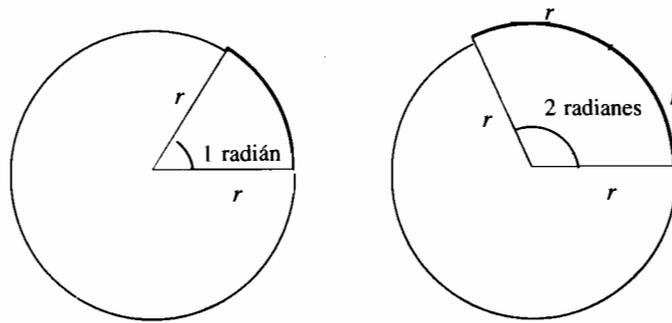


FIGURA 9

(a)

(b)

La figura 9(a) ilustra un ángulo de un radián, puesto que subtiende un arco de longitud s igual al radio r de la circunferencia. El ángulo que se muestra en la figura 9(b) mide 2 radianes, ya que subtiende un arco de $2r$ de longitud, en la circunferencia de radio r centrada en el vértice.

Una rotación completa subtiende un arco igual en longitud a la circunferencia del círculo $2\pi r$ (véase figura 10). Tenemos que:

$$\text{una rotación} = s/r = 2\pi r/r = 2\pi \text{ radianes}$$

$$s = \text{circunferencia} = 2\pi r$$

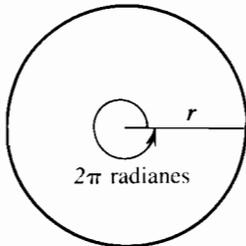


FIGURA 10

Tenemos el mismo formalismo anterior: un ángulo formado por una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las manecillas del reloj se considera negativo. En la figura 11 se ilustran cuatro ángulos en posición normal de $\pi/2$, $-\pi/2$, π y 3π radianes, respectivamente. Nótese que el ángulo de $\pi/2$ radianes que se muestra en la figura 11(a) se obtiene por un cuarto de rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj; esto es,

$$\frac{1}{4}(2\pi \text{ radianes}) = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

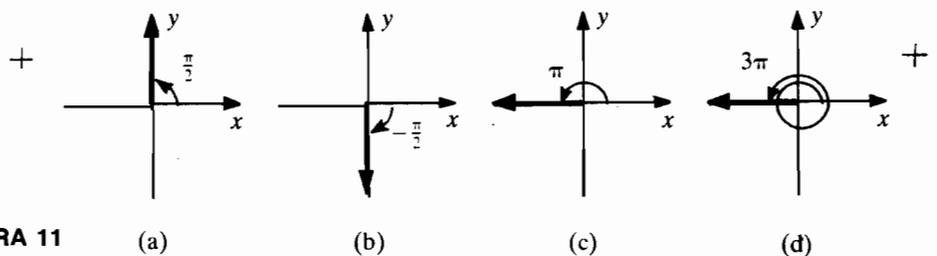


FIGURA 11

(a)

(b)

(c)

(d)

El ángulo que se muestra en la figura 11(b), obtenido de un cuarto de rotación completa en el sentido de las manecillas del reloj, es $-\pi/2$ radianes. El ángulo de la figura 11(c) es coterminal con el ángulo de la figura 11(d). En general, dos ángulos medidos en radianes son coterminales si y sólo si su diferencia es múltiplo de 2π radianes.

FORMULAS DE CONVERSION

Como hay dos formas para medir ángulos, es bueno saber cómo hacer la conversión de la una a la otra. La medida en grados para el ángulo correspondiente a una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj es 360° , mientras que la medida en radianes para el mismo ángulo es 2π radianes. Por tanto, $360^\circ = 2\pi$ radianes,

$$180^\circ = \pi \text{ radianes}^* \quad (1)$$

De (1) obtenemos las siguientes fórmulas para convertir de grados a radianes y viceversa.



Si usamos una calculadora para realizar la división en (i) y (ii), encontramos que:

$$1^\circ \approx 0.0174533 \text{ radianes}$$

y
respectivamente.

$$1 \text{ radián} \approx 57.29578^\circ$$

La fórmula (i) nos permite convertir de grados a radianes y la (ii) nos permite convertir de radianes a grados. Una ayuda para recordar estas fórmulas es trabajar con la proporción:

$$\frac{\text{medida en radianes de } \theta}{\text{medida en grados de } \theta} = \frac{\pi \text{ radianes}}{180^\circ} \quad (2)$$

EJEMPLO 7 _____

Convierta 20° a radianes.

Solución. A partir de (2) con $\theta = 20^\circ$, tenemos que:

$$\frac{\text{medida en radianes de } \theta}{20^\circ} = \frac{\pi \text{ radianes}}{180^\circ}$$

o

$$\text{medida en radianes de } \theta = 20^\circ \left(\frac{\pi \text{ radianes}}{180^\circ} \right) = \frac{\pi}{9} \text{ radián}$$

Ya que la medida en radianes de un ángulo es el cociente de dos longitudes, ésta no tiene dimensiones. Por esta razón la palabra "radián" se omite a menudo cuando los ángulos se miden en radianes. Cuando no se especifique unidad de medida, se sobreentiende que los ángulos se han medido en radianes.

EJEMPLO 8 _____

Convierta el ángulo dado a grados.

(a) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

(b) $\beta = 2$

* Esto no significa que $180 = \pi$, al igual que 12 pulgadas = 1 pie no significa que $12 = 1$. Más bien, significa que dos medidas del mismo ángulo son equivalentes.

Solución

(a) Como no nos ha sido dada ninguna unidad de la medida angular, sabemos que α se mide en radianes. A partir de la fórmula (ii) sabemos que el número de grados en 1 radián es $180/\pi$. Entonces la conversión sería:

$$\frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ = 210^\circ$$

(b) Similarmente, a partir de (ii) tenemos que:

$$2 = 2 \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{360}{\pi} \right)^\circ \approx 114.59^\circ$$

EJEMPLO 9

Convierta $153^\circ 40'$ a radianes.

Solución. Primero escribimos $153^\circ 40'$ en forma decimal:

$$\begin{aligned} 153^\circ 40' &= (153 + \frac{40}{60})^\circ \\ &= (153 + \frac{2}{3})^\circ \\ &\approx 153.67^\circ \end{aligned}$$

Después convertimos de grados a radianes usando la fórmula (i):

$$\begin{aligned} 153.67^\circ &= (153.67) \left(\frac{\pi}{180} \right) \text{ radianes} \\ &\approx 0.85\pi \text{ radianes} \\ &\approx 2.68 \text{ radianes} \end{aligned}$$

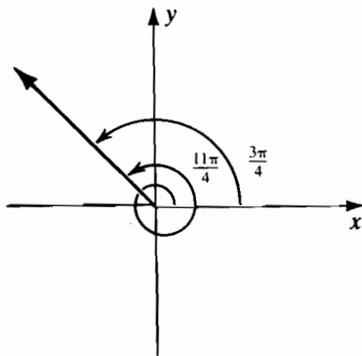


FIGURA 12

EJEMPLO 10

Encuentre un ángulo entre 0 y 2π que sea coterminal con $\theta = 11\pi/4$. Dibuje el ángulo.

Solución. Como $2\pi < 11\pi/4 < 3\pi$, restamos una vuelta, ó 2π radianes para obtener:

$$\frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{11\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Entonces, $3\pi/4$ es coterminal con $11\pi/4$, como lo muestra la figura 12.

LONGITUD DEL ARCO

En muchas aplicaciones es necesario encontrar la longitud s del arco subtendido por el ángulo central θ en una circunferencia de radio r (véase figura 13). A partir de la definición de la medida en radianes,

$$\theta \text{ (en radianes)} = s/r$$

obtenemos la **fórmula de la longitud del arco**:

$$s = r\theta, \text{ donde } \theta \text{ se mide en radianes} \quad (3)$$

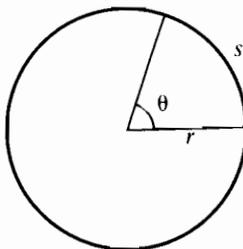


FIGURA 13

EJEMPLO 11

Encontrar la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 2 radianes en una circunferencia de (a) radio 4 y (b) radio 6.

Solución

(a) A partir de la fórmula de la longitud del arco (3) con $\theta = 2$ y $r = 4$, tenemos que:

$$s = r\theta = (4)(2) = 8$$

(b) A partir de la fórmula de la longitud del arco (3) con $\theta = 2$ y $r = 6$, tenemos que,

$$s = r\theta = (6)(2) = 12$$

Nota de advertencia: los estudiantes aplican frecuentemente la fórmula de la longitud del arco $s = r\theta$ *incorrectamente*, al utilizar la medición en grados para θ . Hay que recordar que $s = r\theta$ es válida *solamente si θ se mide en radianes*.

EJERCICIO 6.1

En los problemas 1 al 18, dibuje el ángulo dado en posición normal.

- | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1. 60° | 2. -120° | 3. 135° |
| 4. 150° | 5. 1140° | 6. -315° |
| 7. -240° | 8. -210° | 9. $\frac{\pi}{3}$ |
| 10. $\frac{5\pi}{4}$ | 11. $\frac{7\pi}{6}$ | 12. $-\frac{2\pi}{3}$ |
| 13. $-\frac{\pi}{6}$ | 14. -3π | 15. $\frac{5\pi}{2}$ |
| 16. $\frac{3\pi}{4}$ | 17. 3 | 18. 4 |

En los problemas 19 al 22, exprese el ángulo dado en notación decimal.

19. $10^\circ 39' 17''$
 20. $143^\circ 7' 2''$
 21. $5^\circ 10'$
 22. $10^\circ 25'$

En los problemas 23 al 26, exprese el ángulo dado en términos de grados, minutos y segundos.

23. 210.78°
 24. 15.45°
 25. 30.81°
 26. 110.5°

En los problemas 27 al 38, convierta de grados a radianes.

- | | |
|---------------------|-------------------|
| 27. 45° | 28. 30° |
| 29. 270° | 30. 60° |
| 31. 1° | 32. 0° |
| 33. $131^\circ 40'$ | 34. -120° |
| 35. -230° | 36. 52° |
| 37. 540° | 38. -47.2° |

En los problemas 39 al 50, convierta de radianes a grados.

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 39. $\frac{2\pi}{3}$ | 40. $\frac{\pi}{12}$ |
| 41. $\frac{\pi}{6}$ | 42. 7π |
| 43. 3.1 | 44. $\frac{19\pi}{2}$ |
| 45. 1.5 | 46. 0.76 |
| 47. 12 | 48. 17π |
| 49. $\frac{5\pi}{4}$ | 50. $\frac{3\pi}{8}$ |

En los problemas 51 al 54, encuentre el ángulo entre 0° y 360° , coterminnal con el ángulo dado.

- | | |
|------------------|------------------|
| 51. 875° | 52. 400° |
| 53. -610° | 54. -150° |

En los problemas 55 al 60, encuentre el ángulo entre 0 y 2π radianes que es coterminal con el ángulo dado.

55. $-\frac{\pi}{4}$ 56. $\frac{17\pi}{2}$ 57. 5.3π
 58. $-\frac{9\pi}{5}$ 59. -4 60. 7.5

En los problemas 61 al 64, encuentre el ángulo (a) complementario y (b) suplementario al ángulo dado, o si es necesario diga por qué el ángulo no puede ser encontrado.

61. $48^\circ 15'$ 62. $92^\circ 55'$
 63. 98.4° 64. 63.08°

65. Encuentre las medidas en radianes y en grados del ángulo formado por (a) tres quintos de una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj y (b) cinco y un octavo de una rotación en el sentido de las manecillas del reloj.
 66. Encuentre las medidas en grados y en radianes del ángulo obtuso formado por las manecillas de un reloj (a) a las 8:00; (b) a la 1:00; y (c) a las 7:30.
 67. Encuentre las medidas en grados y en radianes del ángulo a través del cual la manecilla de la hora de un reloj rota en 2 horas.
 68. Conteste la misma pregunta del problema 67, pero para el minutero de un reloj.
 69. La Tierra da una rotación completa cada 24 horas. ¿Cuánto se demora en rotar a un ángulo de (a) 240° y (b) de $\pi/6$ radianes?
 70. El planeta Mercurio completa una rotación cada 59 días. ¿A través de qué ángulo (medido en grados) rota en (a) 1 día; (b) 1 hora; y (c) 1 minuto?
 71. Encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 3 radianes en una circunferencia de (a) radio 3 y (b) radio 5.
 72. Encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 30° en una circunferencia de (a) radio 2 y (b) radio 4.
 73. Encuentre la medida de un ángulo central θ en una circunferencia de radio 5 si θ subtiende un arco cuya longitud es 7.5. Determine θ en (a) radianes y (b) grados.
 74. Encuentre la medida de un ángulo central θ en una circunferencia de radio 1 si θ subtiende un arco cuya longitud es $\pi/3$. Determine θ en (a) radianes y (b) grados.
 75. Un yoyo da vueltas en círculo al final de sus 100 cm de cuerda.
 (a) Si da seis revoluciones en 4 segundos, encuentre la razón de sus vueltas (**velocidad angular**) en radianes por segundo.
 (b) Encuentre la velocidad a la cual el yoyo gira en centímetros por segundo (esto se denomina **velocidad lineal**).
 76. Si hay un nudo en la cuerda del yoyo descrito en el problema 75 a 40 cm del yoyo, encuentre (a) la velocidad angular del nudo y (b) la velocidad lineal. ¿Cuál de estas velocidades es independiente del radio?
 77. Un automóvil viaja a razón de 55 mph y el diámetro de sus llantas es de 26 pulgadas.
 (a) Encuentre el número de revoluciones por minuto a las que van sus ruedas.
 (b) Encuentre la velocidad angular de sus ruedas en radianes sobre minuto.

78. Pruebe que el área A de un sector formado por un ángulo central de θ radianes en un círculo de radio r está dado por $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. [Sugerencia: use la propiedad de proporcionalidad de la geometría que dice que la razón del área A de un sector circular al área total πr^2 del círculo es igual a la razón del ángulo central θ a una revolución completa (2π)].
 79. ¿Cuál es el área de la banda circular demarcada que se muestra en la figura 14 si θ se mide (a) en radianes y (b) en grados? [Sugerencia: use el resultado del problema 78].

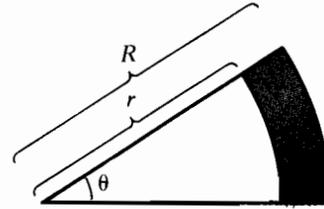


FIGURA 14

80. El péndulo de un reloj mide 1.3 m y oscila a lo largo de un arco de 15 cm. Encuentre (a) el ángulo central y (b) el área del sector a través del cual el péndulo se mueve en uno de sus balanceos. [Sugerencia: para responder la parte (b), utilice el resultado del problema 78].
 81. Una **milla náutica** se define como la longitud del arco subtendido en la superficie de la Tierra por un ángulo que mide 1 minuto. Si el diámetro de la Tierra es de 7927 millas, encuentre la cantidad de **millas** (terrestres) que hay en una milla náutica.
 82. Hacia el año 230 a. de C., Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra a partir de las siguientes observaciones: al mediodía, durante el día más largo del año, el Sol estaba justo sobre Asuán, mientras que estaba inclinado 7.2° de la vertical de Alejandría. El asumió que las dos ciudades estaban en la misma línea longitudinal y que los rayos del Sol eran paralelos. Así concluyó que el arco entre Asuán y Alejandría era subtendido por un ángulo central de 7.2° , en el centro de la Tierra (véase figura 15). En este tiempo, la distancia entre Asuán y Alejandría era de 5,000 estadios. Si un estadio = 559 pies, encuentre la circunferencia de la Tierra en (a) estadios y (b) millas. Demuestre que los datos de Eratóstenes dan un resultado dentro de 7% del valor correcto si el diámetro polar de la Tierra es de 7,900 millas (a la milla más cercana).

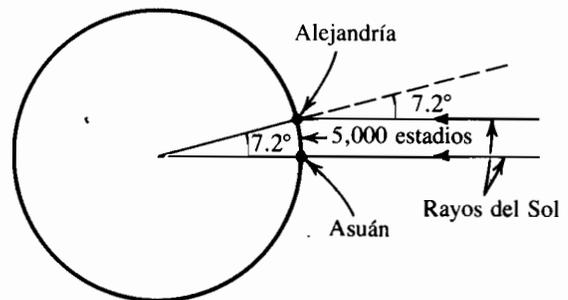


FIGURA 15

6.2 Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos

Como dijimos en la introducción de este capítulo, la palabra trigonometría se refiere a la medición de los triángulos. En esta sección definiremos las seis funciones trigonométricas: **seno**, **coseno**, **tangente**, **cosecante**, **secante** y **cotangente**, como las razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Los nombres de estas funciones se abrevian como **sen**, **cos**, **tan**, **csc**, **sec** y **cot**, respectivamente. En la sección 6.4 extenderemos las definiciones para ángulos generales.

Como lo muestra la figura 16, si $\triangle OAB$ es un triángulo rectángulo, entonces el lado AB se denomina **opuesto** al ángulo θ . El lado OA se llama **adyacente** al ángulo θ . La **hipotenusa**, OB , es el lado opuesto al ángulo recto. Las longitudes de estos lados se demarcan por **op**, **ady** e **hip**, respectivamente.

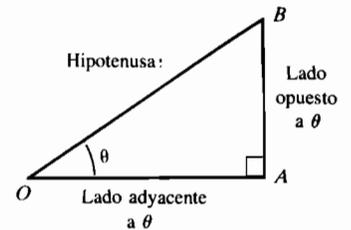


FIGURA 16

DEFINICION 1

Las seis funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo se definen así:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}}, & \operatorname{csc} \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}}, & \operatorname{sec} \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \\ \operatorname{tan} \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}}, & \operatorname{cot} \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \end{aligned}$$

El dominio de cada una de estas funciones trigonométricas es el conjunto de todos los ángulos agudos. En la sección 6.4 extenderemos este dominio para incluir otros ángulos distintos a los agudos. Después, en el capítulo 7 veremos cómo las funciones trigonométricas pueden definirse con un dominio que consta de números reales, en vez de ángulos. Los valores de las seis funciones trigonométricas dependen únicamente del tamaño del ángulo y no del tamaño del triángulo rectángulo. Esto lo podemos ver a continuación. Como lo muestra la figura 17, dos triángulos rectángulos con el mismo ángulo agudo θ son semejantes, y entonces las razones de los lados correspondientes son iguales. Por ejemplo, del triángulo más pequeño tenemos que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$

por otra parte, en el triángulo más grande tenemos que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}$$

Pero como el triángulo AOB es semejante al triángulo $A'OB'$, tenemos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}$$

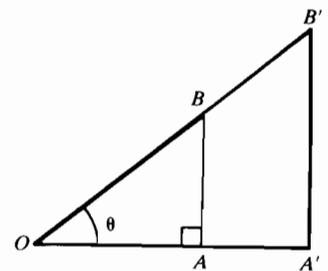


FIGURA 17

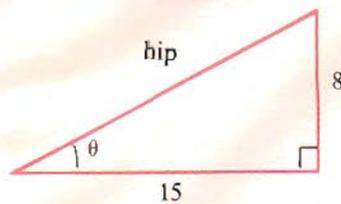


FIGURA 18

Así encontramos el mismo valor para $\text{sen } \theta$ sin importar cuál sea el triángulo que utilicemos para calcularlo. Un argumento similar podría servir para las otras funciones trigonométricas.

EJEMPLO 1

Encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ que nos muestra la figura 18.

Solución. A partir de la figura 18 podemos ver que para el ángulo θ , $\text{op} = 8$ y $\text{ady} = 15$. El valor de la hipotenusa puede ser hallado por el teorema de Pitágoras de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\text{hip})^2 &= 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \\ \text{hip} &= \sqrt{289} = 17 \end{aligned}$$

Entonces, los valores de las seis funciones trigonométricas son:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{8}{17}, & \text{csc } \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{17}{8} \\ \text{cos } \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{15}{17}, & \text{sec } \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{17}{15} \\ \text{tan } \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{8}{15}, & \text{cot } \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Hay muchas relaciones importantes entre las funciones trigonométricas. Las básicas se denominan **identidades fundamentales**, y vale la pena memorizarlas. Las siguientes identidades se derivan fácilmente de las definiciones de las funciones trigonométricas.

Identidades de cociente

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

Identidades recíprocas

$$\sec \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\text{tan } \theta}$$

Por ejemplo, la primera de las identidades de cociente se verifica de la siguiente manera:

$$\frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\text{op/hip}}{\text{ady/hip}} = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \text{tan } \theta$$

Las otras pueden ser verificadas de la misma manera (véanse problemas 51 al 54). Usando estas identidades podemos encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas, una vez sepamos los valores de $\text{sen } \theta$ y $\text{cos } \theta$.

EJEMPLO 2

Dado que $\operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5}$ y $\operatorname{cos} \theta = \frac{3}{5}$, encuentre los valores de las demás funciones trigonométricas.

Solución. De las identidades fundamentales, tenemos que:

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\operatorname{cos} \theta} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cot} \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}$$

El siguiente ejemplo ilustra que si el valor de una función trigonométrica de un ángulo agudo nos es dado, es posible encontrar los valores de las otras cinco funciones trigonométricas, si dibujamos un triángulo apropiado.

EJEMPLO 3

Si θ es un ángulo agudo y el $\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{7}$, encuentre los valores de las demás funciones trigonométricas en θ .

Solución. Dibujaremos un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ de manera que $\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{7}$. Esto se logra si $op = 2$ e $hip = 7$, como lo muestra la figura 19. Encontramos ady por medio del teorema de Pitágoras:

$$2^2 + (\operatorname{ady})^2 = 7^2$$

de manera que: $(\operatorname{ady})^2 = 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$

Así, $\operatorname{ady} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

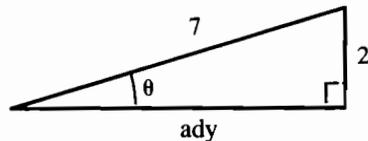


FIGURA 19

Los valores de las demás funciones trigonométricas son:

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$\sec \theta = \frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{15}$$

$$\tan \theta = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$\operatorname{cot} \theta = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{7}{2}$$

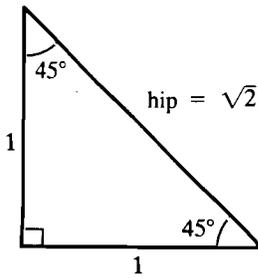


FIGURA 20

ANGULOS ESPECIALES

Los ángulos que miden 30° ($\pi/6$ radianes), 45° ($\pi/4$ radianes) y 60° ($\pi/3$ radianes) se dan frecuentemente en trigonometría. Podemos hallar los valores de las seis funciones trigonométricas de estos ángulos especiales usando algunos resultados de la geometría plana.

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo de 45° , consideramos un triángulo rectángulo isósceles con dos lados iguales de longitud 1, como lo muestra la figura 20. De la geometría plana sabemos que los ángulos agudos de este triángulo son iguales; por esto, cada uno de los ángulos mide 45° . Con el teorema de Pitágoras podemos encontrar la longitud de la hipotenusa:

$$\begin{aligned} (\text{hip})^2 &= (1)^2 + (1)^2 = 2 \\ \text{hip} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{sen } 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{csc } 45^\circ &= \sqrt{2} \\ \text{cos } 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{sec } 45^\circ &= \sqrt{2} \\ \text{tan } 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1, & \text{cot } 45^\circ &= 1 \end{aligned}$$

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60° , consideramos un triángulo equilátero AOB con lados de longitud 2, como lo muestra la figura 21(a). De la geometría plana sabemos que los tres ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno. Como lo muestra la figura 21(b), si hacemos una bisección del ángulo en O , entonces CO es la bisectriz perpendicular de AB . De lo cual se deduce que:

$$\begin{aligned} \angle AOC &= \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2}(60^\circ) = 30^\circ \\ \overline{AC} &= \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2}(2) = 1 \\ \angle ACO &= 90^\circ \end{aligned}$$

y

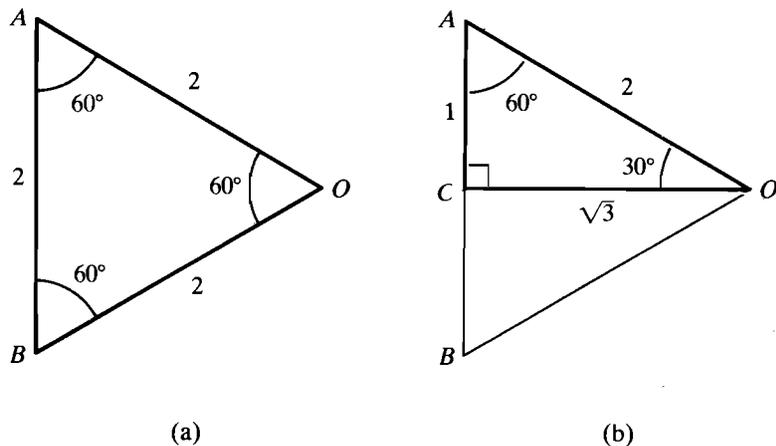


FIGURA 21

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al ángulo recto ACO , obtendremos:

$$(\overline{CO})^2 + 1^2 = 2^2,$$

o
$$(\overline{CO})^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

de tal manera que
$$\overline{CO} = \sqrt{3}.$$

Así, del triángulo ACO de la figura 21(b), podemos obtener los siguientes valores:

$$\theta = 30^\circ: \quad \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{tan } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = 60^\circ: \quad \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \text{tan } 60^\circ = \sqrt{3}$$

Usando la misma figura o las identidades fundamentales, podemos calcular los valores restantes para los ángulos de 30° y 60° :

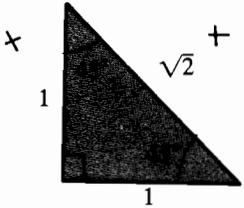
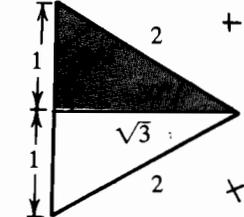
$$\theta = 30^\circ: \quad \text{csc } 30^\circ = 2 \quad \text{sec } 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{cot } 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\theta = 60^\circ: \quad \text{csc } 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{sec } 60^\circ = 2 \quad \text{cot } 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La siguiente tabla sintetiza los valores de las funciones seno y coseno que acabamos de determinar para los ángulos especiales 30° , 45° y 60° . Estos son utilizados con tanta frecuencia, que deberían ser memorizados. Conociendo estos valores y las identidades fundamentales que vimos anteriormente, podremos determinar cualquiera de las funciones trigonométricas de los ángulos especiales.

θ (grados)	θ (radianes)	sen θ	cos θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Podemos obtener los valores de la tabla anterior, si construimos primero los triángulos de $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ y $30^\circ-60^\circ-90^\circ$, como lo hicimos en las figuras 20 y 21. Después, podemos determinar los valores de las funciones a partir del triángulo. Esto se sintetiza en la siguiente tabla.

$\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$		Triángulo rectángulo isósceles con lados iguales a 1 e hipotenusa = $\sqrt{2}$
$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ o $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$		Triángulo equilátero con lados de longitud 2 y altura de longitud $\sqrt{3}$

Observe el problema 56 para obtener otra forma de recordar los senos y cosenos de los ángulos especiales.

UTILIZACION DE LA CALCULADORA

Las aproximaciones a los valores de las funciones trigonométricas se pueden obtener usando una calculadora científica.

Nota de advertencia: antes de utilizar una calculadora para hallar las funciones trigonométricas de los ángulos medidos en radianes, es necesario adaptar la calculadora en el modo de radianes. Si los ángulos son medidos en grados, entonces hay que poner la calculadora en el modo de grados, antes de hacer los cálculos. También, si los ángulos están dados en grados, minutos, y segundos, deben de ser convertidos primero a la forma decimal.

La mayoría de calculadoras científicas tienen teclas $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ y $\boxed{\tan}$ para computar los valores de estas funciones. Para obtener los valores de \csc , \sec o \cot , utilizamos las teclas $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ o $\boxed{\tan}$, con la tecla recíproca $\boxed{1/x}$. El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

EJEMPLO 4

Use la calculadora para aproximar cada uno de los siguientes datos:

- (a) $\sin 45^\circ$ (b) $\cos 8^\circ 15'$ (c) $\tan 1.4$
 (d) $\sec 0.23$ (e) $\cot \frac{\pi}{7}$

Solución

- (a) Primero nos aseguramos de que la calculadora esté en el modo de grados. Luego escribimos 45 y oprimimos la tecla $\boxed{\sin}$ para obtener

$$\sin 45^\circ \approx 0.7071068$$

la cual es una aproximación de siete cifras decimales al valor exacto $\sqrt{2}/2$.

- (b) Como el ángulo se nos da en grados y minutos, debemos convertirlo primero a la forma decimal:

$$8^{\circ}15' = 8^{\circ} + \left(\frac{15}{60}\right)^{\circ} = 8.25^{\circ}$$

Ahora, con la calculadora en el *modo de grados*, escribimos 8.25 y oprimimos la tecla $\boxed{\text{cos}}$ para obtener:

$$\cos 8^{\circ}15' = \cos 8.25^{\circ} \approx 0.9896514$$

- (c) Como los grados no están indicados, reconocemos que este ángulo está medido en radianes. Entonces adaptamos la calculadora en el *modo de radianes*; escribimos 1.4 y oprimimos $\boxed{\text{tan}}$ para obtener:

$$\tan 1.4 \approx 5.7978837$$

- (d) Para evaluar $\sec 0.23$, usamos la identidad fundamental

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

Con la calculadora en el modo de radianes, escribimos 0.23, oprimimos $\boxed{\text{cos}}$, y tomamos el recíproco del resultado oprimiendo $\boxed{1/x}$ y obtenemos

$$\sec 0.23 = \frac{1}{\cos 0.23} \approx 1.0270458$$

- (e) Observamos que el ángulo está medido en radianes y que la calculadora está adaptada apropiadamente. Oprimimos $\boxed{\pi}$ o (3.141592654), dividimos por 7 y oprimimos primero $\boxed{\text{tan}}$ y luego $\boxed{1/x}$ para obtener:

$$\cot \frac{\pi}{7} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{7}} \approx 2.0765214$$

En muchas aplicaciones podemos determinar el valor de una de las funciones trigonométricas, digamos $\sin \theta$, y deseamos encontrar θ . Podemos lograrlo usando el inverso de las funciones trigonométricas, que veremos en detalle en la sección 7.9. Por ahora, podemos encontrar un ángulo agudo θ si nos dan $\sin \theta$ (o alguna de las demás funciones trigonométricas de θ), utilizando la tecla del inverso $\boxed{\text{INV}}$ en la calculadora. Por ejemplo, si se nos da $\sin \theta = 0.625$ y queremos hallar θ , escribimos 0.625, oprimimos $\boxed{\text{INV}}$ y luego $\boxed{\text{sin}}$. Si la calculadora está adaptada en el *modo de grados* obtenemos $\theta \approx 38.6821875^{\circ}$. Sin embargo, si la calculadora está adaptada en el *modo de radianes* obtenemos $\theta \approx 0.6751315$.

Las funciones trigonométricas inversas se denotan por \sin^{-1} o arcsen, \cos^{-1} o arccos, \tan^{-1} o arctan y así sucesivamente. Algunas calculadoras tienen teclas marcadas como $\boxed{\text{sin}^{-1}}$, $\boxed{\text{cos}^{-1}}$ y $\boxed{\text{tan}^{-1}}$ y no requieren la utilización de la tecla $\boxed{\text{INV}}$ (lea el manual de su calculadora si necesita una mayor explicación).

EJEMPLO 5 _____

Use una calculadora para hallar el ángulo agudo en (a) grados y (b) radianes, para el cual $\cos \theta = 0.5$.

Solución

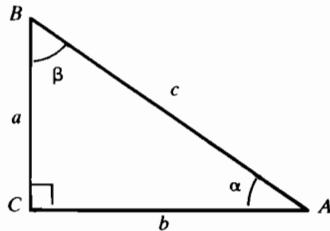
- (a) Primero colocamos la calculadora en el modo de grados. Escribimos 0.5 y luego oprimimos $\boxed{\text{INV}}$ y $\boxed{\text{COS}}$. El resultado es 60. Por tanto, $\theta = 60^\circ$.
- (b) Con la calculadora adaptada en el modo de radianes, escribimos 0.5 y oprimimos $\boxed{\text{INV}}$ y seguidamente $\boxed{\text{COS}}$. El resultado es 1.0471976. Entonces $\cos \theta = 0.5$. $\theta \approx 1.0471976$ radianes. Note que 1.0471976 es una aproximación decimal de $\pi/3$.

TABLAS TRIGONOMETRICAS

Antes de que surgiera la calculadora científica, las tablas de los valores de las funciones trigonométricas eran esenciales para resolver problemas de trigonometría. Las tablas III y IV al final del libro, contienen aproximaciones de cuatro cifras decimales para $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ y $\cot \theta$, para cualquier ángulo agudo θ , medido en grados y radianes, respectivamente. Véase el apéndice para leer las instrucciones sobre cómo utilizar estas tablas, si no tiene calculadora.

COFUNCIONES

El uso de la terminología seno y coseno, tangente y cotangente, secante y cosecante es resultado de la siguiente observación: como lo muestra la figura 22, si los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo ABC están demarcados como α y β , y a es la longitud del lado opuesto a α , b es la longitud del lado opuesto a β , y c es la longitud del lado opuesto al ángulo recto, entonces:

**FIGURA 22**

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta, \quad \csc \alpha = \frac{c}{a} = \sec \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta, \quad \sec \alpha = \frac{c}{b} = \csc \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \cot \beta, \quad \cot \alpha = \frac{b}{a} = \tan \beta$$

Así, el coseno de un ángulo agudo es igual al seno del ángulo complementario; la cotangente de un ángulo agudo es igual a la tangente del ángulo complementario; la cosecante de un ángulo agudo es igual a la secante del ángulo complementario y viceversa. Por esta razón decimos que el seno y el coseno, tangente y cotangente, y secante y cosecante son **cofunciones**. Como resultado, hemos rectificado las siguientes identidades para cualquier ángulo agudo θ .

θ (radianes)	θ (grados)
$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$	$\sin (90^\circ - \theta) = \cos \theta$
$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta$	$\tan (90^\circ - \theta) = \cot \theta$
$\sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \csc \theta$	$\sec (90^\circ - \theta) = \csc \theta$

Como veremos en la sección 7.5 estas identidades sirven para todos los ángulos θ (no solamente para los agudos).

EJERCICIO 6.2

En los problemas 1 al 10, encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ en cada uno de los triángulos.

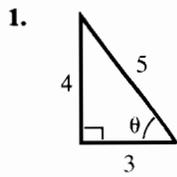


FIGURA 23

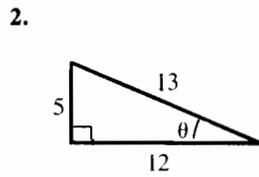


FIGURA 24

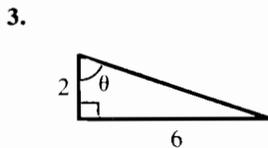


FIGURA 25

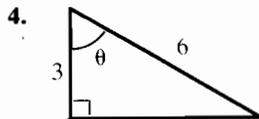


FIGURA 26

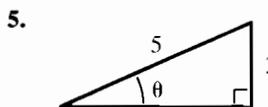


FIGURA 27

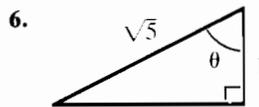


FIGURA 28

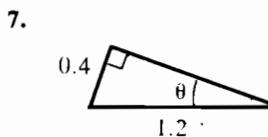


FIGURA 29



FIGURA 30

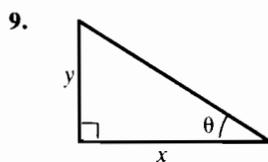


FIGURA 31

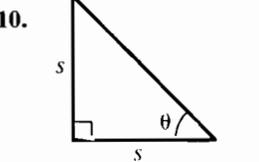


FIGURA 32

En los problemas 11 al 18, utilice las identidades fundamentales para encontrar los valores de las funciones trigonométricas que faltan para θ .

- 11. $\text{sen } \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \text{cos } \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$
- 12. $\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \text{cos } \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$
- 13. $\text{sen } \theta = \frac{2}{7}, \text{cos } \theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$
- 14. $\text{sen } \theta = \frac{5}{\sqrt{26}}, \text{cos } \theta = \frac{1}{\sqrt{26}}$

- 15. $\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{65}}, \text{tan } \theta = \frac{1}{8}$
- 16. $\text{cos } \theta = \frac{5}{\sqrt{29}}, \text{cot } \theta = \frac{5}{2}$
- 17. $\text{csc } \theta = \frac{5}{3}, \text{sec } \theta = \frac{5}{4}$
- 18. $\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{50}}, \text{cot } \theta = 7$

En los problemas 19 al 26, encuentre los valores de las funciones trigonométricas que faltan, dibujando un triángulo apropiado.

- 19. $\text{sen } \theta = \frac{12}{13}$
- 20. $\text{cos } \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$
- 21. $\text{sec } \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$
- 22. $\text{csc } \theta = \sqrt{10}$
- 23. $\text{tan } \theta = \frac{2}{5}$
- 24. $\text{cot } \theta = \frac{1}{7}$
- 25. $\text{cos } \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a^2 + b^2 \neq 0$
- 26. $\text{tan } \theta = \frac{b}{a}, a \neq 0$

En los problemas 27 al 34, utilice una calculadora para encontrar los valores aproximados de las seis funciones trigonométricas para el ángulo dado.

- 27. 17°
- 28. 82°
- 29. 14.3°
- 30. $46^\circ 15' 8''$
- 31. $\frac{\pi}{5}$
- 32. $\frac{\pi}{10}$
- 33. 0.6725
- 34. 1.24

En los problemas 35 al 44, utilice una calculadora para aproximar el ángulo agudo θ , medido en (a) radianes y (b) grados, para satisfacer la condición impuesta.

- 35. $\text{sen } \theta = 0.5260$
- 36. $\text{cos } \theta = 0.8964$
- 37. $\text{tan } \theta = 2.4$
- 38. $\text{sen } \theta = 0.752$
- 39. $\text{cos } \theta = 0.2$
- 40. $\text{tan } \theta = 3.15$
- 41. $\text{sen } \theta = \frac{1}{3}$
- 42. $\text{cos } \theta = \frac{1}{4}$
- 43. $\text{sec } \theta = 3.81$
- 44. $\text{csc } \theta = 1.05$

En los problemas 45 al 50, responda verdadero o falso.

- 45. $\text{cot } 47^\circ = \frac{\text{cos } 47^\circ}{\text{sin } 47^\circ}$ —
- 46. Si θ es medido en radianes, $\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen } \theta$ —
- 47. $\text{sen } 61^\circ = \text{cos } 29^\circ$ —
- 48. $\text{sen } \frac{1}{2} = 30^\circ$ —
- 49. $\text{cos } \frac{\pi}{6} = \text{sen } \frac{\pi}{3}$ —
- 50. $\text{cos } \frac{\pi}{3} = \text{sec } \frac{3}{\pi}$ —

En los problemas 51 al 54, use las definiciones de las funciones trigonométricas de la página 281 para verificar la identidad dada.

$$51. \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$52. \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$53. \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$54. \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

55. Usando la figura 33, demuestre que si θ es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, entonces:

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$$

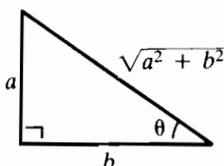


FIGURA 33

56. El patrón de la siguiente tabla puede ser útil para memorizar los senos y los cosenos de los ángulos especiales. El patrón usa el hecho de que $\sqrt{1} = 1$. Verifique la tabla.

θ (grados)	θ (radianes)	$\sin \theta$	$\cos \theta$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

57. Como lo muestra la figura 34, 2 estaciones de remolque S_1 y S_2 ven un globo meteorológico con ángulos de elevación α y β , respectivamente. Demuestre que la altura h a la que está el globo está dada por:

$$h = \frac{c}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

donde c es la distancia entre las dos estaciones. [Sugerencia: encuentre $\cot \alpha + \cot \beta$].

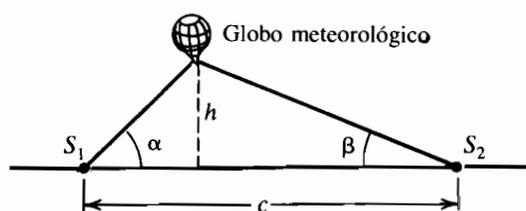


FIGURA 34

58. Use la identidad de la cofunción $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$, para probar que la altura a la hipotenusa de un ángulo rectángulo es la media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa (refiriéndose a la figura 35), esto es

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

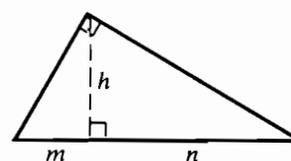


FIGURA 35

6.3 Aplicaciones de la trigonometría a triángulos rectángulos

RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

Las aplicaciones de la trigonometría en campos como la topografía y la navegación requieren **resolver triángulos rectángulos**. La expresión "resolver un triángulo" significa encontrar la longitud de cada lado y la medida de cada ángulo del triángulo. En esta sección veremos que podemos resolver cualquier triángulo rectángulo si se nos da:

- (i) o bien las longitudes de dos lados, o
 (ii) la longitud de un lado y la medida de un ángulo agudo.

Como lo muestran los ejemplos más adelante, dibujar y demarcar el triángulo es parte fundamental del proceso de solución. Nuestra práctica general será dibujar y demarcar el triángulo como lo muestra la figura 36. Los tres vértices del triángulo se denotan como A , B y C con C en el vértice del ángulo recto. Denotamos los ángulos en A y B como α y β , y las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos como a y b , respectivamente. La longitud del lado opuesto al ángulo recto en C se denota como c .

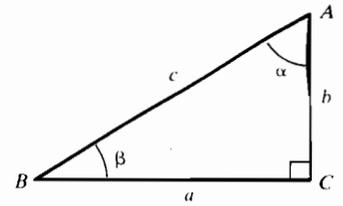


FIGURA 36

EJEMPLO 1

Resuelva el triángulo rectángulo con una hipotenusa de $4\sqrt{3}$ de longitud y un ángulo de 60° .

Solución. Primero dibujamos un triángulo y lo marcamos como lo muestra la figura 37. Queremos encontrar a , b y β . Como α y β son complementarios,

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Conocemos la longitud de la *hipotenusa*. Para encontrar a el lado *opuesto* del ángulo de 60° , seleccionamos la función seno. De $\text{sen } \alpha = \text{op}/\text{hip}$ obtenemos que:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{a}{4\sqrt{3}}, \quad \text{o} \quad a = 4\sqrt{3} \text{ sen } 60^\circ$$

Recordemos de la sección 6.2 que $\text{sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2$, entonces,

$$a = 4\sqrt{3} \text{ sen } 60^\circ = 4\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6$$

Para encontrar b , el lado *adyacente* al ángulo de 60° , seleccionamos la función coseno. De $\text{cos } \alpha = \text{ady}/\text{hip}$, obtenemos que,

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{b}{4\sqrt{3}}, \quad \text{o} \quad b = 4\sqrt{3} \text{ cos } 60^\circ$$

Así, utilizando $\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$b = 4\sqrt{3} \text{ cos } 60^\circ = 4\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3}$$

Como alternativa, una vez determinamos a , hubiéramos podido hallar b usando o bien el teorema de Pitágoras o la función tangente. En general, puede haber muchas maneras de resolver un triángulo.

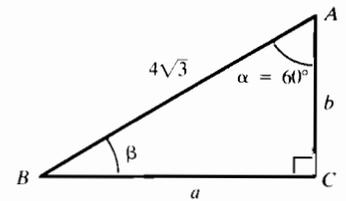


FIGURA 37

Si hay ángulos distintos a los especiales 30° , 45° o 60° dentro del problema, se debe utilizar la calculadora o la tabla de funciones trigonométricas para hallar *aproximaciones* de los valores de las funciones trigonométricas deseadas. Para el resto de este capítulo, cuandoquiera que se use una aproximación, redondearemos los resultados finales a la centésima más cercana, a menos que el problema especifique otra cosa.

UTILIZACION DE LA CALCULADORA

En los siguientes ejemplos, los cálculos se hicieron con una calculadora científica. Sin embargo, si utilizamos la tabla IV para obtener los valores de las funciones trigonométricas,

los resultados pueden ser algo diferentes de los que se muestran. Esto se debe a que la calculadora opera internamente con ocho o más dígitos, a pesar de que la tabla provee solamente cuatro dígitos significativos. Como se mencionó en la sección 5.2, para aprovechar al máximo la exactitud y la capacidad de la calculadora, los valores computados de las funciones trigonométricas deben ser retenidos o guardados en la memoria de la calculadora para uso posterior. Si, por el contrario, se escribe un valor completo y más tarde un valor redondeado en la calculadora, la exactitud del resultado final disminuirá.

EJEMPLO 2

Resuelva el triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 57.5° y cuyo lado opuesto mide 10.

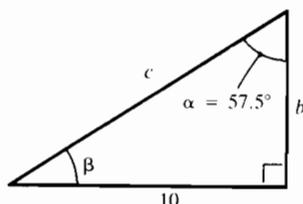


FIGURA 38

Solución. Primero dibujamos y marcamos el triángulo, como lo muestra la figura 38. A partir del dibujo podemos ver que debemos encontrar β , b y c . Como α y β son ángulos complementarios,

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 57.5^\circ = 32.5^\circ$$

Conocemos la longitud del lado *opuesto* α . Para hallar la longitud del lado *adyacente*, usamos la función tangente. De $\tan \alpha = \text{op/ady}$, tenemos que:

$$\tan 57.5^\circ = \frac{10}{b}, \quad \text{o} \quad b = \frac{10}{\tan 57.5^\circ}$$

Utilizando una calculadora, encontramos que $57.5^\circ \approx 1.5696856$, de manera que

$$b \approx \frac{10}{1.5696856^*} \approx 6.37$$

(Para el cálculo anterior, la posible secuencia para escribir en una calculadora podría ser: adaptar la calculadora al modo de grados, escribir 57.5, oprimir la tecla $\boxed{\tan}$, luego oprimir $\boxed{1/x}$ y finalmente multiplicar por 10).

Para hallar la *hipotenusa* c , usando $\sin \alpha = \text{op/hip}$ obtenemos que:

$$\sin 57.5^\circ = \frac{10}{c}, \quad \text{o} \quad c = \frac{10}{\sin 57.5^\circ}$$

$$\text{Así,} \quad c \approx \frac{10}{0.8433914} \approx 11.86$$

EJEMPLO 3

Resuelva el triángulo rectángulo con lados de 4 y 5 de longitud.

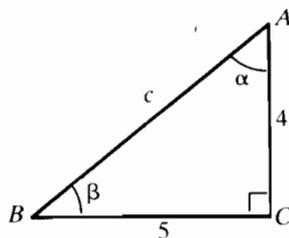


FIGURA 39

Solución. Después de haber dibujado y marcado el triángulo, como lo muestra la figura 39, vemos que debemos encontrar c , α y β . A partir del teorema de Pitágoras, la hipotenusa c se nos da por:

$$c = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \approx 6.40$$

Para encontrar β , usamos $\tan \beta = \text{op/ady}$. (Si trabajamos con las cantidades que se nos dan, evitaremos errores con aproximaciones previas). Entonces tenemos que:

* En este punto estamos mostrando el valor de la función trigonométrica para revisar su operación. Al trabajar con una calculadora, este paso no se escribiría. Continuaremos verificándolo en los subsiguientes ejemplos de esta sección.

$$\tan \beta = \frac{4}{5} = 0.8$$

Para hallar β con una calculadora en el modo de grados, escribimos 0.8, oprimimos **INV**, y luego **tan**. El resultado es:

$$\beta \approx 38.6598083^\circ \approx 38.66^\circ$$

Entonces,
$$\alpha = 90^\circ - \beta \approx 90^\circ - 38.66^\circ = 51.34^\circ$$

EJEMPLO 4

Una cometa se queda atascada en las ramas más altas de un árbol. Si la cuerda de la cometa mide 90 pies y forma un ángulo de 22° con el suelo, estime la altura del árbol encontrando la distancia que hay entre la cometa y el suelo.

Solución. Sea h la altura de la cometa. A partir de la figura 40 vemos que:

$$\frac{h}{90} = \sin 22^\circ, \quad \text{o} \quad h = 90 \sin 22^\circ$$

Entonces,
$$h \approx 90 (0.3746066) \approx 33.71 \text{ pies}$$

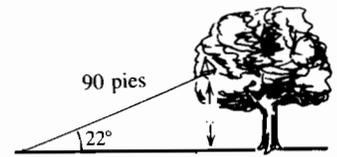


FIGURA 40

EJEMPLO 5

La distancia entre la Tierra y la Luna varía a medida que la Luna gira alrededor de la Tierra. A un tiempo determinado, un astrónomo principiante mide el ángulo de 1° que se muestra en la figura 41*. Calcule aproximando a cientos de millas la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna en este instante. Asuma que el radio de la Tierra es 3,963 millas.

Solución. Sea d la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna. A partir de la definición de la función seno, tenemos que:

$$\sin 1^\circ = \frac{3,963}{d}, \quad \text{o} \quad d = \frac{3,963}{\sin 1^\circ}$$

Con una calculadora encontramos lo siguiente:

$$d \approx \frac{3,963}{0.0174524} \approx 227,100 \text{ millas}$$

redondeando a cientos de millas.

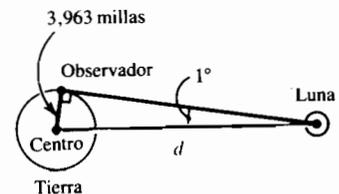


FIGURA 41

EJEMPLO 6

Un carpintero corta el borde de un tablero de 4 pulgadas de largo con una inclinación de 25° de la vertical, empezando desde un punto situado a $1\frac{1}{2}$ pulgadas del borde del tablero. Encuentre las longitudes del corte diagonal y del lado restante. Véase figura 42.

* Este ángulo se conoce como **paralelo geocéntrico**. Su determinación depende de dos observaciones hechas desde la Tierra.

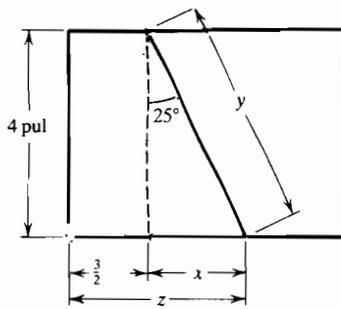


FIGURA 42

Solución. Sean x , y y z las dimensiones desconocidas, como lo marca la figura 42. De la definición de la función tangente tenemos que:

$$\tan 25^\circ = \frac{x}{4}$$

Entonces,

$$x = 4 \tan 25^\circ \approx 4(0.4663077) \approx 1.87 \text{ pulgadas}$$

Para encontrar y observamos que,

$$\frac{y}{4} = \sec 25^\circ, \text{ o } y = 4 \sec 25^\circ$$

Con la calculadora como recurso (utilizando las teclas $\boxed{\cos}$ y $\boxed{1/x}$), obtenemos:

$$y \approx 4(1.1033779) \approx 4.41 \text{ pulgadas}$$

Como $z = \frac{3}{2} + x$ y $x \approx 1.87$ pulgadas, vemos que:

$$z \approx 1.5 + 1.87 \approx 3.37 \text{ pulgadas}$$

ANGULOS DE ELEVACION Y DEPRESION

El ángulo entre la línea de visibilidad de un observador y un objeto, y la línea horizontal recibe un nombre especial. Como lo ilustra la figura 43, si la línea de visibilidad y el objeto están por encima de la horizontal, el ángulo se denomina **ángulo de elevación**, mientras que si la línea de visibilidad y objeto están por debajo de la horizontal, el ángulo se denomina **ángulo de depresión**.

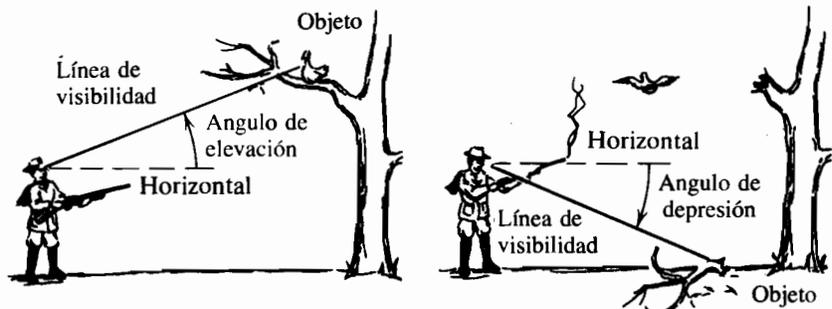


FIGURA 43

EJEMPLO 7

Un topógrafo utiliza un instrumento denominado teodolito para medir el ángulo de elevación entre la cima de la montaña y el nivel del suelo. En un punto, el ángulo de elevación mide 41° , medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 37° . ¿Qué tan alta es la montaña?

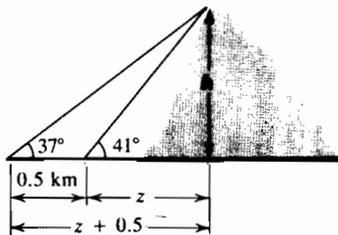


FIGURA 44

Solución. h representa la altura. La figura 44 muestra que hay dos triángulos rectángulos que comparten el lado común h , entonces obtenemos dos ecuaciones con dos incógnitas z y h :

$$\frac{h}{z + 0.5} = \tan 37^\circ \text{ y } \frac{h}{z} = \tan 41^\circ$$

Podemos resolver cada una de estas para h obteniendo:

$$h = (z + 0.5) \tan 37^\circ \quad y \quad h = z \tan 41^\circ$$

Igualando los dos últimos resultados obtenemos una ecuación a partir de la cual podemos determinar z

$$(z + 0.5) \tan 37^\circ = z \tan 41^\circ$$

Al despejar z obtenemos:

$$z = \frac{-0.5 \tan 37^\circ}{\tan 37^\circ - \tan 41^\circ} \\ \approx 3.2556$$

Ahora h puede ser hallada así:

$$h = z \tan 41^\circ \\ \approx 3.2556 \tan 41^\circ \\ \approx 2.83 \text{ km}$$

EJEMPLO 8

La mayoría de los aviones llegan al aeropuerto internacional de San Francisco (SFO) en una planeación recta de 3° empezando en un punto 5.5 millas (horizontales) del punto de aterrizaje. Usando una técnica experimental computarizada, llamada *acceso en dos segmentos*, un avión alcanza la pista en un planeo recto, empezando en un punto 5.5 millas (horizontales) del punto de aterrizaje, y luego cambia a un planeo de 3° a 1.5 mi (horizontales) del punto de aterrizaje. El propósito de este nuevo acceso es, por supuesto, el de reducir el ruido. ¿Cuál es la altura en pies de un avión P que utiliza el planeo experimental cuando cambia al planeo de 3° ? Compare la altura de este avión con otro avión P' utilizando el acceso estándar de 3° cuando ambos aviones están a 5.5 millas del punto de aterrizaje.

Solución. Para poder ilustrar más claramente, los ángulos y las distancias que se muestran en la figura 45 son un poco exagerados.

Sea x la altura del avión P en el punto Q 1.5 millas fuera de la pista, cuando el avión cambia al planeo de 3° . De la figura vemos que:

$$\frac{x}{1.5} = \tan 3^\circ, \quad \text{o} \quad x = 1.5 \tan 3^\circ$$

Entonces,

$$x \approx 1.5(0.0524078) \\ \approx 0.0786 \text{ millas} \\ = 0.0786(5,280) \text{ pies} \\ \approx 415 \text{ pies}$$

Si y es la altura del avión P' en el acceso estándar de 3° cuando está a 5.5 millas fuera de la pista, entonces,

$$\frac{y}{5.5} = \tan 3^\circ, \quad \text{o} \quad y = 5.5 \tan 3^\circ$$

Así:

$$y \approx 5.5(0.0524078) \\ \approx 0.2882 \text{ millas} \\ = 0.2882(5,280) \text{ pies} \\ \approx 1,522 \text{ pies}$$

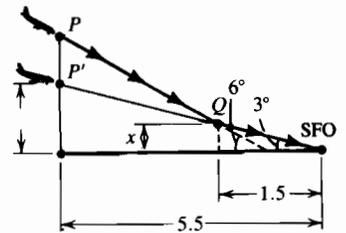


FIGURA 45

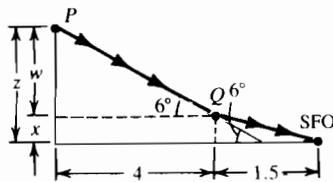


FIGURA 46

Ahora, como lo muestra la figura 46, la altura del aeroplano P a 5.5 millas por fuera, está dada por:

$$z = w + x.$$

donde

$$\frac{w}{4} = \tan 6^\circ, \text{ o } w = 4 \tan 6^\circ$$

Entonces,

$$\begin{aligned} w &\approx 4(0.1051042) \\ &\approx 0.4204 \text{ millas} \\ &= 0.4204(5,280) \text{ pies} \\ &\approx 2,220 \text{ pies} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la altura aproximada del avión P en un punto 5.5 millas fuera es:

$$z \approx 2,220 + 415 = 2,635 \text{ pies}$$

EJERCICIO 6.3

En los problemas 1 al 14, encuentre las incógnitas que se le piden. Cada problema se refiere al triángulo que nos muestra la figura 47.

- | | |
|---|--|
| 1. $a = 4, \beta = 27^\circ; b, c$ | 2. $c = 10, \beta = 49^\circ; a, b$ |
| 3. $b = 8, \beta = 34^\circ 20'; a, c$ | 4. $c = 25, \alpha = 50^\circ; a, b$ |
| 5. $a = 6, \alpha = 61^\circ 10'; b, c$ | 6. $a = 5, b = 2; \alpha, \beta, c$ |
| 7. $b = 1.5, c = 3; \alpha, \beta, a$ | 8. $b = 4, \alpha = 58^\circ; a, c$ |
| 9. $a = 4, b = 10; \alpha, \beta, c$ | 10. $b = 3, c = 6; \alpha, \beta, a$ |
| 11. $a = 9, c = 12; \alpha, \beta, b$ | 12. $a = 11, \alpha = 33.5^\circ; b, c$ |
| 13. $b = 20, \alpha = 23^\circ; a, c$ | 14. $c = 15, \beta = 31^\circ 40'; a, b$ |

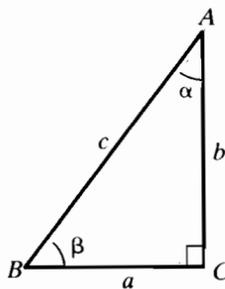


FIGURA 47

- Un edificio proyecta una sombra de 20 m de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto del edificio es de 69° , ¿cuál es la altura del edificio?
- Dos árboles están en las orillas opuestas de un río, como lo muestra la figura 48. Una línea base de 100 pies se mide desde el árbol T_1 , y desde esa posición, el ángulo β , hasta el árbol T_2 mide 29.7° . Si la línea base es perpendicular al segmento de la línea entre T_1 y T_2 , encuentre la distancia entre los dos árboles.

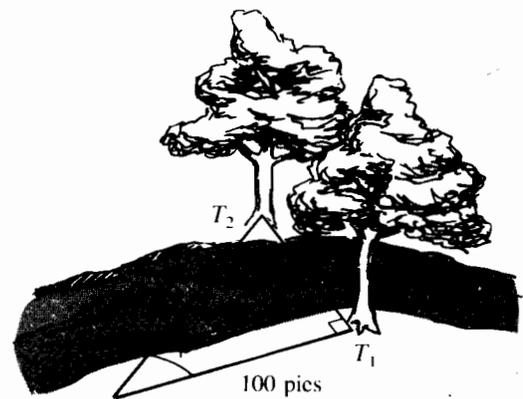


FIGURA 48

- Una torre de 50 pies se localiza al borde de un río. El ángulo de elevación entre la orilla opuesta y la cima de la torre es de 37° . Determine la anchura del río.
- Un topógrafo utiliza un geodómetro para medir la distancia en línea recta desde un punto en el suelo hasta un punto en la cima de la montaña. Utilice la información que se le da en la figura 49 para determinar la altura de la montaña.

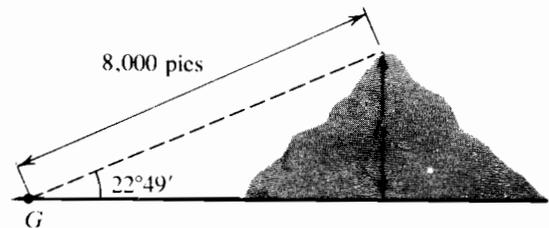


FIGURA 49

19. Un observador situado en el techo de un edificio A mide un ángulo de depresión de 27° entre la línea horizontal y la base de un edificio B . El ángulo de elevación desde el mismo punto, hasta el techo del segundo edificio es de $41^\circ 25'$. ¿Cuál es la altura del edificio B , si la altura del edificio A es de 150 pies?
20. Encuentre la altura h de una montaña utilizando la información de la figura 50.

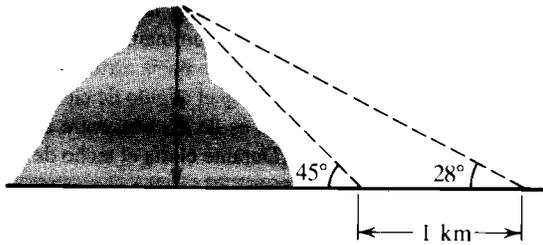


FIGURA 50

21. La parte superior de una escalera de 20 pies está recostada contra el borde del techo de una casa. Si el ángulo de inclinación de la escalera desde la horizontal es de 51° , ¿cuál es la altura aproximada de la casa y qué tan lejos está la parte inferior de la escalera de la base de la casa?
22. Un aeroplano que vuela a una altitud de 25,000 pies se aproxima a una estación de radar localizada en una colina de 2,000 pies de altura. En un instante el ángulo entre el radar que apunta hacia el avión y la horizontal es de 57° . ¿Cuál es la distancia en línea recta, en millas, entre el avión y la estación de radar en ese instante en particular?
23. Un segmento recto de 5 millas de una carretera sube por una colina de 4,000 pies de altura. Determine el ángulo que forma la carretera con la horizontal.
24. Una caja tiene las dimensiones que se muestran en la figura 51. Encuentre la longitud de la diagonal entre los extremos P y Q . ¿Cuál es el ángulo θ formado entre la diagonal y el borde inferior de la caja?

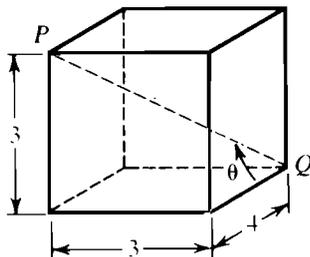


FIGURA 51

25. Unos observadores en dos pueblos distintos, A y B , en cada lado de una montaña de 12,000 pies, miden los ángulos de elevación entre el suelo y la cima de la montaña (véase figura 52). Asumiendo que los pueblos están sobre el mismo plano vertical, encuentre la distancia horizontal que hay entre ellos.

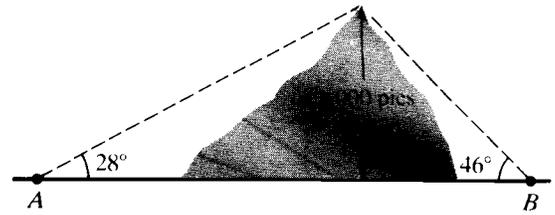
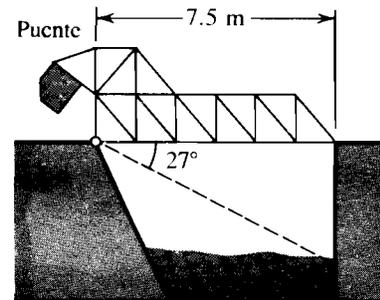
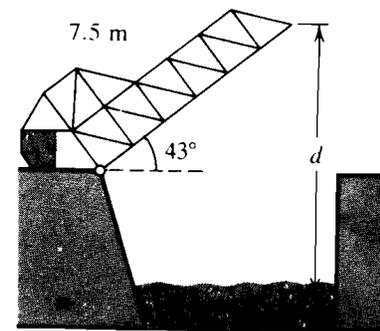


FIGURA 52

26. Un puente levadizo mide 7.5 metros de orilla a orilla, y cuando está completamente abierto forma un ángulo de 43° con la horizontal (véase figura 53(b)). Cuando el puente está cerrado, el ángulo de depresión desde la orilla, hasta un punto en la superficie del agua, debajo del extremo opuesto, es de 27° (véase la figura 53(a)). Cuando el puente está completamente abierto, ¿cuál es la distancia d entre su punto más alto y el agua que hay debajo?



(a)



(b)

FIGURA 53

27. Un hombre parado a 50 pies de una casa de 20 pies de altura, mira hacia la antena de televisión localizada arriba, en el borde del techo (véase figura 54). Si el ángulo, entre su línea de visibilidad al borde del techo y su línea de visibilidad a la cima de la antena es de 12° , ¿cuál es la altura de la antena?

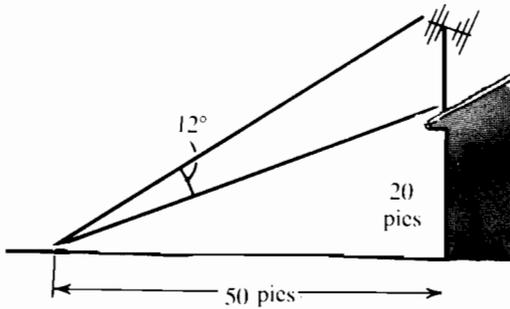


FIGURA 54

28. El asta de una bandera está localizada al borde de un precipicio de 50 pies, a la orilla de un río de 40 pies de anchura (véase figura 55). Un observador al lado opuesto del río mide un ángulo de 9° entre su línea de observación y la punta de la bandera, y su línea de observación y la cima del precipicio. Encuentre la altura del asta de la bandera.

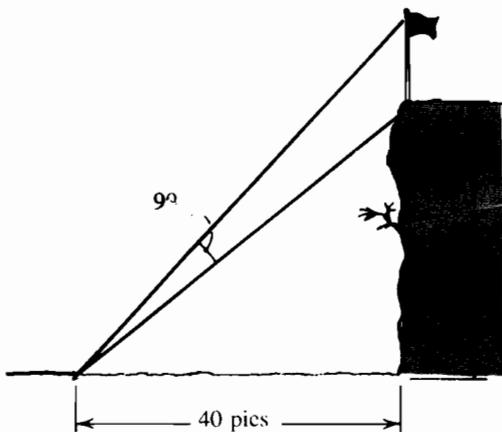


FIGURA 55

29. La longitud de un Boeing 727 es de 131.1 pies. ¿Cuál es la altitud del avión si éste subtende un ángulo de 2° cuando está directamente sobre un observador situado en tierra? (Véase figura 56).

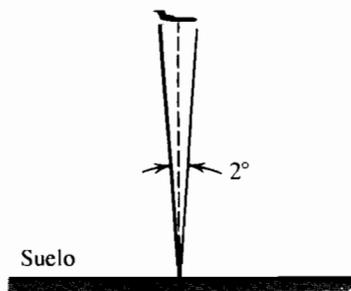


FIGURA 56

30. La aguja de un cuadrante solar mide 4 pulgadas. Si proyecta una sombra de 6 pulgadas, ¿cuál es el ángulo de elevación del Sol?

31. Un radar meteorológico es capaz de medir tanto el ángulo de elevación hasta el punto más alto de una tormenta como la distancia horizontal a la tormenta. Si su distancia horizontal a la tormenta es de 90 km y el ángulo de elevación es de 4° , ¿puede un avión de pasajeros, que es capaz de subir 10 km, volar sobre la tormenta?
32. Un techo de nubes es la altitud más baja a la cual podemos encontrar una nube sólida. El techo de nubes en los aeropuertos debe estar suficientemente alto para que los despegues y los aterrizajes sean seguros. Durante la noche, el techo de nubes puede ser determinado si iluminamos su base con un proyector que apunte verticalmente hacia arriba. Si un observador está a 1 km del proyector y el ángulo de elevación hasta la base de la nube iluminada es de 8° , encuentre el techo de nubes. (Véase figura 57). (Durante el día el techo de nubes se

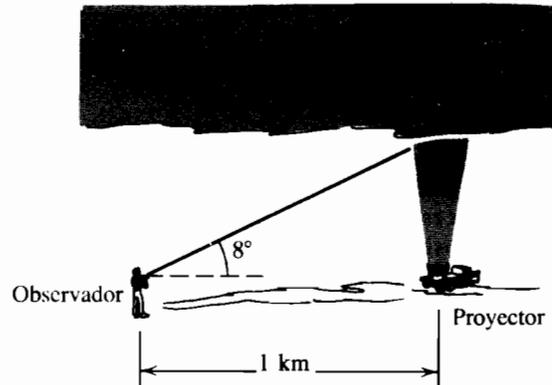


FIGURA 57

calcula generalmente mediante la simple observación. Sin embargo, si se requiere un cálculo exacto, se infla un globo de tal manera que se eleve a una razón constante determinada. Luego se suelta el globo y se cronometra hasta el momento en que éste desaparece dentro de la nube. El techo de nubes se determina multiplicando la razón por el tiempo de ascenso; no es necesario utilizar trigonometría para esta operación).

33. Asumiendo que la Tierra es una esfera, demuestre que:

$$C_\theta = C_e \cos \theta$$

donde C_θ es la circunferencia del paralelo de latitud θ y C_e es la circunferencia de la Tierra en el ecuador. (Véase figura 58). [Sugerencia: $R \cos \theta = r$].

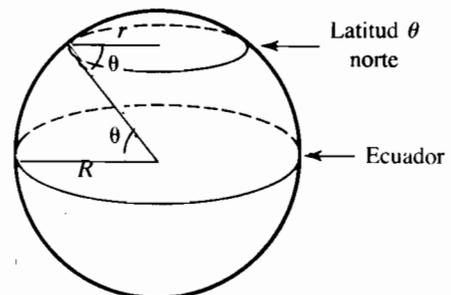


FIGURA 58

En los problemas 34 y 35, utilice el resultado del problema 33. (tome 6,400 km como el radio R de la Tierra).

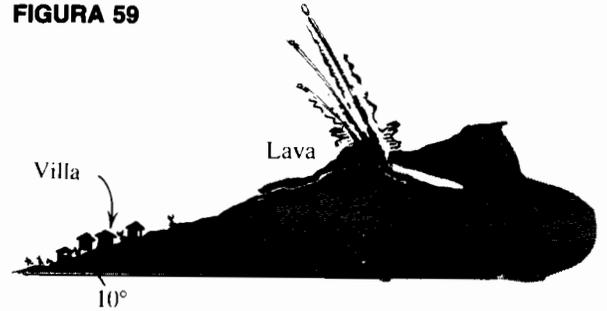
- 34. Encuentre la circunferencia del círculo ártico que se encuentra a $66^{\circ}33'N$ de latitud.
- 35. Encuentre la distancia "alrededor del mundo" a una latitud de $58^{\circ}40'N$.
- 36. Deduzca la fórmula $A = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \beta$ para el área del triángulo que se muestra en la figura 47.
- 37. La longitud final de la lava que fluye de un volcán parece disminuir a medida que la elevación del cráter donde ésta se origina aumenta. Un estudio empírico del monte Etna nos da la longitud final L del río de lava en términos de elevación h de donde se origina la lava, por la fórmula

$$L = 23 - 0.0053 h$$

donde L se mide en kilómetros y h se mide en metros.

Suponga que una villa siciliana situada a una altura de 750 m está sobre una pendiente con inclinación de 10° , directamente abajo de donde se origina la lava que tiene una altitud de 2,500 m. (Véase figura 59). De acuerdo con la fórmula, ¿qué tan cerca de la aldea alcanzaría a llegar la lava?

FIGURA 59



6.4 Funciones trigonométricas de ángulos generales

Hasta ahora hemos definido las funciones trigonométricas sólo para ángulos agudos. Sin embargo, muchas aplicaciones de la trigonometría incluyen ángulos que no son agudos. Como consecuencia, es necesario extender la definición de las seis funciones trigonométricas para los ángulos generales. Naturalmente, queremos extender la definición para estar de acuerdo con la definición anterior, cuando el ángulo sea agudo. Para lograr esto, procedemos como sigue.

Dejemos que θ sea un ángulo agudo en posición normal y escojamos un punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ , como lo muestra la figura 60. Si tomamos $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces $y = \text{op}$, $x = \text{ady}$ y $r = \text{hip}$, entonces tenemos que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{x}{r}, \quad \text{y} \quad \operatorname{tan} \theta = \frac{y}{x} \tag{4}$$

Las expresiones en (4) nos dan un modelo sobre el cual basamos nuestra definición extendida para cualquier ángulo θ en posición normal, tal como lo ilustra la figura 61.

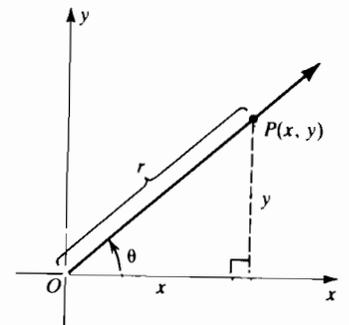


FIGURA 60

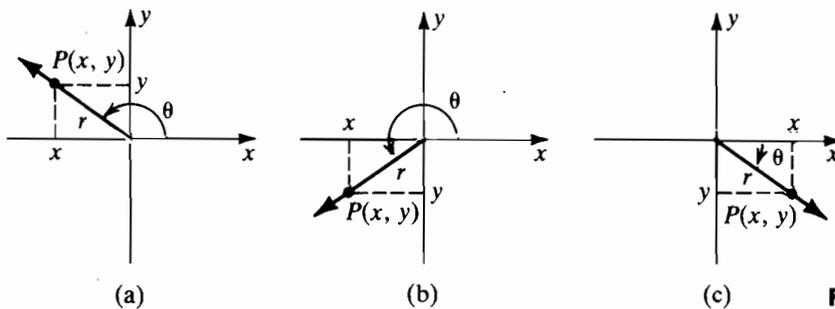


FIGURA 61

Ahora tenemos la siguiente definición de las **funciones trigonométricas de un ángulo general**.

DEFINICION 2

Sea θ un ángulo en posición normal, y sea $P(x, y)$ cualquier punto distinto de $(0, 0)$ en el lado terminal de θ . Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia entre $(0, 0)$ y (x, y) , entonces las seis funciones trigonométricas de θ se definen como:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r}, & \operatorname{csc} \theta &= \frac{r}{y}, \quad y \neq 0 \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{x}{r}, & \operatorname{sec} \theta &= \frac{r}{x}, \quad x \neq 0 \\ \operatorname{tan} \theta &= \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, & \operatorname{cot} \theta &= \frac{x}{y}, \quad y \neq 0 \end{aligned}$$

Se puede demostrar, utilizando triángulos semejantes, que los valores de las seis funciones trigonométricas dependen únicamente del ángulo θ y no del punto $P(x, y)$ que se escoja en el lado terminal de θ . (La justificación es como la que se hizo para los ángulos agudos en la página 281. Véase problema 65).

Las funciones trigonométricas serían indefinidas si los denominadores de sus fórmulas valieran cero. Como $P(x, y) \neq (0, 0)$ entonces $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nunca es cero. Entonces, los dominios de las funciones trigonométricas seno y coseno constan de todos los ángulos θ . Sin embargo, las funciones tangente y secante son indefinidas si el ángulo θ tiene su lado terminal sobre el eje y , porque entonces $x = 0$. Entonces, los dominios de $\operatorname{tan} \theta$ y $\operatorname{sec} \theta$ constan de todos los ángulos θ , *excepto* aquellos medidos en radianes $\pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, y así sucesivamente. Utilizando la notación conjuntista, podemos escribir los dominios de las funciones tangente y secante como $\{\theta \mid \theta \neq (2n+1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ o $\{\theta \mid \theta \neq (2n+1)90^\circ, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Las funciones cotangente y cosecante no se definen para ángulos con lados terminales en el eje x porque entonces $y = 0$. Así, los dominios de $\operatorname{cot} \theta$ y $\operatorname{csc} \theta$ comprenden todos los ángulos θ , *excepto* aquellos cuya medida en radianes es $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ y así sucesivamente; esto es: $\{\theta \mid \theta \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ o $\{\theta \mid \theta \neq 180^\circ n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se sigue que $|x| \leq r$ y $|y| \leq r$. Entonces,

$$|\operatorname{sen} \theta| \leq 1, \quad |\operatorname{cos} \theta| \leq 1, \quad |\operatorname{csc} \theta| \geq 1, \quad \text{y} \quad |\operatorname{sec} \theta| \geq 1$$

para todo ángulo θ en el dominio de cada una de las funciones.

EJEMPLO 1

Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ , si θ está en posición normal y el lado terminal de θ contiene el punto $P(-3, 1)$.

Solución. El lado terminal de θ está dibujado en la figura 62. Tenemos que $x = -3$ y $y = 1$, entonces:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

De ahí que:

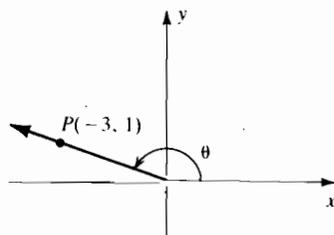


FIGURA 62

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, & \operatorname{csc} \theta &= \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10} \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, & \operatorname{sec} \theta &= \frac{\sqrt{10}}{-3} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \\ \operatorname{tan} \theta &= \frac{y}{x} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}, & \operatorname{cot} \theta &= \frac{-3}{1} = -3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de θ si $\theta = -\pi/2$.

Solución. Primero, colocamos θ en posición normal como lo muestra la figura 63. Según la definición, podemos escoger cualquier punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ . Por conveniencia, escogemos $P(0, -1)$, para que $x = 0, y = -1, y r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{-1}{1} = -1, & \operatorname{csc}\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{-1} = -1 \\ \operatorname{cos}\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{0}{1} = 0, & \operatorname{cot}\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, las expresiones $\operatorname{tan} \theta = y/x$ y $\operatorname{sec} \theta = r/x$, son indefinidas para $\theta = -\pi/2$ ya que $x = 0$.

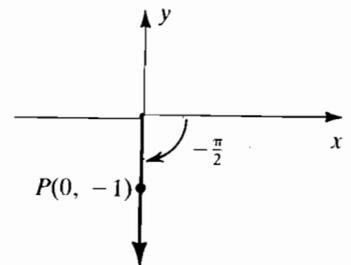


FIGURA 63

SIGNOS ALGEBRAICOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Dependiendo del cuadrante en que está el lado terminal de θ , una o ambas coordenadas de $P(x, y)$ pueden ser negativas. Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ siempre es positiva, cada una de las seis funciones trigonométricas de θ tiene valores tanto negativos como positivos. Por ejemplo, como lo muestra la figura 64, $\operatorname{sen} \theta = y/r$ es positivo, si el lado terminal de θ está en los cuadrantes I ó II (donde y es positivo) y, y es negativo si el lado terminal de θ está en los cuadrantes III ó IV (donde y es negativo).

La siguiente tabla resume los signos algebraicos de las seis funciones trigonométricas. Por conveniencia, si el lado terminal de θ está en el segundo cuadrante, nos referiremos a θ como un ángulo del cuadrante II o diremos que θ está en el cuadrante II. Usaremos una terminología similar cuando nos refiramos a ángulos con sus lados terminales en los cuadrantes I, III ó IV.

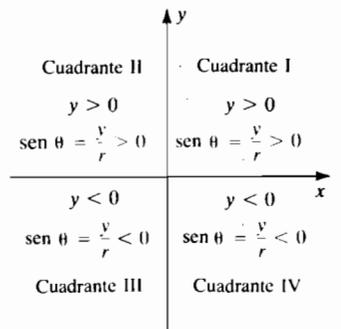


FIGURA 64

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

CUADRANTE EN EL QUE SE HALLA EL LADO TERMINAL DE θ	$\operatorname{sen} \theta$	$\operatorname{cos} \theta$	$\operatorname{tan} \theta$	$\operatorname{csc} \theta$	$\operatorname{sec} \theta$	$\operatorname{cot} \theta$
I ($0 < \theta < \pi/2$)	+	+	+	+	+	+
II ($\pi/2 < \theta < \pi$)	+	-	-	+	-	-
III ($\pi < \theta < 3\pi/2$)	-	-	+	-	-	+
IV ($3\pi/2 < \theta < 2\pi$)	-	+	-	-	+	-

EJEMPLO 3

¿En qué cuadrante se encuentra el lado terminal de θ si $\text{sen } \theta > 0$ y $\text{tan } \theta < 0$?

Solución. Como la función seno es positiva para ángulos en los cuadrantes I y II y la función tangente es negativa en los cuadrantes II y IV, el lado terminal de θ debe estar en el cuadrante II.

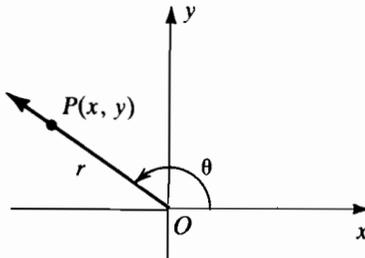


FIGURA 65

IDENTIDADES PITAGORICAS

Las identidades recíprocas y de cociente para los ángulos agudos que dimos en la sección 6.2 también se utilizan para los ángulos generales. (Véanse problemas 66 y 67). A nuestra colección de identidades fundamentales agregamos tres identidades muy útiles denominadas **identidades pitagóricas**. Para obtener la primera de éstas, sea θ cualquier ángulo en posición normal. Como lo muestra la figura 65, sea $P(x, y)$ cualquier punto distinto del origen en el lado terminal de θ . Sea $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces tenemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si dividimos ambos lados por r^2 podemos escribir

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1, \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

Reconociendo que $x/r = \cos \theta$ y $y/r = \text{sen } \theta$, obtenemos la identidad pitagórica básica:

$$(\cos \theta)^2 + (\text{sen } \theta)^2 = 1 \quad (5)$$

Es normal escribir $\cos^2 \theta$, en lugar de $(\cos \theta)^2$, y $\text{sen}^2 \theta$, en lugar de $(\text{sen } \theta)^2$. Una notación similar se utiliza para las otras funciones trigonométricas y para todas las potencias *excepto* -1 . (Como lo reafirmamos en la sección 6.2, $\text{sen}^{-1} \theta$, $\cos^{-1} \theta$, y así sucesivamente, se refieren a la función inversa de la correspondiente función trigonométrica, la cual analizaremos en el capítulo 7).

Con esta nueva notación, (5) se vuelve:

$$\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1 \quad (6)$$

Si dividimos ambos lados de esta ecuación por $\cos^2 \theta$ obtenemos,

$$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\text{o} \quad 1 + \left(\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2$$

Como $\text{tan } \theta = \text{sen } \theta / \cos \theta$ y $\text{sec } \theta = 1 / \cos \theta$, esto se simplifica a:

$$1 + \text{tan}^2 \theta = \text{sec}^2 \theta$$

La última identidad pitagórica es:

$$\cot^2 \theta + 1 = \text{csc}^2 \theta$$

Se obtiene al dividir ambos lados de (6) por $\text{sen}^2 \theta$. (Véase problema 68).

Para su conveniencia en la parte interior de la portada de este libro se encuentra un resumen de trigonometría básica, que incluye todas las identidades fundamentales.

EJEMPLO 4 _____

Dado que $\cos \theta = \frac{1}{3}$ y que θ es un ángulo en el cuadrante IV, encuentre los valores exactos de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ .

Solución. Sustituyendo $\cos \theta = \frac{1}{3}$ por $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ resulta que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \sin^2 \theta &= 1 \\ \sin^2 \theta &= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Como el lado terminal de θ está en el cuadrante IV, $\sin \theta$ es negativo. Por lo que *debemos* elegir la raíz cuadrada negativa de $\frac{8}{9}$:

$$\sin \theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}, & \cot \theta &= \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{1/3} = 3, & \csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{-2\sqrt{2}/3} \\ & & &= -\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 _____

Dado que $\tan \theta = -2$ y $\sin \theta > 0$, encuentre los valores exactos de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ .

Solución. Tomando $\tan \theta = -2$ en la identidad $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ encontramos que:

$$\sec^2 \theta = 1 + (-2)^2 = 5$$

Como $\tan \theta$ es negativa en los cuadrantes II y IV y $\sin \theta$ es positivo en los cuadrantes I y II, el lado terminal de θ debe estar en el cuadrante II. Entonces, debemos tomar:

$$\sec \theta = -\sqrt{5}$$

De $\sec \theta = 1/\cos \theta$, se deduce que:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Luego, usando $\theta = \sin \theta / \cos \theta$, obtenemos,

$$\sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(-2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Luego,

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{2\sqrt{5}/5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

y

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

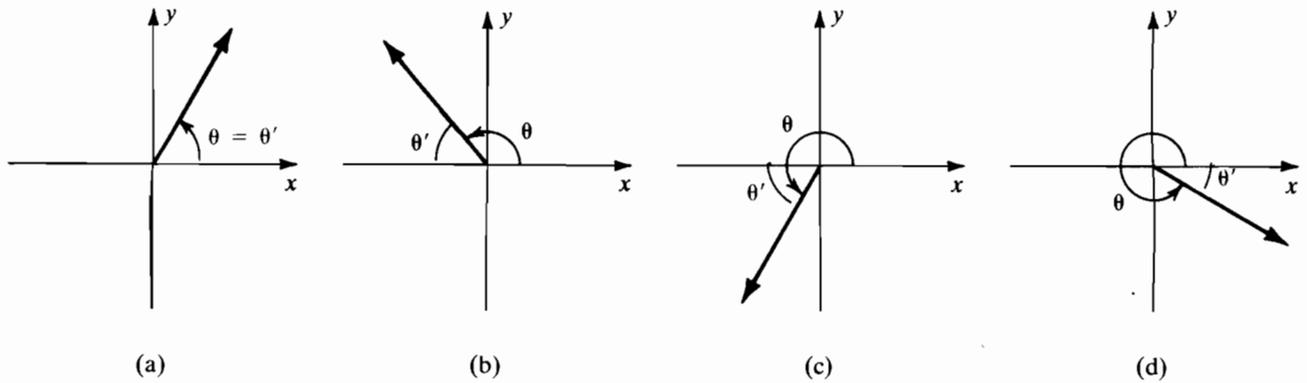


FIGURA 66

En la sección 6.2 encontramos valores exactos para las seis funciones trigonométricas de los ángulos especiales de 30° , 45° y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$, medidos en radianes).

Estos valores se pueden utilizar para determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos, no agudos, mediante el **ángulo de referencia**.

DEFINICION 3

Tomemos θ como un ángulo en posición normal de manera que su lado terminal no esté en un eje coordenado. El **ángulo de referencia** θ' para θ se define como el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x .

La figura 66 ilustra esta definición para ángulos con lados terminales en cada uno de los cuatro cuadrantes.

EJEMPLO 6

Encuentre el ángulo de referencia θ' para cada ángulo θ .

(a) $\theta = 40^\circ$ (b) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (c) $\theta = 210^\circ$ (d) $\theta = -\frac{9\pi}{4}$

Solución

(a) A partir de la figura 67(a) vemos que $\theta' = 40^\circ$

(b) A partir de la figura 67(b), $\theta' = \pi - \theta = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$

(c) A partir de la figura 67(c), $\theta' = \theta - 180^\circ = 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$

(d) Como $\theta = -9\pi/4$ es coterminal con:

$$-\frac{9\pi}{4} + 2\pi = -\frac{\pi}{4}$$

encontramos que $\theta' = \pi/4$ (véase figura 67(d)).

La utilidad de los ángulos de referencia al evaluar las funciones trigonométricas es resultado de la siguiente propiedad.



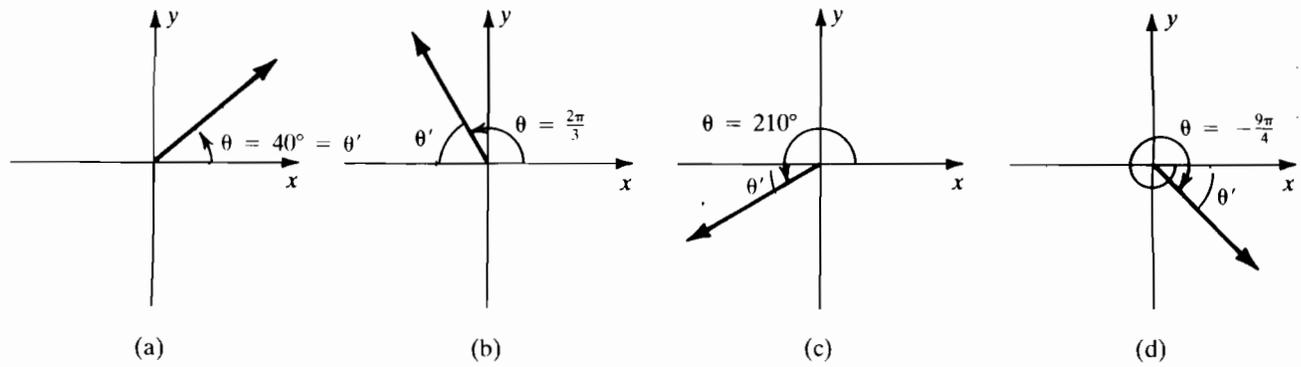


FIGURA 67

Por ejemplo,

$$|\text{sen } \theta| = \text{sen } \theta', \quad |\text{cos } \theta| = \text{cos } \theta'$$

y así sucesivamente.

Verificamos la propiedad para la función seno y dejamos los casos restantes como un ejercicio (véase problema 69). Si el lado terminal de θ está en el cuadrante I, entonces $\theta = \theta'$ y el seno θ es positivo, por tanto,

$$\text{sen } \theta' = \text{sen } \theta = |\text{sen } \theta|$$

De la figura 68, vemos que si θ es un ángulo de los cuadrantes II, III o IV entonces tenemos que:

$$\text{sen } \theta' = \frac{|y|}{r} = \left| \frac{y}{r} \right| = |\text{sen } \theta|$$

donde $P(x, y)$ es cualquier punto, en el lado terminal de θ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

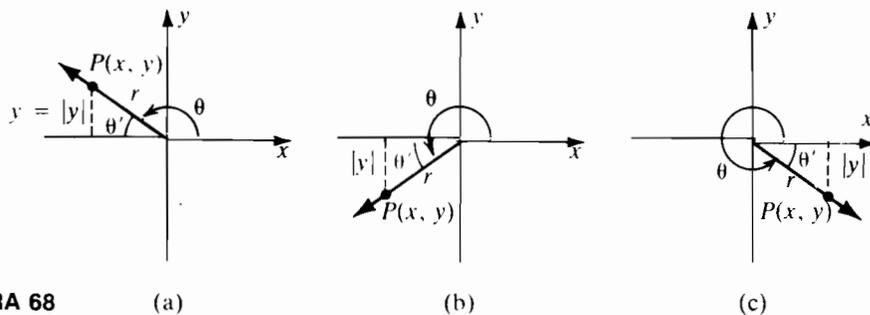
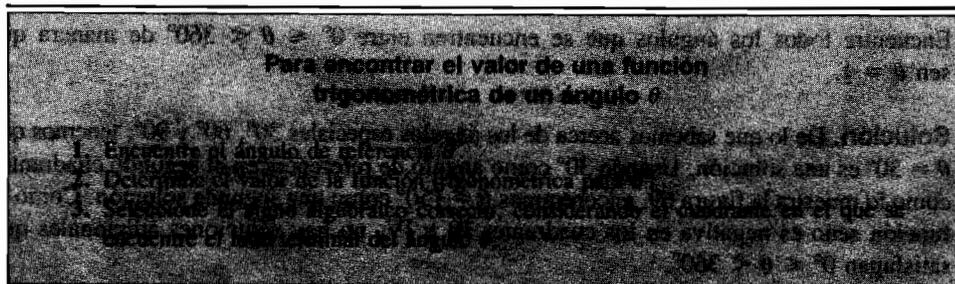


FIGURA 68

Ahora podemos describir un procedimiento paso a paso para determinar el valor de una función trigonométrica para cualquier ángulo θ .



EJEMPLO 7

Encuentre los valores exactos de $\sin \theta$, $\cos \theta$ y $\tan \theta$ para cada uno de los siguientes ángulos:

(a) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (b) $\theta = 210^\circ$ (c) $\theta = -\frac{9\pi}{4}$

Solución

(a) Seguimos el proceso analizado anteriormente.

1. En el ejemplo 6(b) hallamos que el ángulo de referencia para $\theta = 2\pi/3$ es $\theta' = \theta/3$.
2. De la sección 6.2 sabemos que $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$ y $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$.
3. Como $\theta = 2\pi/3$ es un ángulo del cuadrante II, donde el seno es positivo, pero el coseno y la tangente son negativos, tenemos que:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \text{y} \quad \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

(b) Refiriéndonos al ejemplo 6(c), vemos que el ángulo de referencia $\theta' = 30^\circ$. Usando la propiedad de los ángulos de referencia y el hecho de que el lado terminal de $\theta = 210^\circ$ está en el cuadrante III, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sin 210^\circ &= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \\ \cos 210^\circ &= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 210^\circ &= \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

(c) Del ejemplo 6(d) sabemos que el ángulo de referencia $\theta = \pi/4$. Como $\theta = -9\pi/4$ es un ángulo del cuadrante IV, encontramos que,

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= -\tan \frac{\pi}{4} = -1 \end{aligned}$$

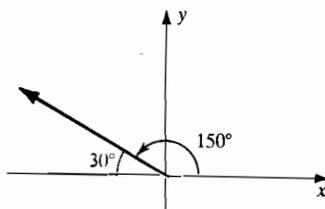
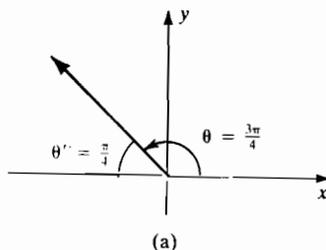


FIGURA 69

**EJEMPLO 8**

Encuentre todos los ángulos que se encuentren entre $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ de manera que $\sin \theta = \frac{1}{2}$.

Solución. De lo que sabemos acerca de los ángulos especiales 30° , 60° y 90° , tenemos que $\theta = 30^\circ$ es una solución. Usando 30° como ángulo de referencia en el segundo cuadrante, como lo muestra la figura 69, encontramos $\theta = 150^\circ$ como una segunda solución. Como la función seno es negativa en los cuadrantes III y IV, no hay soluciones adicionales que satisfagan $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

EJEMPLO 9

Encuentre todos los ángulos θ que satisfagan $0^\circ \leq \theta < 2\pi$, de manera que $\cos \theta = -\sqrt{2}/2$.

Solución. Como el valor dado de la función coseno es negativo, determinamos primero el ángulo de referencia θ' , de manera que $\cos \theta' = \sqrt{2}/2$. De la sección 6.2 sabemos que $\theta' = \pi/4$. Como la función coseno es negativa para los ángulos de los cuadrantes II y III, colocamos el ángulo de referencia $\theta' = \pi/4$, como lo muestra la figura 70. Después obtenemos $\theta = 3\pi/4$ y $\theta = 5\pi/4$ como soluciones.

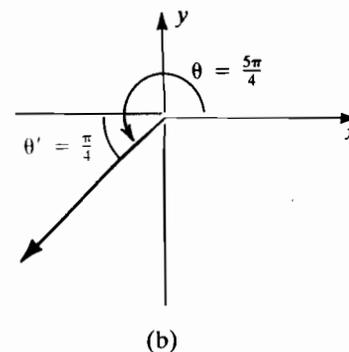


FIGURA 70

Nota de advertencia: en esta sección hemos evitado intencionalmente la utilización de calculadoras. Para un completo entendimiento de la trigonometría, es fundamental que usted domine los conceptos y sea capaz de resolver *sin calculadora* los cálculos y las simplificaciones que hemos visto. Los siguientes ejercicios deben ser resueltos sin tabla y sin calculadora.

EJERCICIO 6.4

(No utilice tablas ni calculadoras para resolver los siguientes problemas).

En los problemas 1 al 10, evalúe las 6 funciones trigonométricas del ángulo θ si θ está en posición normal y su lado terminal contiene el punto dado.

- 1. (6, 8) 2. (-1, 2) 3. (5, -12)
- 4. (-8, -15) 5. (0, 2) 6. (-3, 0)
- 7. (-2, 3) 8. (5, -1) 9. $(-\sqrt{2}, -1)$
- 10. $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$

En los problemas 11 al 18, encuentre el cuadrante en el que se encuentra el lado terminal de θ , si θ satisface las siguientes condiciones:

- 11. $\sin \theta < 0$ y $\tan \theta > 0$ 12. $\cos \theta > 0$ y $\sin \theta < 0$
- 13. $\tan \theta < 0$ y $\sec \theta < 0$ 14. $\sec \theta < 0$ y $\csc \theta < 0$
- 15. $\cot \theta > 0$ y $\sin \theta > 0$ 16. $\csc \theta > 0$ y $\cot \theta < 0$
- 17. $\sin \theta > 0$ y $\cos \theta < 0$ 18. $\tan \theta < 0$ y $\csc \theta > 0$

En los problemas 19 al 28, nos dan el valor de una de las funciones trigonométricas del ángulo θ . De este valor y la información adicional, determine los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ .

- 19. $\sin \theta = \frac{1}{4}$, θ está en el cuadrante II
- 20. $\cos \theta = -\frac{2}{5}$, θ está en el cuadrante III
- 21. $\tan \theta = 3$, θ está en el cuadrante III
- 22. $\cot \theta = 2$, θ está en el cuadrante III
- 23. $\csc \theta = -10$, θ está en el cuadrante IV
- 24. $\sec \theta = 3$, θ está en el cuadrante IV

- 25. $\sin \theta = -\frac{1}{5}$, $\cos \theta > 0$
- 26. $\cos \theta = -\frac{2}{3}$, $\sin \theta < 0$
- 27. $\tan \theta = 8$, $\sec \theta > 0$
- 28. $\sec \theta = -4$, $\csc \theta < 0$
- 29. Si $\cos \theta = \frac{3}{10}$, halle todos los posibles valores de $\sin \theta$.
- 30. Si $\sin \theta = -\frac{2}{7}$, halle todos los posibles valores de $\cos \theta$.
- 31. Si $2 \sin \theta - \cos \theta = 0$, halle todos los posibles valores de $\sin \theta$ y $\cos \theta$.
- 32. Si $\cot \theta = \frac{3}{4}$, halle todos los posibles valores de $\csc \theta$.
- 33. Si $\sec \theta = -5$, halle todos los posibles valores de $\sin \theta$ y $\cos \theta$.
- 34. Si $3 \cos \theta = \sin \theta$, halle todos los posibles valores de $\tan \theta$, $\cot \theta$, $\sec \theta$ y $\csc \theta$.
- 35. Complete la siguiente tabla:

θ (grados)	θ radianes	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—

(continúa)

θ (grados)	θ radianes	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	$\text{tan } \theta$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$			
150°	$\frac{5\pi}{6}$			
180°	π			
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$			
240°	$\frac{4\pi}{3}$			
270°	$\frac{3\pi}{2}$			
300°	$\frac{5\pi}{3}$			
315°	$\frac{7\pi}{4}$			
330°	$\frac{11\pi}{6}$			
360°	2π			

36. Complete la siguiente tabla:

θ (grados)	θ radianes	$\text{csc } \theta$	$\text{sec } \theta$	$\text{cot } \theta$
0°	0	—	1	—
30°	$\frac{\pi}{6}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	—	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$			
135°	$\frac{3\pi}{4}$			
150°	$\frac{5\pi}{6}$			
180°	π			
210°	$\frac{7\pi}{6}$			
225°	$\frac{5\pi}{4}$			
240°	$\frac{4\pi}{3}$			
270°	$\frac{3\pi}{2}$			

(continúa)

θ (grados)	θ radianes	$\text{csc } \theta$	$\text{sec } \theta$	$\text{cot } \theta$
300°	$\frac{5\pi}{3}$			
315°	$\frac{7\pi}{4}$			
330°	$\frac{11\pi}{6}$			
360°	2π			

En los problemas 37 al 52, encuentre el valor exacto de la expresión.

37. $\cos 5\pi$ 38. $\text{sen} \left(-\frac{7\pi}{6} \right)$
39. $\cot \frac{13\pi}{6}$ 40. $\tan \frac{9\pi}{2}$
41. $\text{sen} \left(-\frac{4\pi}{3} \right)$ 42. $\cos \frac{23\pi}{4}$
43. $\text{csc} \left(-\frac{\pi}{6} \right)$ 44. $\tan \frac{23\pi}{4}$
45. $\text{sec} (-120^\circ)$ 46. $\text{csc } 495^\circ$
47. $\text{sen } 150^\circ$ 48. $\cos (-45^\circ)$
49. $\tan 405^\circ$ 50. $\text{sen } 315^\circ$
51. $\cot (-720^\circ)$ 52. $\text{sec} (-300^\circ)$

En los problemas 53 al 58, encuentre todos los ángulos θ , que satisfagan la condición dada donde $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

53. $\tan \theta = \sqrt{3}$ 54. $\text{sen } \theta = -\frac{1}{2}$
55. $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 56. $\text{sec } \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
57. $\text{csc } \theta = -1$ 58. $\text{cot } \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

En los problemas 59 al 64, encuentre todos los ángulos θ , donde $0 \leq \theta < 2\pi$, satisfaga la condición dada.

59. $\text{sen } \theta = 0$ 60. $\cos \theta = -1$
61. $\text{sec } \theta = -\sqrt{2}$ 62. $\text{csc } \theta = 2$
63. $\text{cot } \theta = -\sqrt{3}$ 64. $\tan \theta = 1$
65. Usando triángulos semejantes demuestre que los valores de las 6 funciones trigonométricas de un ángulo general definido en la página 300, dependen sólo del ángulo θ del punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ .
66. Si θ es cualquier ángulo para el cual las funciones están definidas, pruebe que:

$$\text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}, \text{ sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta}, \text{ y } \text{cot } \theta = \frac{1}{\text{tan } \theta}$$

67. Si θ es un ángulo para el cual las funciones están definidas, pruebe que:

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \text{ y } \text{cot } \theta = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

68. Si θ es cualquier ángulo para el cual las funciones están definidas, pruebe que:

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

69. Verifique la propiedad del ángulo de referencia para las funciones coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente.
 70. Sea l una recta no vertical que pasa por el origen y forma un ángulo θ , medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde el lado positivo del eje x (véase la figura 71). Pruebe que la pendiente de l es igual a $\tan \theta$.

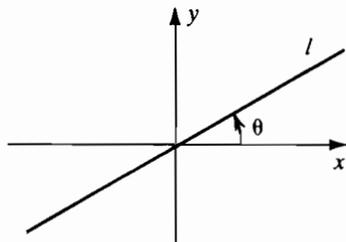


FIGURA 71

71. ¿Existe un ángulo θ , de manera que $\cos \theta = 4/3$? Explique.
 72. ¿Existe un ángulo θ de manera que $2 \csc \theta = 1$? Explique.
 73. La ayuda dada en el problema 56 del ejercicio 6.2 puede extenderse para que incluya ángulos de 0° (0 radianes) y 90° ($\pi/2$ radianes). Verifique la siguiente tabla:

θ grados	θ radianes	sen θ	cos θ
0°	0	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

74. Por su rotación, la Tierra es achatada en los polos y abultada en el ecuador. Como resultado, la aceleración debida a la gravedad varía con la latitud θ . Estudios de satélite han demostra-

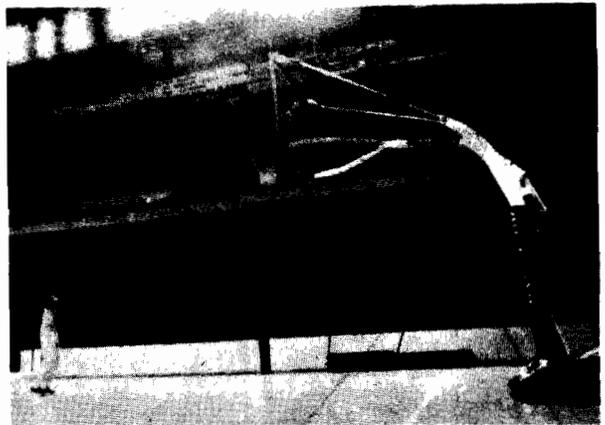
do que la aceleración debida a la gravedad g_{sat} es aproximada por la función

$$g_{\text{sat}} = 978.0309 + 5.18552 \text{ sen}^2 \theta - 0.00570 \text{ sen}^2 2\theta$$

- (a) Encuentre g_{sat} en el ecuador ($\theta = 0^\circ$), b) en el polo norte, y c) a 45° de latitud norte.
 75. En ciertas condiciones, la altura máxima alcanzada por una pelota de baloncesto que se lanza desde una altura h en un ángulo α , medido desde la horizontal, con una velocidad inicial v está dada por:

$$y = h + \frac{v^2 \text{ sen}^2 \alpha}{2g}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Calcule la máxima altura alcanzada por un tiro libre si $h = 2.15$ m, $v = 8$ m/s, $\alpha = 64^\circ 28'$, y $g = 9.81$ m/s².



76. El alcance de un lanzamiento desde una altura h , por encima del piso, con una velocidad inicial v , en un ángulo α con la horizontal puede ser aproximadamente:

$$R = \frac{v \cos^2 \alpha}{g} [v \text{ sen } \alpha + \sqrt{v^2 \text{ sen}^2 \alpha + 2gh}]$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Compare los alcances logrados para las alturas desde donde se hicieron los lanzamientos (a) $h = 2.0$ m y (b) $h = 2.4$ m si $v = 13.7$ m/s y $\alpha = 40^\circ$. Tome $g = 9.81$ m/s². (c) Explique por qué un incremento en h produce un incremento en R , si los otros parámetros se mantienen fijos. (d) ¿Qué implicaciones tiene esto sobre las ventajas que pueda tener un jugador alto?

6.5 Ley del seno

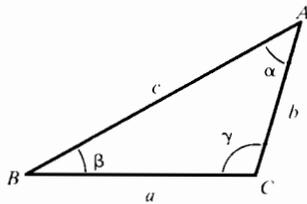


FIGURA 72

En la sección 6.3 vimos cómo se resuelven los triángulos rectángulos. En esta sección y en la próxima consideraremos las técnicas para resolver triángulos generales.

Considere el triángulo ABC que se muestra en la figura 72, con ángulos α , β y γ y con lados opuestos a , b y c , respectivamente. Si conocemos la longitud de un lado y otras dos partes del triángulo, podemos encontrar las tres partes restantes. Esto se puede lograr, o bien usando la **ley del seno**:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c} \quad (7)$$

o aplicando la ley del coseno, que se desarrollará en la sección 6.6.

A pesar de que la ley del seno es válida para cualquier triángulo, la obtendremos solamente de triángulos acutángulos* y dejaremos los casos de triángulos obtusángulos como ejercicio (véase problema 37).

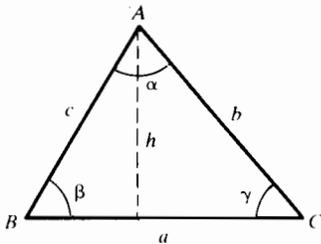


FIGURA 73

Como lo muestra la figura 73, sea h la altura desde el vértice A hasta el lado BC . Se sigue que:

$$\frac{h}{c} = \text{sen } \beta$$

o

$$h = c \text{ sen } \beta \quad (8)$$

Similarmente,

$$\frac{h}{b} = \text{sen } \gamma$$

o

$$h = b \text{ sen } \gamma \quad (9)$$

Igualando las expresiones (8) y (9) tenemos que:

$$c \text{ sen } \beta = b \text{ sen } \gamma$$

de manera que

$$\frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c} \quad (10)$$

De manera similar podemos probar que:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} \quad (11)$$

(véase problema 36). Combinando (10) y (11) obtenemos que:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

* Un triángulo acutángulo es un triángulo cuyos tres ángulos miden menos de 90° .

USO DE LA CALCULADORA

A partir de este momento usaremos una calculadora científica para hallar aproximaciones de los valores de las funciones trigonométricas. Como lo mencionamos en la sección 5.2, para asegurar la exactitud de nuestros resultados, todos los dígitos serán retenidos en la calculadora para cálculos posteriores, pero por conveniencia sólo cuatro cifras decimales serán mostradas en este texto de aquí en adelante. También redondearemos los resultados finales a la centésima más cercana, a menos que el problema especifique otra cosa.

EJEMPLO 1 _____

Determine las partes restantes del triángulo que se muestra en la figura 74.

Solución. Sean $\beta = 20^\circ$, $\alpha = 130^\circ$, y $b = 6$. Inmediatamente se sigue que

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ - 20^\circ - 130^\circ \\ &= 30^\circ\end{aligned}$$

A partir de la ley del seno, podemos ver que:

$$\frac{\text{sen } 130^\circ}{a} = \frac{\text{sen } 20^\circ}{6} = \frac{\text{sen } 30^\circ}{c}$$

Resolviendo para a desde

$$\frac{\text{sen } 130^\circ}{a} = \frac{\text{sen } 20^\circ}{6}$$

obtenemos que:

$$a = 6 \left(\frac{\text{sen } 130^\circ}{\text{sen } 20^\circ} \right) \approx 6 \left(\frac{0.7660}{0.3420} \right) \approx 13.44$$

Resolviendo para c , usamos:

$$\frac{\text{sen } 20^\circ}{6} = \frac{\text{sen } 30^\circ}{c}$$

de manera que

$$c = 6 \left(\frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 20^\circ} \right) \approx 6 \left(\frac{0.5000}{0.3420} \right) \approx 8.77$$

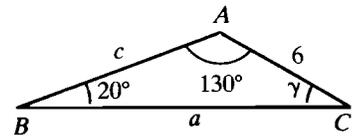


FIGURA 74

Nota de advertencia: los resultados son generalmente más exactos si los valores dados son utilizados en lugar de los calculados, para calcular valores desconocidos. Así, en el ejemplo 1 utilizamos $(\text{sen } 20^\circ)/6 = (\text{sen } 30^\circ)/c$ para calcular c en lugar de $(\text{sen } 130^\circ)/a = (\text{sen } 30^\circ)/c$ y el valor calculado $a = 13.44$.

RESOLUCION DE TRIANGULOS: CUATRO CASOS

En general, podemos usar la ley del seno para resolver triángulos para los cuales sabemos: (i) dos ángulos y cualquiera de los lados, (ii) dos lados y un ángulo opuesto a alguno de estos lados. Aquellos triángulos para los cuales sabemos (iii) tres lados, o (iv) dos lados y el ángulo comprendido no pueden ser resueltos directamente aplicando la ley del seno. En la siguiente sección consideraremos un método para resolver los últimos dos casos.

En el ejemplo 1, donde se nos dieron dos ángulos y un lado (caso (i)), el triángulo tenía sólo una solución. Sin embargo, esto puede no ser cierto en todos los casos, como el (ii), donde conocemos dos lados y un ángulo opuesto a alguno de estos lados. Por ejemplo, supongamos que los lados b y c y el ángulo β del triángulo ABC se nos especifican. Como lo muestra la figura 75, dibujamos el ángulo β y el lado c para localizar los vértices A y B . El tercer vértice C se localiza en la base dibujando el arco de un círculo de radio b con centro A . Como lo ilustra la figura 76, hay cuatro resultados posibles para esta construcción:

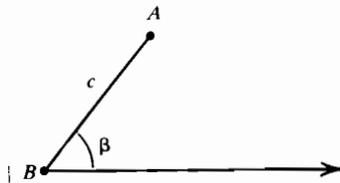


FIGURA 75

- (a) El arco no interseca la base y no se forma ningún triángulo.
- (b) El arco interseca la base en dos puntos distintos C_1 y C_2 y se forman dos triángulos.
- (c) El arco interseca la base en un punto y se forma un triángulo.
- (d) El arco es tangente a la base, y se forma un triángulo *rectángulo*.

Al existir esta variedad de posibilidades, el caso (ii) se denomina **caso ambiguo**. Los siguientes tres ejemplos ilustran resultados de dos soluciones, una solución, y de no solución para resultados de casos ambiguos.

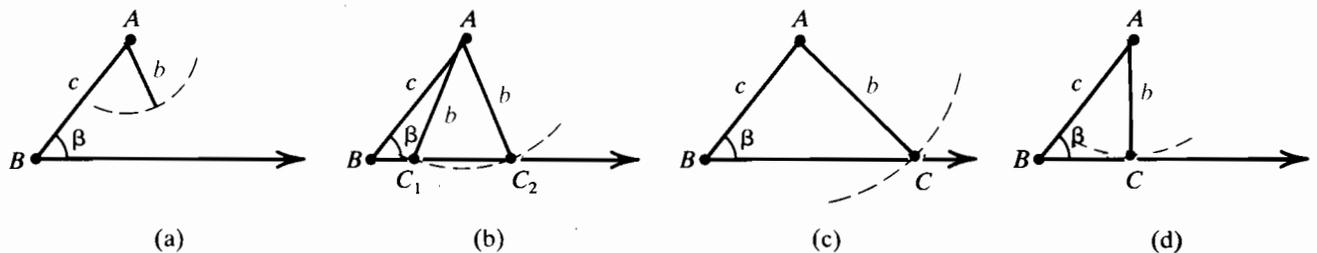


FIGURA 76

EJEMPLO 2 _____

Encuentre las partes restantes de un triángulo con $\beta = 50^\circ$, $b = 5$ y $c = 6$.

Solución. A partir de la ley del seno tenemos que:

$$\frac{\text{sen } 50^\circ}{5} = \frac{\text{sen } \gamma}{6}$$

$$\text{o} \quad \text{sen } \gamma = 6 \left(\frac{\text{sen } 50^\circ}{5} \right) \approx 6 \left(\frac{0.7660}{5} \right) \approx 0.9193$$

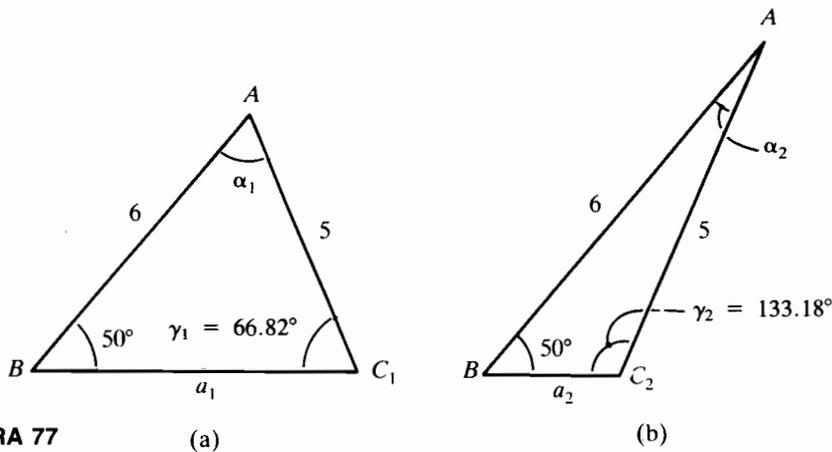
De una calculadora adaptada al modo de grados, obtenemos $\gamma \approx 66.82^\circ$. En este punto de la solución es esencial recordar de la sección 6.4 que la función seno es positiva también para los ángulos del cuadrante II. Hay otro ángulo que satisface $0^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$ para el cual $\text{sen } \gamma \approx 0.9193$. Utilizando 66.82° como ángulo de referencia, encontramos el ángulo en el cuadrante II:

$$180^\circ - 66.82^\circ = 113.18^\circ$$

Como consecuencia, las dos posibilidades para γ son:

$$\gamma_1 \approx 66.82^\circ \quad \text{y} \quad \gamma_2 \approx 113.18^\circ$$

Entonces, como lo muestra la figura 77, hay dos triángulos posibles: ABC_1 y ABC_2 , que satisfacen las condiciones dadas.



Para completar la solución del triángulo ABC_1 que se muestra en la figura 77(a), primero encontramos α_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 180^\circ - \gamma_1 - \beta \\ &\approx 180^\circ - 66.82^\circ - 50^\circ = 63.18^\circ \end{aligned}$$

Para encontrar a_1 , utilizamos

$$\frac{\text{sen } 63.18^\circ}{a_1} = \frac{\text{sen } 50^\circ}{5}$$

lo cual nos da

$$a_1 = 5 \left(\frac{\text{sen } 63.18^\circ}{\text{sen } 50^\circ} \right) \approx 5 \left(\frac{0.8925^\circ}{0.7660} \right) \approx 5.83$$

Completamos la solución para el triángulo ABC_2 que se muestra en la figura 77(b) de manera similar. Como $\gamma_2 \approx 113.18^\circ$,

$$\alpha_2 \approx 180^\circ - 113.18^\circ - 50^\circ = 16.82^\circ$$

Encontramos a_2 a partir de la ley del seno:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } 16.82^\circ}{a_2} &= \frac{\text{sen } 50^\circ}{5} \\ a_2 &= 5 \left(\frac{\text{sen } 16.82^\circ}{\text{sen } 50^\circ} \right) \approx 5 \left(\frac{0.2894}{0.7660} \right) \approx 1.89 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3

Determine las partes restantes del triángulo de la figura 78.

Solución. Sea $\beta = 80^\circ$, $b = 4$ y $c = 3$. A partir de la ley del seno, se sigue que,

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } 80^\circ}{4} = \frac{\text{sen } \gamma}{3} \tag{12}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } 80^\circ}{4} &= \frac{\text{sen } \gamma}{3} \\ \text{sen } \gamma &\approx \frac{3}{4}(0.9848) = 0.7386 \end{aligned}$$

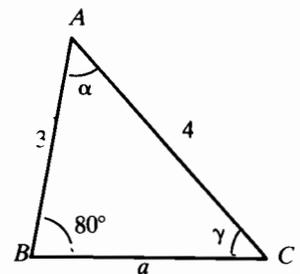


FIGURA 78

Hay dos ángulos posibles entre 0° y 180° que satisfacen $\text{sen } \gamma \approx 0.7386$. A partir de una calculadora adaptada al modo de grados, obtenemos el ángulo $\gamma \approx 47.61^\circ$. Usando 47.61° como ángulo de referencia en el segundo cuadrante, encontramos otra posibilidad que sería $180^\circ - 47.61^\circ = 132.39^\circ$. Sin embargo, el valor $\gamma = 132.39^\circ$ debe ser rechazado, ya que el triángulo dado contiene el ángulo $\beta = 80^\circ$ y, en consecuencia, la suma de los ángulos pasaría de 180° .

Ahora encontramos el ángulo α :

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - \gamma - \beta \\ &\approx 180^\circ - 47.61^\circ - 80^\circ \\ &\approx 52.39^\circ \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en (12) tenemos:

$$\frac{\text{sen } 52.39^\circ}{a} = \frac{\text{sen } 80^\circ}{4}$$

$$o \quad a = 4 \left(\frac{\text{sen } 52.39^\circ}{\text{sen } 80^\circ} \right) \approx 4 \left(\frac{0.7922}{0.9848} \right) \approx 3.22$$

EJEMPLO 4

Encuentre las partes restantes del triángulo con $\gamma = 40^\circ$, $b = 9$ y $c = 5$.

Solución. A partir de la ley del seno, tenemos que:

$$\frac{\text{sen } \beta}{9} = \frac{\text{sen } 40^\circ}{5}$$

$$o \quad \text{sen } \beta = 9 \left(\frac{\text{sen } 40^\circ}{5} \right) \approx 9 \left(\frac{0.6428}{5} \right) \approx 1.1570$$

Sin embargo, sabemos que el seno de cualquier ángulo debe estar entre -1 y 1 . Entonces, $\text{sen } \beta = 1.1570$ es imposible y, por tanto, este triángulo no tiene solución. Como lo muestra la figura 79, no hay solución porque el lado c no es lo suficientemente largo para alcanzar al lado a .

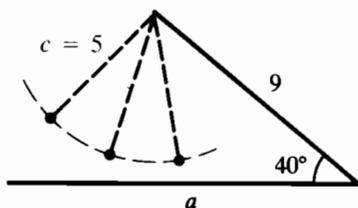


FIGURA 79

De los cuatro casos para resolver los triángulos que describimos en la página 311, sólo el caso ambiguo (ii) puede tener más de una solución y sólo los casos (ii) y (iii) pueden no tener solución. Para analizar mejor esto, véanse problemas 38 al 43.

EJEMPLO 5

Un edificio está situado en el lado de una colina con una pendiente de 15° de inclinación. El Sol está sobre el edificio con un ángulo de elevación de 42° . Encuentre la altura del edificio si éste proyecta una sombra de 36 pies de largo.

Solución. Sea h la altura del edificio que está sobre la pendiente y construya el triángulo rectángulo QPS como lo muestra la figura 80. Ahora

$$\alpha + 15^\circ = 42^\circ$$

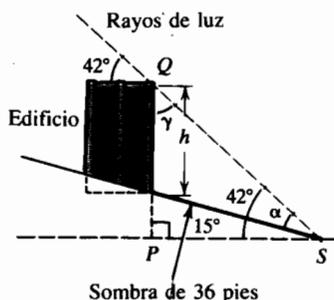


FIGURA 80

entonces, tenemos:

$$\alpha = 42^\circ - 15^\circ = 27^\circ$$

Como $\triangle QPS$ es un triángulo rectángulo,

$$\gamma = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$$

A partir de la ley del seno, se sigue que:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{h} = \frac{\text{sen } \gamma}{36}$$

entonces
$$h = 36 \left(\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} \right) = 36 \left(\frac{\text{sen } 27^\circ}{\text{sen } 48^\circ} \right) \approx 36 \left(\frac{0.4540}{0.7431} \right) \approx 21.99 \text{ pies}$$

EJERCICIO 6.5

En los problemas 1 al 26, resuelva el triángulo indicado. Las posiciones relativas de α , β , γ , a , b , y c se muestran en la figura 81.

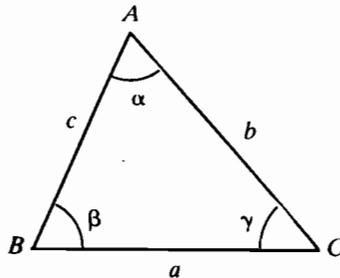


FIGURA 81

- | | |
|---|---|
| 1. $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 20^\circ$, $b = 7$ | 2. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $c = 30$ |
| 3. $\beta = 37^\circ$, $\gamma = 51^\circ$, $a = 5$ | 4. $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 75^\circ$, $a = 6$ |
| 5. $\beta = 72^\circ$, $b = 12$, $c = 6$ | 6. $\alpha = 120^\circ$, $a = 9$, $c = 4$ |
| 7. $\gamma = 62^\circ$, $b = 7$, $c = 4$ | 8. $\beta = 110^\circ$, $\gamma = 25^\circ$, $a = 14$ |
| 9. $\gamma = 15^\circ$, $a = 8$, $c = 5$ | 10. $\alpha = 55^\circ$, $a = 20$, $c = 18$ |
| 11. $\gamma = 150^\circ$, $b = 7$, $c = 5$ | 12. $\alpha = 140^\circ$, $\gamma = 20^\circ$, $c = 12$ |
| 13. $\beta = 13^\circ 20'$, $\gamma = 102^\circ$, $b = 9$ | |
| 14. $\alpha = 135^\circ$, $a = 4$, $b = 5$ | |
| 15. $\alpha = 20^\circ$, $a = 8$, $c = 27$ | |
| 16. $\beta = 47^\circ 10'$, $b = 20$, $c = 25$ | |
| 17. $\beta = 30^\circ$, $a = 10$, $b = 7$ | 18. $\alpha = 75^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $b = 8$ |
| 19. $\gamma = 80^\circ$, $b = 4$, $c = 8$ | 20. $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 62^\circ$, $c = 7$ |
| 21. $\beta = 100^\circ$, $a = 9$, $b = 20$ | 22. $\alpha = 35^\circ$, $a = 9$, $b = 12$ |
| 23. $\beta = 115^\circ$, $b = 11$, $c = 15$ | 24. $\alpha = 50^\circ$, $a = 10$, $b = 15$ |
| 25. $\gamma = 95^\circ$, $a = 20$, $c = 35$ | 26. $\gamma = 27.3^\circ$, $b = 3$, $c = 2$ |

27. Un lazo de 10 pies no es lo suficientemente largo para medir la longitud que hay entre dos puntos A y B situados en los extremos de una piscina en forma de riñón. Un tercer punto C se halla situado de tal manera que la distancia entre A y C es de 10 pies. Se ha determinado que el ángulo ACB es de 115° y que el

ángulo ABC es de 35° . Encuentre la distancia entre A y B . Véase figura 82.

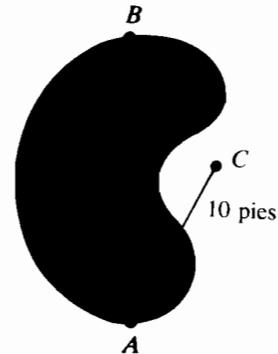


FIGURA 82

28. Dos puntos A y B están cada uno en los lados opuestos de un río. Otro punto C se localiza en el mismo lado que B a una distancia de 230 pies de B . Si el ángulo ABC es de 105° , y el ángulo ACB es de 20° , encuentre la distancia a lo largo del río entre A y B .
29. Un poste telefónico forma un ángulo de 82° con el piso. El ángulo de elevación del Sol es de 76° (véase figura 83). Encuentre la longitud del poste del teléfono si su sombra es de 3.5 m. (Suponga que los bombillos del poste están alejados del Sol y en el mismo plano del poste y del Sol).
30. Suponga que un topógrafo quiere encontrar la distancia en línea recta entre dos puntos A y B , situados a la misma altura, en lados opuestos de una montaña. El ángulo de elevación de A sobre la cima de la montaña es de $55^\circ 10'$ y la distancia es de 560 m. (Hay instrumentos que pueden medir esta distancia colocándolos en la cima de la montaña). Si el ángulo de elevación de B sobre la cima de la montaña es de 48° , encuentre la distancia entre A y B , asumiendo que están sobre el mismo plano vertical que la cima de la montaña.



FIGURA 83

31. La distancia entre la meta y un hoyo particular de golf es de 370 yardas. Una golfista le pega a la pelota y la coloca a una distancia de 210 yardas. Desde el punto donde está la pelota, ella mide un ángulo de 160° entre la meta y el hoyo (véase figura 84). Encuentre el ángulo de su lanzamiento.

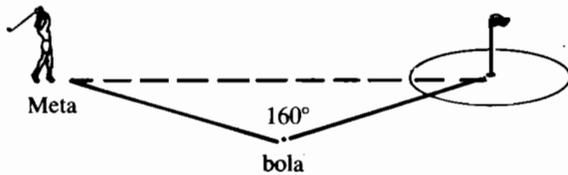


FIGURA 84

32. En el problema 31, ¿cuál es la distancia entre la bola y el hoyo?
 33. Un hombre de 5 pies, 9 pulgadas de altura se para en un andén que se inclina hacia abajo en un ángulo constante. Un poste vertical de luz situado directamente detrás de él proyecta una sombra de 15 pies de largo. El ángulo de depresión desde la mayor altura del hombre hasta la punta de su sombra es de 31° . Encuentre el ángulo α como lo muestra en la figura 85, formado por el andén y la horizontal.

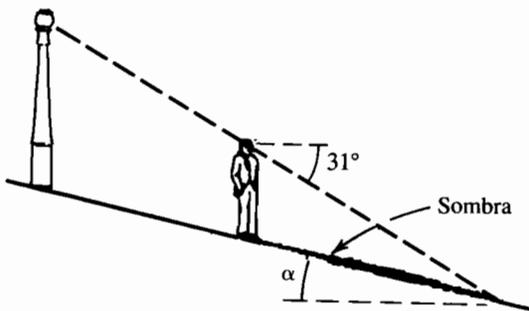


FIGURA 85

34. Si el hombre del problema 33 está a 20 pies del poste de luz, sobre el andén, encuentre la altura del poste.

35. Los ángulos de elevación de un aeroplano se miden desde lo más alto y desde la base de un edificio que mide 20 m de alto. El ángulo de la cima del edificio es de 38° , y el ángulo desde la base del edificio es de 40° . Encuentre la altitud del aeroplano.
 36. Deduzca la ecuación (11) a partir de la figura 86.

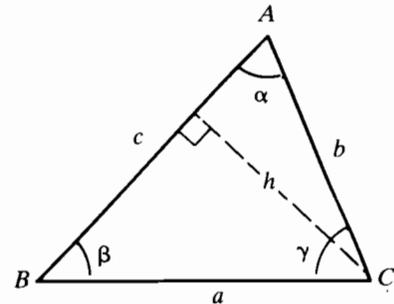


FIGURA 86

37. Derive la ley del seno para un triángulo con un ángulo obtuso como lo muestra la figura 87.

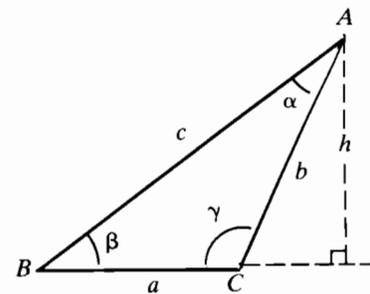


FIGURA 87

Los problemas 38 al 43 se refieren a los cuatro casos descritos en la página 311.

38. Explique por qué sólo un triángulo es determinado, si la suma de los dos ángulos en el caso (i) es menor que 180° .
 39. Formule una condición necesaria y suficiente según la cual el caso (iii) determine un triángulo.
 40. Explique por qué el caso (iv) siempre determinará sólo un triángulo con un ángulo comprendido menor que 180° .
 41. Sea $\beta = 45^\circ$ y $c = 5$, como lo muestra la figura 88. Encuentre todos los valores de b para los cuales:
 (a) el triángulo es un triángulo rectángulo;
 (b) el triángulo no tiene solución;
 (c) el triángulo tiene dos soluciones distintas;
 (d) el triángulo tiene sólo una solución.

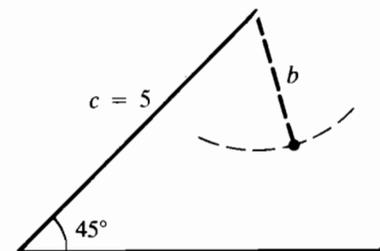


FIGURA 88

42. Sea $0^\circ < \beta < 90^\circ$ y suponga que c se conoce (véase figura 89). Encuentre todos los valores de b para los cuales:
- (a) el triángulo es un triángulo rectángulo;
 - (b) el triángulo no tiene solución;
 - (c) el triángulo tiene dos soluciones distintas;
 - (d) el triángulo tiene sólo una solución.

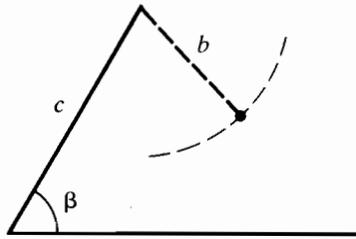


FIGURA 89

43. Sea $90^\circ < \beta < 180^\circ$ y suponga que c se conoce (véase figura 90). Encuentre todos los valores de b para los cuales:
- (a) el triángulo no tiene solución;
 - (b) el triángulo tiene sólo una solución.

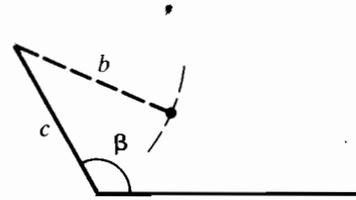


FIGURA 90

44. Encuentre el perímetro de un pentágono regular inscrito dentro de una circunferencia de radio a .

6.6 Ley del coseno

En un triángulo rectángulo, como el que se muestra en la figura 91, las longitudes de los lados están relacionadas por el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

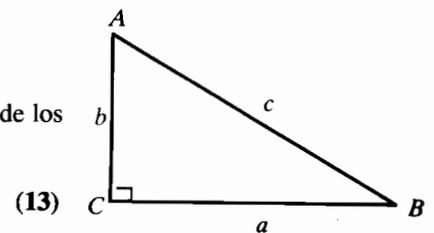


FIGURA 91

Esta ecuación es un caso especial de una fórmula general que relaciona las longitudes de los lados de *cualquier* triángulo. Esta generalización, llamada **ley del coseno**, nos permite resolver triángulos de los cuales conocemos o bien tres lados, o dos lados y el ángulo comprendido.

UNA GENERALIZACION DEL TEOREMA DE PITAGORAS

Suponga que el triángulo de la figura 92(a) representa un triángulo cualquiera que no es necesariamente rectángulo. Si introducimos un sistema de coordenadas cartesianas con origen y eje x , como lo muestra la figura 92(b), entonces las coordenadas de los vértices A , B y C son como aparecen. Ahora, mediante la fórmula de la distancia, la longitud del lado opuesto al ángulo γ es:

$$c = \sqrt{(b \cos \gamma - a)^2 + (b \sin \gamma)^2}$$

Así,

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 \cos^2 \gamma - 2ab \cos \gamma + a^2 + b^2 \sin^2 \gamma \\ &= a^2 + b^2 \underbrace{(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma)}_1 - 2ab \cos \gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \tag{14}$$

Note que la ecuación (14) se convierte en (13) cuando el ángulo γ es de 90° .

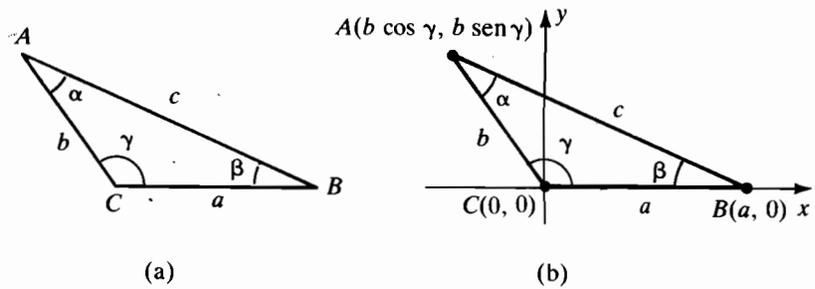


FIGURA 92

Como poner el origen en el vértice C del ángulo γ , no tiene nada de especial, podemos usar el argumento anterior dos veces más. Por ejemplo, si hubiéramos escogido el origen en el vértice A , y puesto el eje x a lo largo del lado AC (véase figura 93), habría pasado exactamente lo mismo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \tag{15}$$

Mediante un argumento similar, podemos expresar b en términos de a , c y $\cos \beta$. En general, para cualquier triángulo por el estilo del que se muestra en la figura 92(a), tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \tag{16}$$

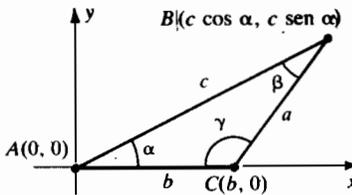
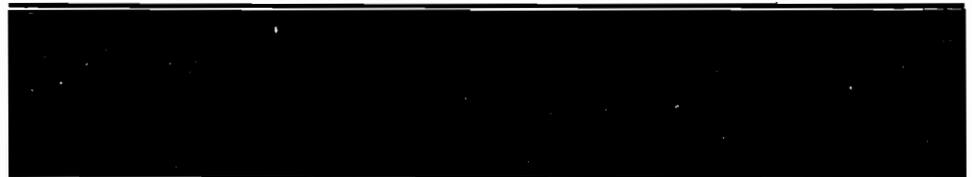


FIGURA 93

Las ecuaciones anteriores se conocen como **ley de los cosenos**.

Hemos notado que los resultados en (16) pueden expresarse de la siguiente manera:



Usted está urgido de aprender y trabajar la ley de los cosenos como se ha determinado anteriormente, en vez de memorizar las tres fórmulas que se dieron en (16).

EJEMPLO 1 _____

Determine el lado restante del triángulo que se muestra en la figura 94.

Solución. Si denominamos el lado desconocido b , entonces, a partir de la ley de los cosenos, podemos escribir:

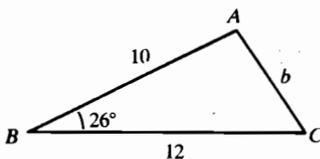


FIGURA 94

$$\begin{aligned} b^2 &= (10)^2 + (12)^2 - 2(10)(12) \cos 26^\circ \\ &\approx 100 + 144 - 240(0.8988) \\ &\approx 244 - 215.7106 = 28.2894 \\ b &\approx \sqrt{28.2894} \approx 5.32 \end{aligned}$$

y, por tanto,

EJEMPLO 2

Determine los ángulos que faltan en el triángulo del ejemplo anterior (véase figura 95).

Solución. Primero, aplicamos la ley del coseno para el ángulo γ que está comprendido entre los lados de longitud 5.32 y 12 y obtenemos:

$$\begin{aligned}(10)^2 &= (5.32)^2 + (12)^2 - 2(5.32)(12) \cos \gamma \\ 100 &= 28.3024 + 144 - 127.68 \cos \gamma \\ 127.68 \cos \gamma &= 72.3024 \\ \cos \gamma &= \frac{72.3024}{127.68} \approx 0.5663\end{aligned}$$

Utilizando una calculadora, encontramos que:

$$\gamma \approx 55.51^\circ$$

Ya que el coseno de un ángulo entre 90° y 180° es negativo, *no hay ninguna necesidad de considerar dos posibilidades* en este caso, como lo hicimos en la sección previa cuando usamos la función seno. Finalmente, de $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, se sigue que:

$$\begin{aligned}\alpha &\approx 180^\circ - 55.51^\circ - 26^\circ \\ &= 180^\circ - 81.51^\circ \\ &= 98.49^\circ\end{aligned}$$

Alternativamente, como conocemos dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos lados, habríamos podido aplicar la ley de los senos para encontrar γ . Aún más, si hubiéramos usado la ley de los senos, no habría existido ninguna ambigüedad acerca de si γ era agudo u obtuso. Recuerde de la geometría que un triángulo puede tener máximo un ángulo obtuso y que, si hay uno, debe ser opuesto al lado más largo. Como γ no es opuesto al lado más largo de este triángulo, entonces γ debe ser agudo.

Como lo indicamos en la sección 6.5, un triángulo del cual sepamos o bien dos lados y el ángulo comprendido, o tres lados, no se puede resolver usando la ley de los senos. Los anteriores ejemplos nos ilustraron cómo resolver el primer tipo de triángulo mediante la ley de los cosenos. En el siguiente ejemplo consideraremos el caso en el cual nos dan los tres lados.

EJEMPLO 3

Determine los ángulos del triángulo ABC que se muestra en la figura 96 con lados de longitudes 7, 6 y 9, respectivamente.

Solución. Utilizando la ley de los cosenos para encontrar el ángulo opuesto al lado más largo, inmediatamente veremos si el triángulo contiene un ángulo obtuso. Así, resolvemos γ a partir de

$$9^2 = 6^2 + 7^2 - 2(6)(7) \cos \gamma$$

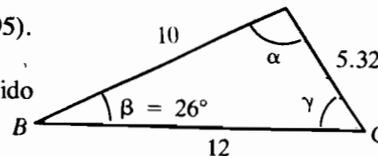


FIGURA 95

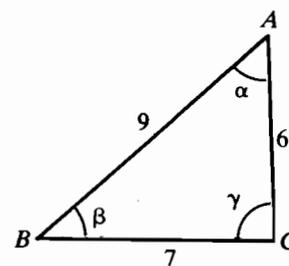


FIGURA 96

Combinando y reordenando los términos, tenemos:

$$84 \cos \gamma = 4$$

$$\text{o} \quad \cos \gamma = \frac{4}{84}$$

De una calculadora encontramos que:

$$\gamma \approx 87.27^\circ$$

Ahora podemos utilizar la ley del seno o la del coseno para encontrar otro ángulo. Para encontrar β escogimos la ley del seno:

$$\frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

Sustituyendo 6 por b , 9 por c y 87.27° por γ (recuerde que para mayor exactitud debe trabajar con el valor real obtenido por su calculadora para γ y no con el valor redondeado 87.27°), encontramos que:

$$\frac{\text{sen } \beta}{6} = \frac{\text{sen } 87.27^\circ}{9}$$

$$\text{o} \quad \text{sen } \beta = \frac{6}{9} \text{sen } (87.27^\circ) \approx 0.6659$$

Puesto que β *no* es el ángulo mayor del triángulo, debe ser agudo. Por tanto, $\beta \approx 41.75^\circ$. Finalmente,

$$\alpha \approx 180^\circ - 87.27^\circ - 41.75^\circ = 50.98^\circ$$

ORIENTACION

En navegación, la dirección se da usando orientadores. Un **orientador** marca el ángulo agudo que forma una recta con la recta norte-sur. Por ejemplo, la figura 97(a) ilustra una orientación de $S40^\circ W$, que significa sur 40 grados oeste; las orientaciones de las figuras 97(b) y (c) son $N65^\circ E$ y $S80^\circ E$, respectivamente.

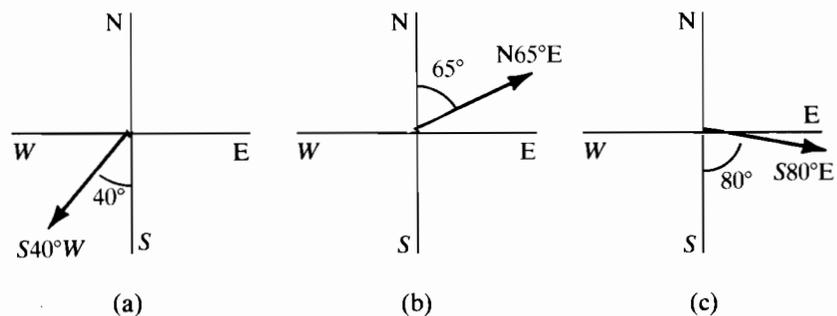


FIGURA 97

EJEMPLO 4

Dos barcos parten de un puerto a las 7:00 a.m., uno viaja a 12 nudos (millas náuticas por hora) y el otro a 10 nudos. Si el barco más rápido mantiene una orientación de $N47^\circ W$ y el otro barco mantiene una orientación de $S20^\circ W$, ¿cuál es su separación (a la milla náutica más cercana) a las 11:00 a.m. de ese mismo día?

En este instante las distancias entre las estaciones y el avión son de 2,300 y 4,000 m. Encuentre la altitud del avión.

25. Un techo inclinado forma un ángulo de 35° con la horizontal y mide 28 pies desde la base hasta la punta. Una antena de televisión de 16 pies de altura se pegará a la punta del techo, asegurada por un cable desde la punta de la antena hasta el punto más cercano de la base del techo. Encuentre el largo del cable que se necesita.
26. Dos torres de vigilancia están situadas en la cima de dos montañas A y B , a 4 millas la una de la otra. Un helicóptero de guerra, junto con su equipo, se localizan en un valle en un punto C , a 3 millas de A y a 2 millas de B . Usando la línea entre A y B como referencia, una de las torres detecta un bombardero a un ángulo de 40° de la torre A y a 82° de la torre B . (Véase figura 103). ¿A qué ángulo, medido desde CB , debe volar el helicóptero para ir directamente hacia el bombardero?

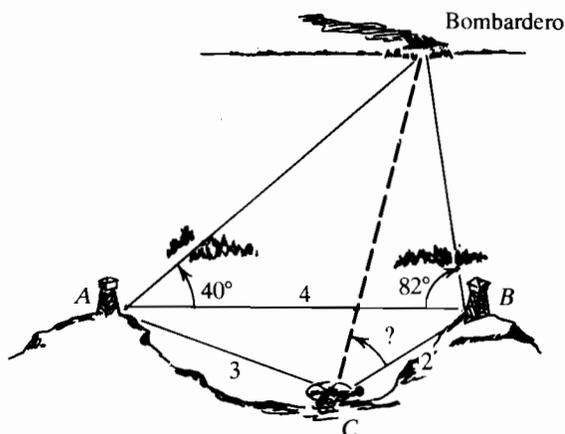


FIGURA 103

27. Para la cometa que se muestra en la figura 104, encuentre la longitud de la vara de alineación requerida para los soportes diagonales.

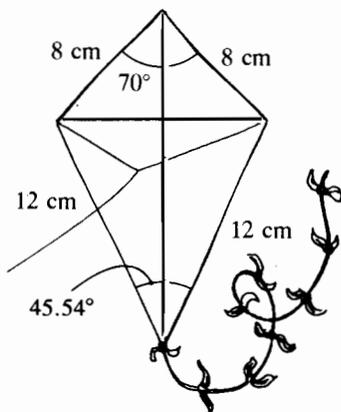


FIGURA 104

28. Desde el piso de un cañón se necesitan 62 pies de cuerda para alcanzar la cima de la pared del cañón, y 86 pies para alcanzar la cima de la pared opuesta (véase figura 105). Si ambas cuer-

das forman un ángulo de 123° , ¿cuál es la distancia entre la cima de una de las paredes del cañón a la otra?

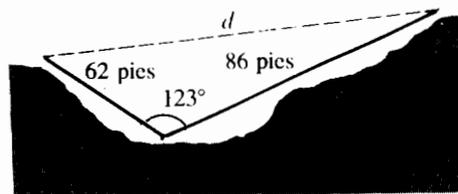


FIGURA 105

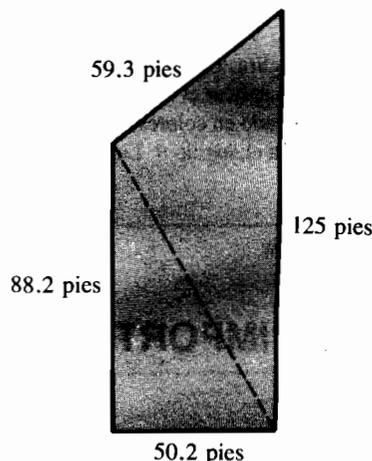


FIGURA 106

29. Use la ley del coseno para obtener la fórmula de Herón*,

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

para el área de un triángulo con lados a , b y c donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

En los problemas 30 al 33, use el problema 29 para encontrar el área del triángulo dado.

30. $a = 5$, $b = 8$, $c = 4$
31. $a = 12$, $b = 5$, $c = 13$
32. $\gamma = 25^\circ$, $a = 7$, $b = 10$
33. $\beta = 86.2^\circ$, $a = 5.2$, $c = 7.3$
34. Use la fórmula de Herón (problema 29) para encontrar el área de un jardín triangular si las longitudes de los tres lados son 25, 32 y 41 m, respectivamente.
35. Encuentre el área del terreno de esquinas irregulares que se muestra en la figura 106. [Sugerencia: divida el terreno en dos partes triangulares, como se muestra, y luego encuentre el área de cada uno de los triángulos. Use la fórmula de Herón (problema 29) para hallar el área del triángulo agudo].
36. Use la fórmula de Herón (problema 29) para encontrar el área de un triángulo con vértices localizados en $(3, 2)$, $(-3, -6)$ y $(0, 6)$ en un sistema rectangular de coordenadas.

* Esta fórmula recibió su nombre en tiempos del matemático griego Herón, pero, en realidad, debe atribuírsele a Arquímedes.

37. El esfuerzo para subir unas escaleras depende en gran parte del ángulo de la rodilla que sube primero. Un dibujo simplificado de una persona nos muestra que, al subir las escaleras, la flexibilidad máxima de la rodilla ocurre cuando la pierna de atrás está derecha y las caderas están justo arriba del talón del pie delantero. (Véase figura 107). Pruebe que:

$$\cos \theta = \left(\frac{R}{a}\right) \sqrt{4 - \left(\frac{T}{a}\right)^2} + \frac{(T/a)^2 - (R/a)^2}{2} - 1$$

donde θ es el ángulo del ligamento de la rodilla, $2a$ es la longitud de la pierna, R es el levantamiento al subir un escalón y T es la anchura del paso. [Sugerencia: sea h la distancia vertical entre la cadera y el talón de la pierna que va delante, como lo muestra la figura. Construya dos ecuaciones que involucren a h : una para aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo delineado en colores, y la otra, para utilizar la ley de los cosenos para el ángulo θ . Luego elimine h y resuelva $\cos \theta$].

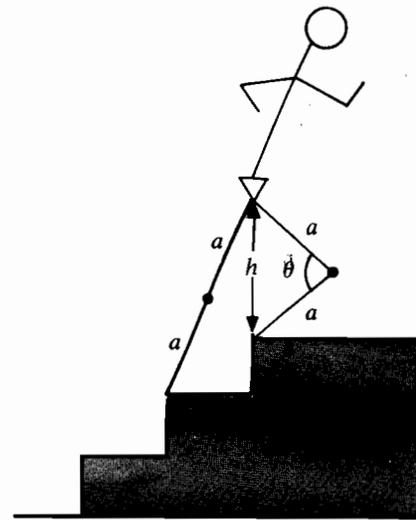


FIGURA 107

CONCEPTOS IMPORTANTES

Angulo	Medida de un ángulo	secante
lado inicial	grado	cosecante
lado terminal	minutos	Identidades fundamentales
posición normal	segundos	identidades de cociente
ángulos coterminales	radián	identidades recíprocas
ángulo recto	Angulo central	identidades pitagóricas
ángulo plano	Sector	Resolver un triángulo
ángulo agudo	Longitud del arco	Angulo de elevación
ángulo obtuso	Funciones trigonométricas	Angulo de depresión
ángulos complementarios	seno	Angulo de referencia
ángulos suplementarios	coseno	Ley del seno
ángulo de cuadrante	tangente	caso ambiguo
	cotangente	Ley del coseno

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 10, llene el espacio o indique si es verdadero o falso.

- Un ángulo que tiene medida negativa se formó mediante una rotación _____.
- Si $\alpha - \beta = 6\pi$, entonces α y β son coterminales. _____
- $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ _____
- $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3)$ _____
- Para resolver un triángulo rectángulo del cual se conozcan el lado opuesto a θ y el lado adyacente a θ , se usa la función _____ para encontrar θ .
- El ángulo de referencia para $4\pi/3$ es _____.
- Para resolver un triángulo del cual se conocen dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos, se aplica primero la ley de _____.
- El caso ambiguo se refiere a la solución de un triángulo cuando se dan _____.
- Para resolver un triángulo del cual se conocen dos lados y el ángulo incluido, se aplica primero la ley de _____.
- El teorema de _____ es un caso especial de la ley del coseno.

En los problemas 11 al 14, dibuje el ángulo dado en posición estándar.

11. $-5\pi/6$ 12. $7\pi/3$
 13. 225° 14. -450°

En los problemas 15 al 18, convierta el ángulo dado a medida en radianes.

15. -120° 16. 1°
 17. 48.3° 18. $14^\circ 14'$

En los problemas 19 al 22, convierta el ángulo dado a grados decimales.

19. $\pi/9$ 20. $78^\circ 15'$
 21. 2.3° 22. $7\pi/3$

En los problemas 23 al 26, convierta el ángulo dado a grados, minutos y segundos.

23. 70.5° 24. 170.15°
 25. 3.1 26. $\pi/10$

En los problemas 27 al 28, encuentre dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

27. 85° 28. $7\pi/6$
 29. ¿Cuál es la longitud del arco de una circunferencia de radio 16 pulgadas, subtendido por un ángulo central de (a) 1 radián y (b) $\pi/10$ radianes?
 30. Un ventilador de 10 pulgadas de radio da vueltas a una razón constante de 1,000 revoluciones por minuto. Encuentre su velocidad angular en radianes/segundo. Determine la velocidad lineal de la punta de una de sus cuchillas en pulgadas/segundo. (Véase problema 75 del ejercicio 6.1)
 31. En una ocasión el eje magnético de la Tierra fue medido con una inclinación de 12° del eje geográfico de la Tierra (véase figura 108). Si el diámetro polar de la Tierra es 7,900 millas, encuentre la distancia, medida a lo largo del arco de un gran círculo entre el polo norte geográfico y el polo norte magnético.

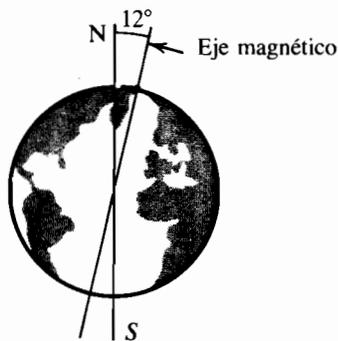


FIGURA 108

32. Una correa que pasa por una polea se mueve a razón de 6π pies/segundo. Si la polea da vueltas a razón de 90 revoluciones por minuto, encuentre el diámetro de la polea.

En los problemas 33 al 38, resuelva el triángulo rectángulo de la figura 109, usando la información dada.

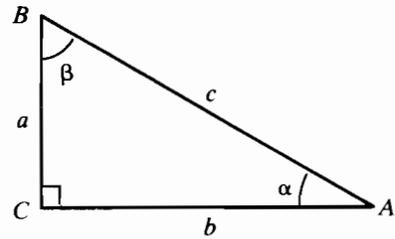


FIGURA 109

33. $a = 30, b = 40$ 34. $a = 25, \alpha = 27.5^\circ$
 35. $b = 5, \alpha = 34^\circ$ 36. $b = 7, \beta = 45^\circ$
 37. $c = 10, \alpha = 41^\circ 40'$ 38. $a = 2.3, \beta = 75.2^\circ$
 39. Determine los ángulos del triángulo con vértices (1, 1), (3, 1) y (3, 4).
 40. Un cohete es lanzado desde el nivel del piso con un ángulo de elevación de 43° . Si el cohete le pega a un avión que vuela a 20,000 pies, encuentre la distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el punto situado directamente debajo del avión. ¿Cuál es la distancia en línea recta entre el lanzacohetes y el avión?
 41. Un hombre a 100 m de la base de un risco suspendido mide un ángulo de elevación de 28° desde ese punto hasta la punta del risco (véase figura 110). Si el risco forma un ángulo de 65° con el suelo, determine su altura aproximada h .

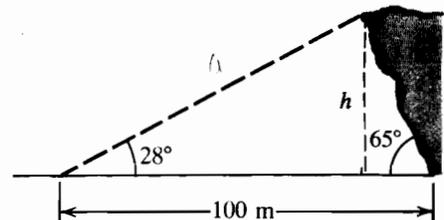


FIGURA 110

42. Una escalera eléctrica entre el primero y segundo pisos de un almacén tiene 58 pies de larga y forma un ángulo de 20° con el primer piso (véase figura 111). Encuentre la distancia vertical entre los dos pisos.

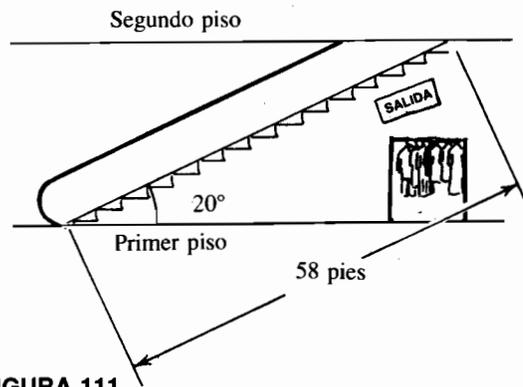


FIGURA 111

43. En 1972 un helicóptero francés alcanzó una altura récord de 12,442 m. ¿Cuál sería el ángulo de elevación entre un punto P y el helicóptero, si el punto P estaba a 2,000 m del punto exactamente por encima del helicóptero? Véase figura 112.

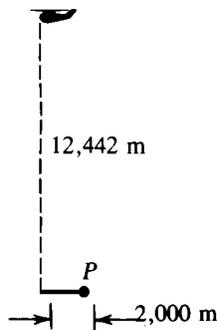


FIGURA 112

44. En una competencia de esquí acuático, un competidor salta una rampa en un punto R y cae en S (véase figura 113). Un juez situado en la orilla, en el punto J mide $\angle RJS$ como 47° . Si la distancia desde la rampa hasta el juez es de 110 pies, encuentre la longitud del salto. (Suponga que $\angle SRJ = 90^\circ$).



FIGURA 113

En los problemas 45 al 48, evalúe las seis funciones trigonométricas del ángulo θ si θ está en posición normal y el lado terminal de θ contiene el punto dado.

45. $(-1, 2)$ 46. $(4, 7)$
 47. $(-0.5, -0.3)$ 48. $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$

En los problemas 49 al 54, nos dan el valor de una de las funciones trigonométricas de un ángulo θ . De este valor y la información adicional, determine el valor de las cinco funciones trigonométricas restantes para θ .

49. $\cos \theta = \frac{-1}{7}$, θ está en el cuadrante III
 50. $\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{3}$, θ está en el cuadrante II
 51. $\cot \theta = -5$, θ está en el cuadrante IV
 52. $\sec \theta = 15$, $\operatorname{sen} \theta < 0$

53. $\csc \theta = -7$, $\tan \theta > 0$
 54. $\tan \theta = \frac{1}{9}$, $\sec \theta < 0$
 55. Si $\cot \theta = -4$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen} \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sec \theta$ y $\csc \theta$.
 56. Si $4 \operatorname{sen} \theta = 3 \cos \theta$, encuentre todos los valores posibles para $\operatorname{sen} \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sec \theta$, $\csc \theta$.

En los problemas 57 al 60, encuentre el valor exacto de la expresión dada,

57. $\operatorname{sen} \left(-\frac{7\pi}{4} \right)$ 58. $\csc \frac{13\pi}{6}$
 59. $\tan 495^\circ$ 60. $\operatorname{sen} 330^\circ$

En los problemas 61 al 64, sin utilizar calculadora, encuentre todos los ángulos θ , de manera que $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ satisfagan la condición dada.

61. $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 62. $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 63. $\sec \theta = -2$ 64. $\csc \theta = -\sqrt{2}$

En los problemas 65 al 68, sin usar calculadora, encuentre todos los ángulos θ de manera que $0 \leq \theta < 2\pi$ satisfagan las condiciones dadas.

65. $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 66. $\csc \theta = -1$
 67. $\cot \theta = -1$ 68. $\cos \theta = \frac{1}{2}$

En los problemas 69 al 72, resuelva el triángulo que satisfaga las condiciones dadas.

69. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $b = 10$
 70. $\gamma = 145^\circ$, $a = 25$, $c = 20$
 71. $\beta = 45^\circ$, $b = 7$, $c = 8$
 72. $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 20^\circ$, $b = 35$

73. La entrada a una pista baja por una montaña. Utilizando la información dada en la figura 114, encuentre la distancia total $d_1 + d_2$ que recorre el carrito.

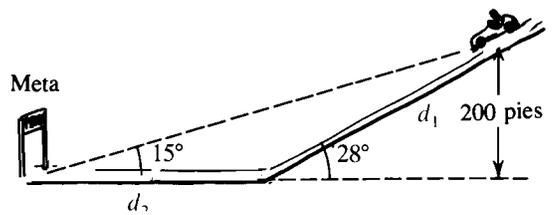


FIGURA 114

74. Desde las torres de vigilancia de dos salvavidas, se ve un nadador con rumbos de $N46^\circ E$ y $N27^\circ W$, respectivamente. Si la

segunda torre está 250 pies al este de la primera torre, ¿cuál es la distancia entre el nadador y cada una de las torres?

- 75. Un buque de la guardia costera se localiza a 4 millas náuticas hacia el sur de otro buque costero en el momento en que reciben una llamada de auxilio de un bote. Para socorrerlo, el primer buque navega con rumbo S50°E a 5 nudos y el segundo navega hacia S10°E, a 10 nudos. ¿Cuál de ellos llegará primero al bote?
- 76. El ángulo entre dos lados de un paralelogramo es de 40°. Si las longitudes de los lados son 5 y 10 cm, encuentre las longitudes de las dos diagonales.

En los problemas 77 al 80, resuelva el triángulo que satisfaga las condiciones dadas.

- 77. $\alpha = 51^\circ, b = 20, c = 10$
- 78. $\gamma = 25^\circ, a = 8, b = 5$
- 79. $a = 4, b = 6, c = 3$
- 80. $a = 1, b = 2, c = 3$

- 81. Determine los ángulos en el triángulo de vértices en (0, 0), (5, 0) y (4, 3).
- 82. Un barco navega con un rumbo de N85°E desde un puerto, a una distancia de 10 millas náuticas. En este punto cambia su curso a un rumbo de N25°W y viaja 20 millas náuticas. ¿Cuál es la distancia en línea recta desde el puerto hasta su punto final?
- 83. Un aeroplano debe volar 500 millas hacia el oeste a un punto de tanqueo. Si se comete un error de 5° en su despegue, ¿qué tan lejos está el avión de la zona de tanqueo, después de haber volado 400 millas? ¿En qué ángulo debe girar, de manera que logre corregir su curso en ese punto?
- 84. Demuestre que el área de un polígono regular de n lados está dada por:

$$A = \frac{1}{4} s^2 n \cot \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$$

donde s es el largo de un lado. (Véase figura 115.)

Polígono regular de n lados



FIGURA 115

- 85. Un satélite meteorológico que orbita el ecuador a una altura de $H = 36,000$ km, detecta una tormenta eléctrica al norte, en P , a un ángulo de $\theta = 6.5^\circ$ de su vertical (véase figura 116).

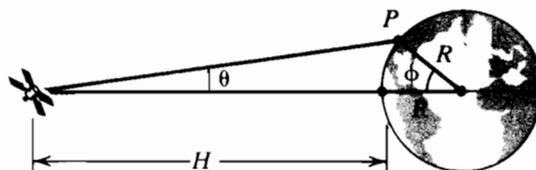


FIGURA 116

- (a) Dado que el radio de la Tierra es aproximadamente $R = 6,370$ km, encuentre el ángulo de latitud ϕ de la tormenta eléctrica.
- (b) Demuestre que θ y ϕ están relacionados por la ecuación:

$$\tan \theta = \frac{R \operatorname{sen} \phi}{H + R(1 - \cos \phi)}$$

- 86. Como lo muestra la figura 117, sólo una porción de la superficie de la Tierra puede ser observada desde una nave espacial a altitud H . El círculo que pasa por esta región se denomina círculo del horizonte. C denota el centro de la Tierra, S la posición del satélite y A el punto en el círculo del horizonte.

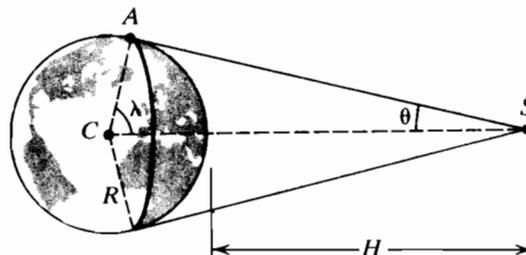


FIGURA 117

- (a) Para los ángulos λ y θ ilustrados en la figura, demuestre que:

$$\operatorname{sen} \theta = \cos \lambda = \frac{R}{R + H},$$

donde R es el radio de la Tierra. [Sugerencia: SA será tangente a la Tierra].

- (b) Usando $R = 6,378$ km, encuentre ϕ y θ , correspondientes a un punto en el círculo del horizonte del satélite Landsat 2 cuando se encuentra a su mayor distancia (916 km) de la Tierra.

7.1 Funciones circulares

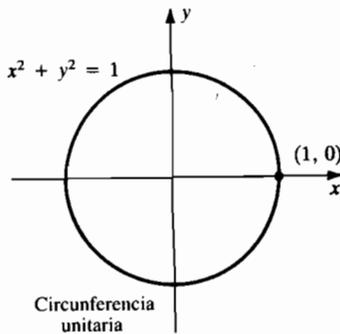


FIGURA 1

En el capítulo 6 consideramos las funciones trigonométricas de los *ángulos* medidas en grados o radianes. En cálculo y otros cursos avanzados, es necesario considerar las funciones trigonométricas con dominios limitados más a los *números reales* que a los ángulos. La transición de ángulos a números reales se hace reconociendo que a cada número real t le corresponde un ángulo de t radianes.

Podemos visualizar esta correspondencia utilizando una circunferencia centrada en su origen con radio 1. Esta circunferencia se llama **circunferencia unitaria** (véase figura 1). De la sección 3.2 recordamos que la ecuación de la circunferencia unitaria es $x^2 + y^2 = 1$.

Ahora consideramos un ángulo de t radianes. De la definición de medida de radián $t = s/r$, la razón de la longitud s del arco subtendido al radio r de la circunferencia. Para la circunferencia unitaria $r = 1$, así que $t = s/1 = s$. Por tanto, el ángulo de t radianes que se muestra en la figura 2 subtende un arco de longitud de t unidades en la circunferencia unitaria. Se deduce que, para cada número real t , el lado terminal de un ángulo de t radianes en posición normal ha recorrido una distancia de $|t|$ unidades a lo largo de la circunferencia unitaria -en sentido contrario al de las manecillas del reloj, si $t > 0$, en sentido de las manecillas del reloj, si $t < 0$. Esta asociación de cada número real t con un ángulo de t radianes se ilustra en la figura 3.

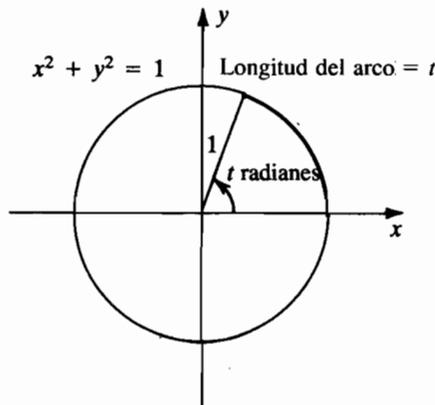


FIGURA 2

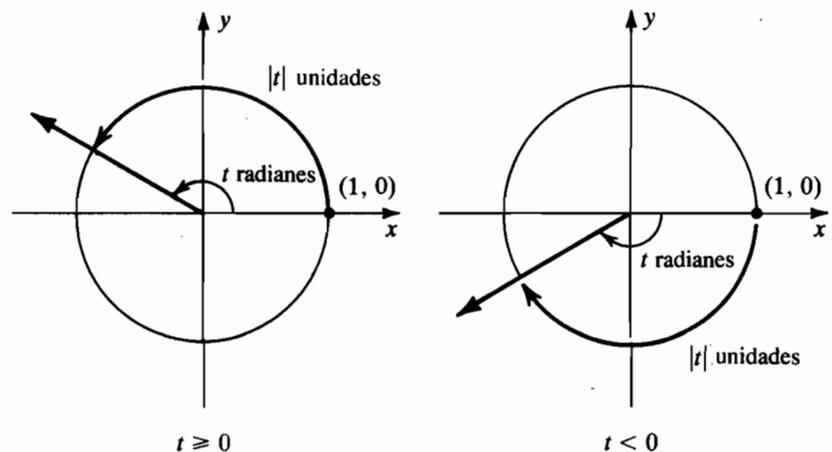


FIGURA 3

Esta asociación nos permite llegar a la siguiente definición.

DEFINICION 1

El valor de cada función trigonométrica para un número real t se define como su valor en un ángulo de t radianes, si ese valor existe.

Por ejemplo, el seno del número real $\pi/6$ es, simplemente, el seno del ángulo de $\pi/6$ radianes (que, como usted sabe, es $\frac{1}{2}$). De esta manera, no hay en realidad nada nuevo al evaluar la función trigonométrica de un número real.

La circunferencia unitaria es muy útil para describir las funciones trigonométricas de los números reales. Para cualquier número real t consideremos el ángulo de t radianes en posición normal. Sea P_t el punto de intersección del lado terminal del ángulo de t radianes con la circunferencia unitaria. Véase figura 4(a). Ya que P_t está en la circunferencia unitaria, la distancia de P_t al origen O es $r = 1$.

Sean (x, y) las coordenadas de P_t , como se indica en la figura 4(b). De la sección 6.4 encontramos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= y/r = y/1 = y, & \operatorname{csc} t &= r/y = 1/y, y \neq 0 \\ \cos t &= x/r = x/1 = x, & \operatorname{sec} t &= r/x = 1/x, x \neq 0 \\ \tan t &= y/x, x \neq 0, & \operatorname{cot} t &= x/y, y \neq 0 \end{aligned}$$

En particular, las coordenadas de P_t son

$$P_t(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

En otras palabras: para cualquier número real t , $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ son las coordenadas x y y respectivamente, del punto de intersección del lado terminal del ángulo de t radianes (en posición normal) con la circunferencia unitaria.

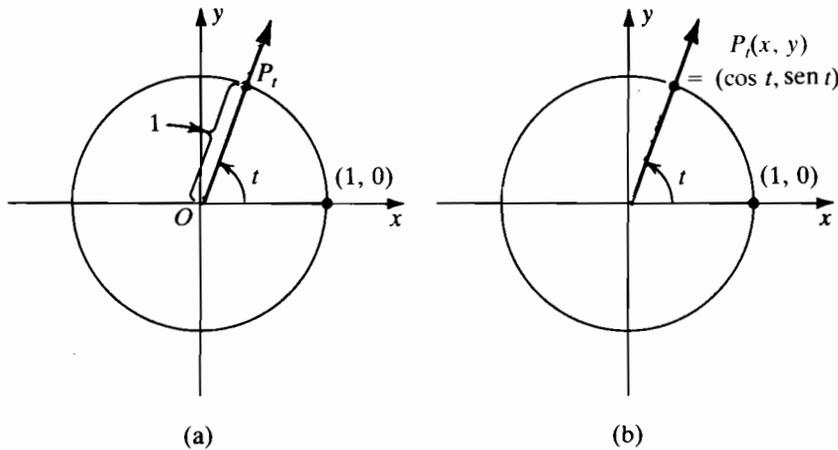


FIGURA 4

Como veremos pronto, de este resultado se pueden obtener algunas propiedades importantes de las funciones seno y coseno. Debido al papel jugado por la circunferencia en este análisis, las funciones trigonométricas se refieren algunas veces a las **funciones circulares**.

Ya que $P_t(x, y)$ está situado en la circunferencia unitaria, se deduce que

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1$$

Como $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, obtenemos

$$|\cos t| \leq 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t \leq 1$$

DOMINIO Y RANGO

Las observaciones anteriores indican que tanto $\cos t$ como $\operatorname{sen} t$ pueden ser cualquier número del intervalo $[-1, 1]$. Así obtenemos las funciones seno y coseno,

$$f(t) = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad g(t) = \cos t$$

ambas con dominio en el conjunto R de todos los números reales y como rango, el intervalo $[-1, 1]$. Los dominios y rangos de las otras funciones trigonométricas se analizarán en la sección 7.2.

EJEMPLO 1

Aproxime $\cos 3$ y $\sin 3$ y dé una interpretación geométrica de estas expresiones.

Solución. Con una calculadora en el *modo de radianes*, obtenemos

$$\cos 3 \approx -0.9899925 \quad \text{y} \quad \sin 3 \approx 0.1411200$$

Estos valores representan las coordenadas x y y , respectivamente, del punto de intersección del lado terminal del ángulo de 3 radianes (en posición normal) con la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Como se ve en la figura 5, este punto está situado en el segundo cuadrante.

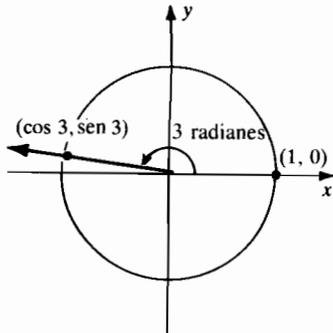


FIGURA 5

PERIODICIDAD

En la sección 6.1 vimos que para cualquier número real t , los ángulos de t radianes y $t \pm 2\pi$ radianes son coterminales. Por consiguiente determinan el mismo punto (x, y) en la circunferencia unitaria. Por tanto,

$$\cos t = \cos (t \pm 2\pi) \quad \text{y} \quad \sin t = \sin (t \pm 2\pi)$$

En otras palabras, las funciones seno y coseno repiten sus valores cada 2π unidades. Se deduce que para cualquier número entero n :

$$\cos t = \cos (t + 2n\pi)$$

$$\sin t = \sin (t + 2n\pi)$$

En general, se dice que una función no constante f es **periódica** si hay un número positivo p tal que

$$f(t) = f(t + p) \tag{1}$$

para cada t en el dominio de f . Si p es el número positivo más pequeño para el cual (1) es verdadera, entonces p se llama **periodo** de la función f . Así, las anteriores propiedades implican que las funciones seno y coseno son periódicas. Para poder ver que el periodo de $\sin t$ es realmente 2π , notamos que sólo hay un punto P , en la circunferencia unitaria con 1 como coordenada y , o sea, $(0, 1)$. Es decir,

$$\sin t = 1 \text{ sólo para } t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \frac{\pi}{2} \pm 4\pi, \text{ y así sucesivamente}$$

Así, el valor positivo más pequeño posible de p es 2π y la función seno tiene un periodo de 2π . La verificación de que la función coseno tiene un periodo de 2π se deja como ejercicio (véase problema 31).

PROPIEDADES ADICIONALES

Para cualquier número real t que satisfaga $0 < t < \pi/2$, el punto correspondiente P_t en la circunferencia unitaria se sitúa en el primer cuadrante. Como se ve en la figura 6 los puntos

sólo si $t = 0, \pm\pi, \pm2\pi$, etc. Por tanto, el número positivo más pequeño p para el cual $\tan(t + p) = \tan t$ es $p = \pi$.

Es importante tener en cuenta que las propiedades que acabamos de analizar para seno, coseno y tangente de un número real t también son válidas para un ángulo θ medido en grados, siempre y cuando π sea reemplazado por 180° en el momento en que π aparezca en la fórmula. Por ejemplo, de $\sin(-t) = -\sin t$, se deduce que $\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ$; y de $\sin(\pi/2 - t) = \cos t$, tenemos que $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$.

EJERCICIO 7.1

En los problemas 1 al 4 para el número real dado t , (a) localice el punto $(\cos t, \sin t)$ en la circunferencia unitaria y (b) encuentre el valor exacto de las coordenadas $\cos t$ y $\sin t$.

1. $7\pi/6$ 2. $2\pi/3$ 3. $-\pi/2$ 4. 2π

En los problemas 5 al 8 para el número real dado t , (a) localice el punto $(\cos t, \sin t)$ en la circunferencia unitaria y (b) utilice una calculadora para aproximar las coordenadas $\cos t$ y $\sin t$.

5. 2.5 6. 15.3 7. -7.2 8. 0.1

En los problemas 9 al 12, utilice la periodicidad para encontrar el valor de la función trigonométrica dada. No use calculadora.

9. $\sin(13\pi/6)$ 10. $\cos(61\pi/3)$
11. $\tan(3\pi/4)$ 12. $\sin(-5\pi/3)$

En los problemas 13 al 20, encuentre el valor de la función trigonométrica dada. No use calculadora.

13. $\sin(-11\pi/3)$ 14. $\cot(17\pi/6)$
15. $\tan 5\pi$ 16. $\sin(-19\pi/2)$
17. $\cos(-7\pi/4)$ 18. $\tan(41\pi/3)$
19. $\sec(23\pi/3)$ 20. $\csc(19\pi/6)$

En los problemas 21 al 30 justifique la igualdad dada con una de las propiedades de las funciones trigonométricas.

21. $\sin \pi = \sin 3\pi$
22. $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$

23. $\tan(-1.402) = -\tan 1.402$

24. $\cos 16.8\pi = \cos 14.8\pi$

25. $\csc(2.5 + \pi) = -\csc 2.5$

26. $\tan 0.3\pi = \cot 0.2\pi$

27. $\sin(-3 - \pi) = -\sin(3 + \pi)$

28. $\tan 9\pi = \tan 8\pi$

29. $\cos 0.43 = \cos(-0.43)$ 30. $\sin(2\pi/3) = \sin(\pi/3)$

31. Demuestre que el período de la función coseno es 2π .

32. Verifique que $\cos(-t) = \cos t$ y $\sin(-t) = -\sin t$.

33. Para $0 < t < \pi/2$, verifique que $\cos(t + \pi) = -\cos t$ y $\sin(t + \pi) = -\sin t$. [Sugerencia: P_t y $P_{t+\pi}$ son simétricos con respecto al origen].

34. Para $0 < t < \pi/2$, verifique que $\cos(\pi - t) = -\cos t$ y $\sin(\pi - t) = \sin t$. [Sugerencia: P_t y $P_{\pi-t}$ son simétricos con respecto al eje y].

En los problemas 35 al 37 verifique la propiedad dada de la función tangente, utilizando las propiedades correspondientes de las funciones seno y coseno.

35. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t$

36. $\tan(t + \pi) = \tan t$

37. $\tan(\pi - t) = -\tan t$

38. ¿Para cuáles números reales t $\sin t$ es $= \sqrt{2}/2$?

39. ¿Para cuáles números reales t $\cos t$ es $= -1/2$?

7.2 Gráficas de las funciones trigonométricas

Una buena ayuda para el mejor entendimiento de las funciones trigonométricas es examinar sus gráficas.

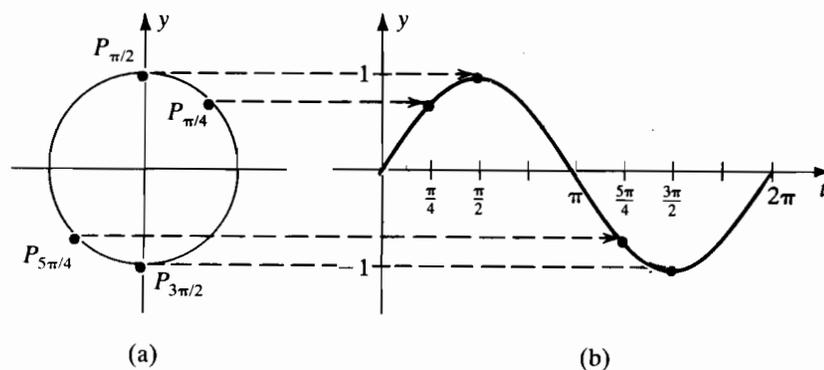


FIGURA 9

En la sección 7.1 vimos que el dominio de la función seno $f(t) = \sin t$ está en todos los números reales y que el intervalo $[-1, 1]$ es su rango. Como la función seno tiene un periodo de 2π , comenzamos haciendo un bosquejo de su gráfica en el intervalo $[0, 2\pi]$. Obtenemos un boceto de la gráfica (véase figura 9(b)), considerando varias posiciones del punto P_t en la circunferencia unitaria, como se muestra en la figura 9(a). A medida que t varía de 0 a $\pi/2$, el valor $y = \sin t$ aumenta de 0 a su máximo valor 1. Pero si t varía de $\pi/2$ a $3\pi/2$, el valor $\sin t$ disminuye de 1 a su mínimo valor -1 . Nótese que $\sin t$ cambia de positivo a negativo en $t = \pi$. Para un t entre $3\pi/2$ y 2π , vemos que los valores correspondientes de $\sin t$ aumentan de -1 a 0.

Utilizando los valores de la función seno para $0 \leq t \leq 2\pi$ obtenidos en el problema 35 del ejercicio 6.4, marcamos los puntos y los unimos con una curva uniforme, como se observa en la zona coloreada de la figura 10(a). Como $\sin(t + 2\pi) = \sin t$, la gráfica de $y = \sin t$ para $2\pi \leq t \leq 4\pi$ es la misma que para $0 \leq t \leq 2\pi$. Utilizando la periodicidad de la función seno, podemos extender la gráfica en cualquier dirección, como se ve en la figura 10(a).

Recordemos de la sección 7.1 que la función seno es una función *impar*, ya que $f(-t) = \sin(-t) = -\sin t = -f(t)$. Así, podemos ver en la figura 10(a) que su gráfica es simétrica con respecto al origen.

Trabajando de nuevo con la circunferencia unitaria, obtenemos la gráfica de la función coseno $g(t) = \cos t$, que se indica en la figura 10(b). Como es práctica habitual, esta gráfica

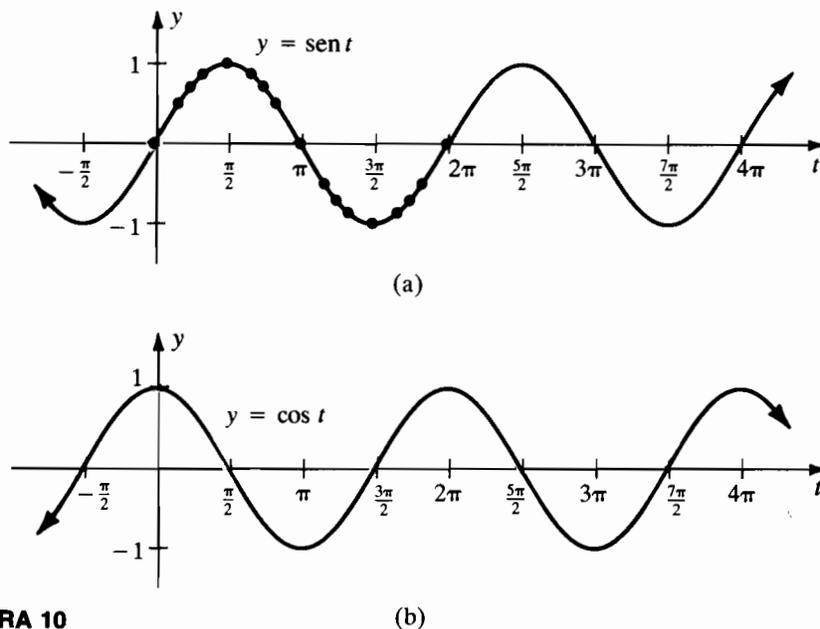


FIGURA 10

se designa $y = \cos t$. Notamos que en este contexto el símbolo y *no* representa la coordenada y de un punto en la circunferencia unitaria; por el contrario, es la coordenada y de un punto en la gráfica de la función $g(t) = \cos t$.

Vemos en la figura 10(b) que la gráfica de la función coseno es simétrica con respecto al eje y . Este es el resultado de

$$g(-t) = \cos(-t) = \cos t = g(t)$$

es decir, la función coseno es una función *par*.

Usted debe haber observado que la gráfica de la función seno es idéntica a la gráfica de la función coseno, pero trasladada $\pi/2$ unidades a la derecha. Esto es una consecuencia de la propiedad

$$\text{sen } t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

(véase problema 34). Para un análisis detallado de las traslaciones de las gráficas de seno y coseno, véase sección 7.3

EJEMPLO 1

Grafique $y = 1 + \text{sen } t$.

Solución. Recordemos de la sección 3.6 que la gráfica de $y = 1 + \text{sen } t$ puede obtenerse trasladando una unidad hacia arriba la gráfica de $y = \text{sen } t$. El resultado es la gráfica en color de la figura 11.

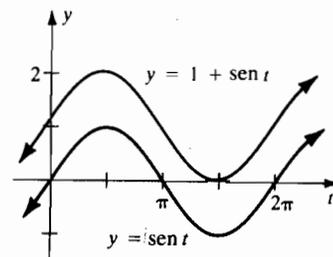


FIGURA 11

EJEMPLO 2

Grafique $y = \text{sen } t + \cos t$.

Solución. Recordemos de la sección 3.6 que la gráfica de la suma de dos funciones puede obtenerse con la suma de las coordenadas y . Para obtener la gráfica de $y = \text{sen } t + \cos t$, primero graficamos $y = \text{sen } t$ y $y = \cos t$ sobre los mismos ejes. Luego, como se indica en la figura 12, para obtener un punto en la gráfica de $y = \text{sen } t + \cos t$ para cualquier t , sumamos las coordenadas y de $\text{sen } t$ y $\cos t$. Después de marcar suficientes puntos, obtenemos la gráfica en color de la figura 12.

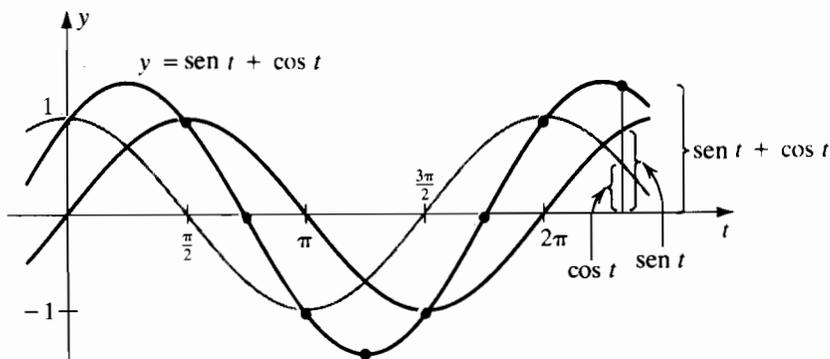


FIGURA 12

Ahora consideramos la gráfica de la función tangente, $h(t) = \tan t$. Como $\tan t = \text{sen } t / \cos t$, el dominio de la función tangente consta de todos los números reales t para los que

cos $t \neq 0$. Después de que tracemos la gráfica de la función tangente, veremos que su rango es R . Ya que $h(t) = \tan t$ tiene como periodo π , sólo necesitamos graficarla en un intervalo de longitud π . Un intervalo conveniente para elegir es $(-\pi/2, \pi/2)$.

Para esbozar la gráfica de la función tangente, comenzamos considerando sus valores para los ángulos especiales $0, \pi/6, \pi/4$ y $\pi/3$ (indicados en la tabla adjunta) y marcando los puntos correspondientes. (Véase figura 13).

t		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$	1	$\sqrt{3} \approx 1.7$

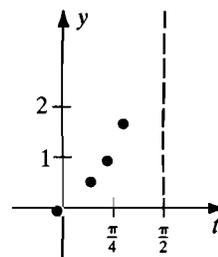


FIGURA 13

Sabemos que $\tan t$ no está definida para $t = \pi/2$ (porque $\cos(\pi/2) = 0$), pero podemos considerar valores de $\tan t$ para t cercanos, pero inferiores a $\pi/2$. Ya que $\tan t =$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

examinamos $\sin t$ y $\cos t$ para $0 < t < \pi/2$. A medida que t se acerca a $\pi/2$, el numerador $\sin t$ se aproxima a 1 y el denominador $\cos t$ a 0. Así, a medida que t avanza hacia $\pi/2$, los valores de $\tan t$ crecen. Este comportamiento se ilustra en la siguiente tabla, en donde los valores de $\sin t$, $\cos t$ y $\tan t$ se obtuvieron con calculadora. Los valores escogidos para t aumentan hacia $\pi/2 \approx \frac{1}{2}(3.1416) = 1.5708$. Así la recta $t = \pi/2$ es una asíntota vertical para la gráfica. De esta observación obtenemos la porción superior de la curva de la figura 14. Según

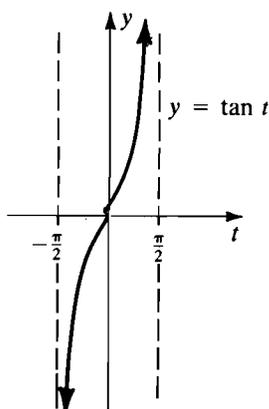


FIGURA 14

$$h(-t) = \tan(-t) = -\tan t = -h(t)$$

concluimos que la función tangente es impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen. En consecuencia, obtenemos la porción inferior de la gráfica de la figura 14.

t	1	1.5	1.57	1.5707	1.57075
$\sin t$	0.84	0.997	0.99999968	0.999999995	0.999999998
$\cos t$	0.54	0.071	0.0008	0.000096	0.000046
$\tan t$	1.6	14.1	1,255.8	10,381.3	21,585.8

Se deduce que la recta $t = -\pi/2$ es otra asíntota vertical de la gráfica. Aprovechando el hecho de que el periodo de la función tangente es π , completamos la gráfica repitiendo el mismo patrón (véase figura 15). Observamos que el dominio de la función tangente son todos los números reales con excepción de los múltiplos impares de $\pi/2$ y que el rango es R .

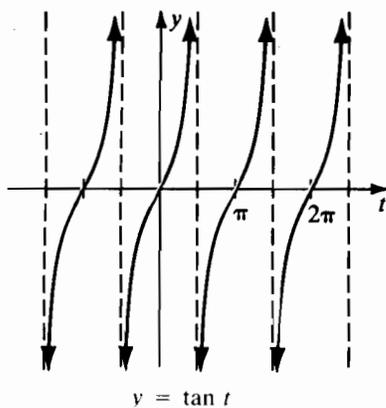


FIGURA 15

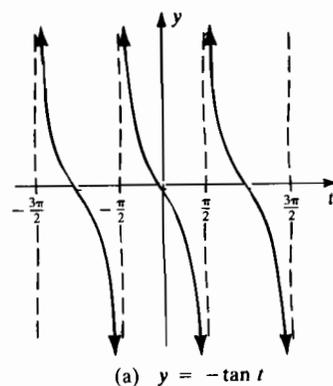
$y = \tan t$

EJEMPLO 3

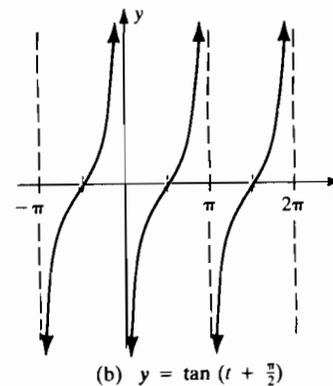
Grafique (a) $y = -\tan t$ y (b) $y = \tan(t + \pi/2)$.

Solución. Obtenemos estas gráficas utilizando las técnicas de traslación y reflexión vistas en la sección 3.6.

- (a) La gráfica de $y = -\tan t$ es la reflexión de la gráfica de $y = \tan t$ en el eje t . Véase figura 16(a).
- (b) La gráfica de $y = \tan(t + \pi/2)$ puede obtenerse trasladando $\pi/2$ unidades a la izquierda la gráfica de $y = \tan t$. Véase figura 16(b).



(a) $y = -\tan t$



(b) $y = \tan(t + \frac{\pi}{2})$

FIGURA 16

EJEMPLO 4

Trace la gráfica de $f(t) = \csc t$ y determine su dominio y su rango.

Solución. Como $\csc t = 1/\text{sen } t$, la gráfica de la función cosecante tendrá asíntotas verticales en donde $\text{sen } t = 0$, a saber, $t = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$. Además, podemos obtener la coordenada y de un punto en la gráfica de la función cosecante, tomando el recíproco de una coordenada y diferente de cero, de un punto en la gráfica de la función seno.

Como se ve en la figura 17, es conveniente trazar la gráfica de la función seno (letra a al centro) después localizar las asíntotas verticales y, finalmente, tomar los recíprocos de la coordenada y para obtener puntos en la gráfica de la cosecante. El dominio de la función cosecante está formado por todos los números reales t tales que $\text{sen } t \neq 0$; es decir, $|t| \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. En la figura 17 vemos que el rango de la función cosecante consta de la unión de los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$.

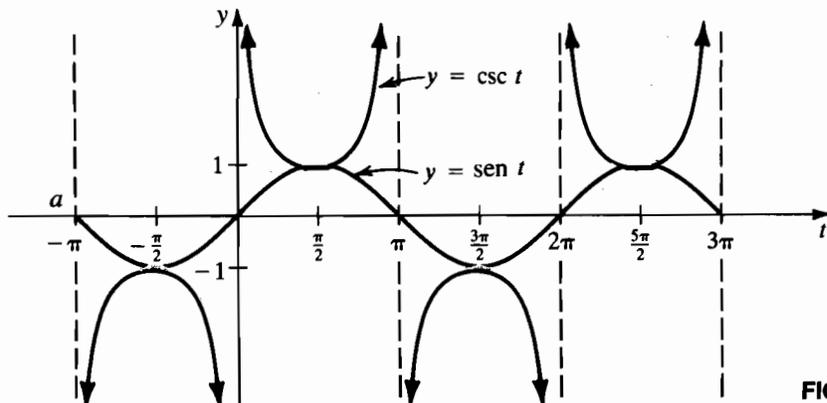


FIGURA 17

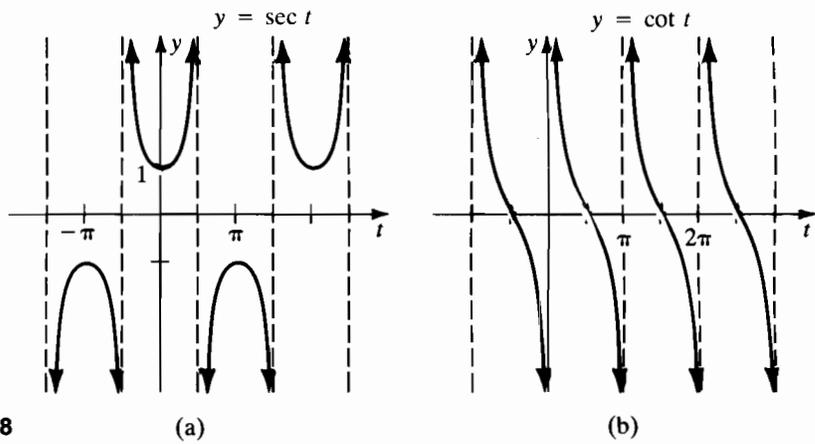


FIGURA 18

Del rango de la función cosecante encontrado en el ejemplo 4, deducimos que

$$|\csc t| \geq 1$$

para todos los números reales t en el dominio de la función cosecante. Nótese también que la cosecante es una función impar; su gráfica es simétrica con respecto al origen. (Véanse problemas 31 al 33).

Aprovechando el hecho de que $\sec t = 1/\cos t$ y $\cot t = 1/\tan t$, podemos obtener las gráficas de la función secante, como en la figura 18(a), y la función cotangente como en la figura 18(b), por medio de un método similar al utilizado en el ejemplo 4. La verificación de la figura 18 se deja como ejercicio (véanse problemas 35 y 37).

Una propiedad importante de la función secante,

$$|\sec t| \geq 1$$

es evidente en la gráfica de $y = \sec t$. Véase figura 18(b).

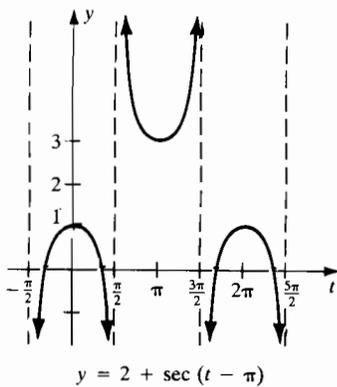


FIGURA 19

EJEMPLO 5 _____

Grafique $y = 2 + \sec(t - \pi)$.

Solución. La gráfica de $y = 2 + \sec(t - \pi)$ puede obtenerse trasladando π unidades a la derecha y 2 hacia arriba la gráfica de $y = \sec t$, como en la figura 18(a). (Véase figura 19).

EJERCICIO 7.2

En los problemas 1 al 16, use las técnicas de traslación y reflexión para graficar la función dada.

1. $y = \frac{1}{2} + \cos t$
2. $y = -1 + \sin t$
3. $y = -\sin t$
4. $y = -\cos t$
5. $y = 2 - \sin t$
6. $y = -(3 + \cos t)$
7. $y = \sin(t - \pi)$

8. $y = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$
9. $y = 2 + \tan t$
10. $y = 1 - \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$
11. $y = -\cot t$
12. $y = 2.5 + \sec t$
13. $y = \frac{\pi}{6} - \sec t$
14. $y = -\csc(t + \pi)$

15. $y = \csc \left(t - \frac{\pi}{3} \right)$

16. $y = -2 + \cot \left(t - \frac{5\pi}{6} \right)$

En los problemas 17 al 22, utilice la suma de coordenadas y para graficar la función dada.

17. $y = \cos t - \sin t$

18. $y = \sin t + \cos t + 1$

19. $y = t + \sin t$

20. $y = t - \tan t$

21. $y = -\sin t - \cos t$

22. $y = \sin t - \cos t + 1$

23. Compare los valores de $\tan 1.57$ y $\tan 1.58$ obtenidos en una calculadora adaptada en el modo de radianes. Explique la razón de la diferencia entre estos dos valores.
24. Compare los valores de $\cot 3.14$ y $\cot 3.15$ obtenidos de una calculadora en el modo de radianes. [Sugerencia: en la mayoría de las calculadoras usted utiliza las teclas tangente y recíproca para obtener los valores de la función cotangente]. Explique la razón de la gran diferencia entre estos dos valores.
25. ¿Puede ser $9 \csc t = 1$ válido para cualquier número real t ?
26. ¿Puede ser $10 \sec t + 7 = 0$ válido para cualquier número real t ?
27. ¿Para qué números reales t es (a) $\sin t \leq \csc t$?
(b) $\sin t < \csc t$?
28. ¿Para cuáles números reales t es (a) $\sec t \leq \cos t$?
(b) $\sec t < \cos t$?
29. ¿Qué funciones trigonométricas no tienen asíntotas verticales en sus gráficas?

30. ¿Qué funciones trigonométricas no tienen intersección en sus gráficas en (a) el eje y ? (b) el eje t ?
31. Para cada t en el dominio de la función, demuestre que (a) $\csc(-t) = -\csc t$, (b) $\sec(-t) = \sec t$ y (c) $\cot(-t) = -\cot t$.
32. Según el resultado del problema 31, determine la simetría de las gráficas de (a) $y = \csc t$, (b) $y = \sec t$ y (c) $y = \cot t$.
33. Basándose en el resultado del problema 31 responda lo siguiente:
(a) ¿La función cotangente es par o impar?
(b) ¿La función secante es par o impar?
(c) ¿La función cosecante es par o impar?
34. Demuestre que $\sin t = \cos(t - \pi/2)$ escribiendo $\cos t - \pi/2$ como $\cos(-(\pi/2 - t))$ y usando las propiedades $\cos(-t) = \cos t$ y $\cos(\pi/2 - t) = \sin t$ de la sección 7.1.
35. Utilice la gráfica de $y = \tan t$ y el hecho de que $\cot t = 1/\tan t$ para graficar $y = \cot t$.
36. La gráfica de la función cotangente puede obtenerse trasladando y reflejando la gráfica de la función tangente. Use las propiedades $\tan(-t) = -\tan t$ y $\tan(\pi/2 - t) = \cot t$ de la sección 7.1 para obtener la gráfica de la función cotangente.
37. Utilice la gráfica de $y = \cos t$ y el hecho de que $\sec t = 1/\cos t$ para graficar $y = \sec t$.
38. Basándose en la figura 17, determine el dominio, el rango, las asíntotas y el periodo de la función cosecante.
39. Basándose en la figura 18(a), determine el dominio, el rango, las asíntotas y el periodo de la función secante.
40. Basándose en la figura 18(b), determine el dominio, el rango, las asíntotas, el periodo y los intersección- t de la función cotangente.

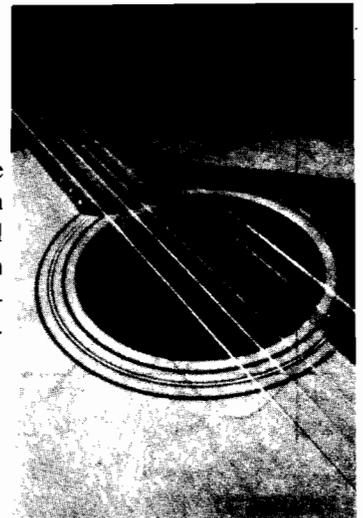
7.3 Movimiento armónico; variaciones de las gráficas de seno y coseno

MOVIMIENTO ARMÓNICO

Muchos objetos físicos vibran u oscilan de manera regular, moviéndose repetidamente hacia atrás y hacia adelante, en un determinado intervalo de tiempo. Algunos ejemplos son los péndulos del reloj, las ondas del sonido, las cuerdas de una guitarra al ser punteadas, el corazón humano, las olas y la corriente eléctrica alterna. Como todos los sonidos —y, en particular, los tonos musicales son producidos por vibraciones—, cualquier movimiento oscilatorio se llama **movimiento armónico**. El movimiento oscilatorio descrito por cualquiera de las funciones:

$$f(t) = a \sin(bt + c) \quad \text{y} \quad g(t) = a \cos(bt + c) \quad (2)$$

donde a , b , c son números reales, se llama **movimiento armónico simple**. En esta sección estudiaremos las propiedades y gráficas de estas funciones. Varias de sus aplicaciones se



describen de los problemas 55 al 60.
Empecemos considerando

$$y = a \operatorname{sen} t \text{ y } y = a \operatorname{cos} t$$

los cuales son casos especiales de (2) con $b = 1$ y $c = 0$. Por ejemplo, como se ve en la figura 20(a), obtenemos la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} t$ duplicando cada coordenada y en la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$. Nótese que los valores mínimo y máximo de $y = 2 \operatorname{sen} t$ ocurren para los mismos valores t como los valores mínimos y máximos de $y = \operatorname{sen} t$, respectivamente. Sin embargo, como vemos en la figura 20(b), esta situación se invierte por $y = -2 \operatorname{sen} t$; es decir, se da un valor mínimo cuando $y = \operatorname{sen} t$ tiene un valor máximo y viceversa. También observamos que la gráfica de $y = -2 \operatorname{sen} t$ es la reflexión en el eje horizontal de la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} t$. En general, la gráfica de $y = a \operatorname{sen} t$ puede obtenerse multiplicando las coordenadas y de la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$ por el número a . Un procedimiento similar es válido para $y = a \operatorname{cos} t$.

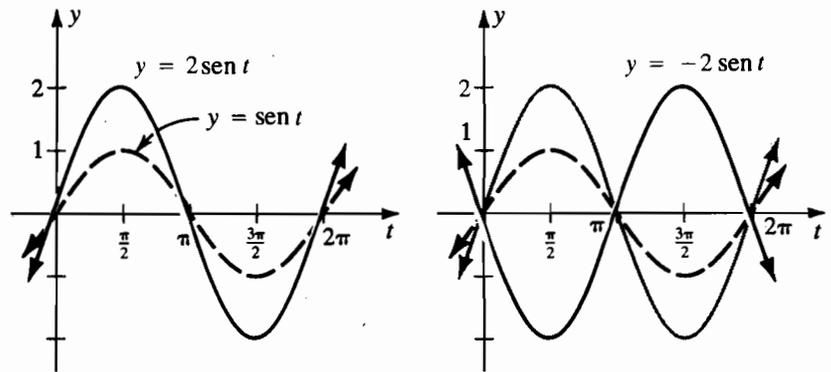


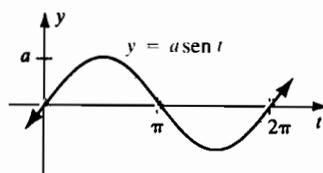
FIGURA 20 (a) (b)

AMPLITUD

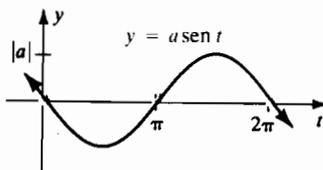
Del análisis anterior se deduce que la distancia máxima desde cada punto de la gráfica de $y = a \operatorname{sen} t$ o $y = a \operatorname{cos} t$ al eje t es $|a|$ (véase figura 21). El número $|a|$ se llama **amplitud** de las funciones

$$f(t) = a \operatorname{sen} t \text{ y } g(t) = a \operatorname{cos} t$$

o de sus gráficas.



$a > 0$



$a < 0$

FIGURA 21

EJEMPLO 1 _____

Grafique $y = 2 \operatorname{cos} t$ y $y = \frac{1}{2} \operatorname{cos} t$ en los mismos ejes. Determine los valores mínimos y máximos para $0 \leq t < 2\pi$.

Solución. Las funciones dadas tienen una amplitud de 2 y $\frac{1}{2}$, respectivamente. Limitando nuestra atención al intervalo $0 \leq t < 2\pi$, sabemos que el coseno alcanza su máximo en $t = 0$ y su mínimo en $t = \pi$. De esta forma:

$$y = 2 \operatorname{cos} 0 = 2 \text{ y } y = 2 \operatorname{cos} \pi = -2$$

son los valores máximos y mínimos de $y = 2 \operatorname{cos} t$. Para $y = \frac{1}{2} \operatorname{cos} t$, encontramos que los valores máximos y mínimos son

$$y = \frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2} \cos \pi = -\frac{1}{2}$$

Las gráficas se indican en los mismos ejes en la figura 22.

Nótese en el ejemplo 1 que tanto para $y = 2 \cos t$, como para $y = \frac{1}{2} \cos t$

$$\frac{1}{2}(\text{valor máximo}-\text{valor mínimo}) = \text{amplitud}$$

Este resultado es válido para todas las gráficas trasladadas de seno y coseno. Por ejemplo, la amplitud de la gráfica de $y = 1 + \sin t$ (figura 11) es $\frac{1}{2}(2 - 0) = 1$, pues el valor máximo es 2 y el valor mínimo es 0.

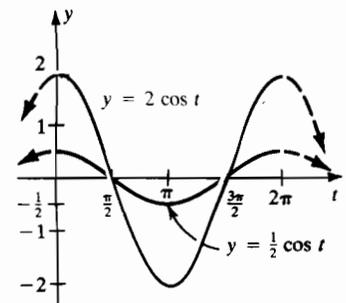


FIGURA 22

PERIODO Y CICLO

Ahora consideremos la gráfica de $y = \sin bt$, para $b > 0$. La gráfica tendrá una amplitud de 1 ya que $a = 1$. Recordemos que $y = \sin t$ tiene como periodo 2π . Así, comenzando en $t = 0$, $y = \sin bt$ repetirá sus valores comenzando en $bt = 2\pi$, o $t = 2\pi/b$. Se deduce que $y = \sin bt$ tiene un **periodo** de $2\pi/b$; lo que significa que la gráfica se repetirá cada $2\pi/b$ unidades. Por esta razón decimos que la gráfica de $y = \sin bt$ en un intervalo de longitud $2\pi/b$ es un **ciclo** de la curva del seno. Por ejemplo, el periodo de $y = \sin 2t$ es $2\pi/2 = \pi$ y, por tanto, se completa un ciclo de la gráfica en el intervalo $0 \leq t \leq \pi$. Obtenemos la gráfica de $y = \sin 2t$ en el intervalo (en color) utilizando los datos de la tabla de la figura 23. La extensión de esta gráfica (en negro) se obtiene por periodicidad. Para comparar se muestra también la gráfica de $y = \sin t$.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2t$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2t$	0	1	0	-1	0

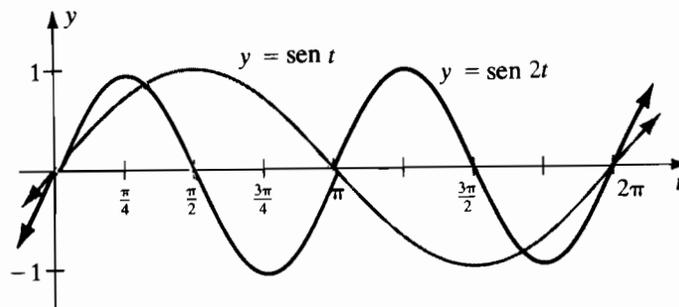


FIGURA 23

Los mismos argumentos son válidos para la función coseno, es decir, para $b > 0$, la función $g(t) = \cos bt$ tiene periodo $2\pi/b$.

EJEMPLO 2

Encuentre el periodo de $y = \cos 4t$ y grafique la función.

Solución. Como $b = 4$, vemos que el periodo es $2\pi/4 = \pi/2$. Esto es, que se completa un ciclo de la gráfica en cualquier intervalo de longitud $\pi/2$. Para graficar la función, trazamos un ciclo de la curva coseno en el intervalo $0 \leq t \leq \pi/2$. Luego, como se ve en la figura 24, ampliamos la gráfica por medio de la periodicidad.

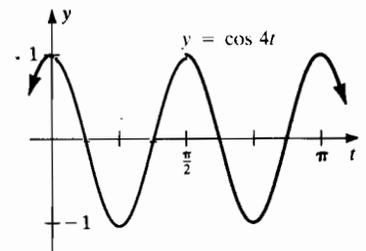


FIGURA 24

Combinando los resultados de los anteriores análisis, tenemos que las gráficas de $y = a \sin bt$ y $y = a \cos bt$, $b > 0$ tiene cada una

$$\text{amplitud} = |a| \quad \text{y} \quad \text{periodo} = \frac{2\pi}{b}$$

Si $b > 0$ en $y = a \text{ sen } bt$ o $y = a \text{ cos } bt$, nos valemos de las propiedades

$$\text{sen}(-t) = -\text{sen } t \quad \text{o} \quad \text{cos}(-t) = \text{cos } t$$

para reformular la expresión en la forma más adecuada con un b positivo. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Encuentre la amplitud y el periodo de $y = \text{sen}(-\frac{1}{2}t)$. Grafique.

Solución. Como necesitamos $b > 0$, usamos $\text{sen}(-t) = -\text{sen } t$ para escribir

$$y = \text{sen}(-\frac{1}{2}t) = -\text{sen } \frac{1}{2}t$$

Se deduce que la amplitud es $|a| = |-1| = 1$. Como $b = 1/2$, el periodo es $2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$. Por consiguiente, la gráfica de la función dada completa un ciclo en el intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$. En la figura 25, la curva en color es la gráfica de $y = -\text{sen } \frac{1}{2}t$, y es reflejo del eje horizontal de la gráfica de $y = \text{sen } \frac{1}{2}t$, en negro.

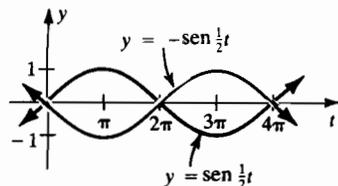


FIGURA 25

EJEMPLO 4

Grafique $y = \frac{5}{2} \text{ sen } 2\pi t$.

Solución. La amplitud es $\frac{5}{2}$ y el periodo es $2\pi/2\pi$. Así que la función completa un ciclo en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ (véase figura 26). El valor máximo $y = \frac{5}{2}$ se da cuando $t = \frac{1}{4}$, y el valor mínimo $y = -\frac{5}{2}$ corresponde a $t = \frac{3}{4}$.

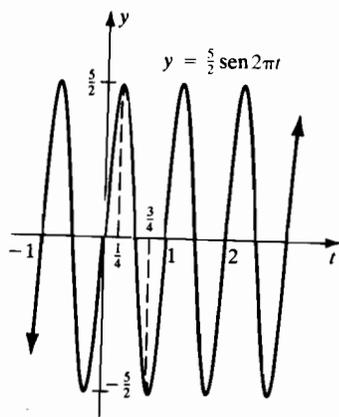


FIGURA 26

Nótese que no hay amplitud asociada con $y = \text{tan } t$, $y = \text{cot } t$, $y = \text{sec } t$ o $y = \text{csc } t$, pues sus gráficas no son acotadas. Sin embargo, las coordenadas y de puntos en la gráfica de $y = a \text{ tan } t$ pueden obtenerse aun multiplicando las coordenadas y de puntos en la gráfica de $y = \text{tan } t$ por a . Esto también es válido para $y = a \text{ cot } t$, $y = a \text{ sec } t$ y $y = a \text{ csc } t$.

Las funciones $y = \text{sec } bt$ y $y = \text{csc } bt$, $b > 0$, cada una tiene un periodo $2\pi/b$, mientras que las funciones $y = \text{tan } bt$ y $y = \text{cot } bt$, $b > 0$ cada una tiene un periodo de π/b (véanse problemas 51 al 54).

DESPLAZAMIENTO DE FASE

Ahora consideremos la gráfica de $y = a \text{ sen}(bt + c)$, para $b > 0$. Como los valores de $\text{sen}(bt + c)$ van de -1 a 1 , se deduce que la **amplitud** de $y = a \text{ sen}(bt + c)$ es $|a|$. A medida que $bt + c$ varíe de 0 a 2π , la gráfica completará un ciclo. Despejando $bt + c = 0$ y $bt + c = 2\pi$, encontramos que se completa un ciclo a medida que t varía de $-c/b$ a $(2\pi - c)/b$. Por tanto, $y = a \text{ sen}(bt + c)$ tiene un **periodo** de

$$\frac{2\pi - c}{b} - \left(-\frac{c}{b}\right) = \frac{2\pi}{b}$$

Si reformulamos $y = a \text{ sen}(bt + c)$ como $y = a \text{ sen } b(t + c/b)$, vemos que la gráfica de $y = a \text{ sen}(bt + c)$ puede obtenerse *trasladando* la gráfica de $y = a \text{ sen } bt$ horizontalmente

una distancia de $|c|/b$. Si $c < 0$, el cambio es a la derecha, pero si $c > 0$, el cambio es a la izquierda. El número $-c/b$ se llama **desplazamiento de fase** de la gráfica de $y = a \text{ sen}(bt + c)$.

EJEMPLO 5

Grafique $y = 3 \text{ sen}(2t - \pi/3)$ trasladando la gráfica de $y = 3 \text{ sen } 2t$.

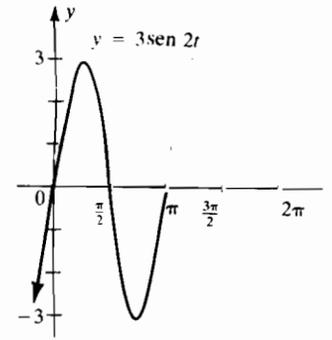
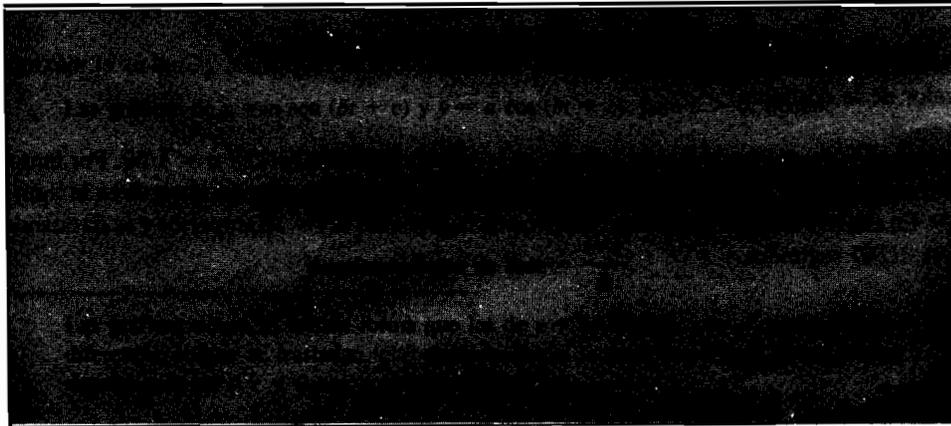
Solución. La amplitud de $y = 3 \text{ sen } 2t$ es $|a| = 3$ y el periodo es $2\pi/2 = \pi$. Es decir, que se completa un ciclo en el intervalo $0 \leq t \leq \pi$. Entonces, extendemos la gráfica más allá de este intervalo por medio de la periodicidad, como se ve en la figura 27(a).

Volviendo a escribir $y = 3 \text{ sen}(2t - \pi/3)$ como

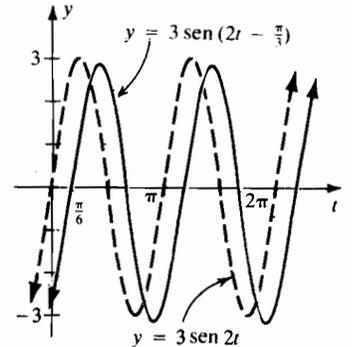
$$y = 3 \text{ sen } 2(t - \pi/6)$$

vemos que podemos obtener la gráfica de esta función trasladando la gráfica de $y = 3 \text{ sen } 2t$ $\pi/6$ unidades a la derecha. (Véase figura 27(b)).

Un análisis similar al anterior puede hacerse para la gráfica de $y = a \text{ cos}(bt + c)$. Resumimos los resultados de la siguiente manera:



(a)



(b)

FIGURA 27

EJEMPLO 6

Determine la amplitud, el periodo, el desplazamiento de fase y su dirección para cada uno de los siguientes casos:

(a) $y = 15 \text{ cos}\left(5t - \frac{3\pi}{2}\right)$ (b) $y = 10 \text{ sen}\left(-2t - \frac{\pi}{6}\right)$

Solución

- (a) Primero hacemos la identificación $a = 15$, $b = 5$ y $c = -3\pi/2$. Así, la amplitud es $|a| = 15$, el periodo es $2\pi/b = 2\pi/5$ y el desplazamiento de fase es $-c/b = -(-3\pi/2)/5 = 3\pi/10$. Como $c = -3\pi/2 < 0$, sabemos que la gráfica de $y = 15 \text{ cos}(5t - 3\pi/2)$ es la gráfica de $y = 15 \text{ cos } 5t$ desplazada $3\pi/10$ unidades hacia la derecha.
- (b) Como necesitamos que $b > 0$, primero utilizamos $\text{sen}(-t) = -\text{sen } t$ para escribir

$$y = 10 \operatorname{sen} \left(-2t - \frac{\pi}{6} \right) = -10 \operatorname{sen} \left(2t + \frac{\pi}{6} \right)$$

Ahora con $a = -10$, $b = 2$ y $c = \pi/6$, encontramos que la amplitud es $|a| = 10$, el periodo es $2\pi/2 = \pi$ y el desplazamiento de fase es $-(\pi/6)/2 = -\pi/12$. Ya que $c = \pi/6 > 0$, la gráfica de $y = -10 \operatorname{sen} 2t$ se desplaza $\pi/12$ unidades a la izquierda.

EJEMPLO 7

Grafique $y = -2 \cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right)$.

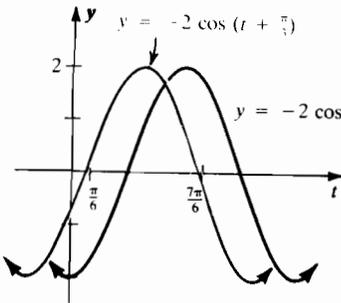


FIGURA 28

Solución. Como $b = 1$ y $c = \pi/3$ el desplazamiento de fase es $-\pi/3$. Entonces, la gráfica que se observa en la figura 28 se obtiene desplazando $\pi/3$ unidades a la izquierda la gráfica de $y = -2 \cos t$, ya que c es positivo. (Usted ya debe saber que la gráfica de $y = -2 \cos t$ se obtiene fácilmente reflejando la gráfica de $y = 2 \cos t$ en el eje horizontal).

EJEMPLO 8

La corriente i (medida en amperios) en un cable de un circuito de corriente alterna se da por

$$i(t) = 30 \operatorname{sen} 120\pi t$$

donde el tiempo t se mide en segundos. Trace un ciclo de la gráfica. ¿Cuál es el máximo valor de la corriente?

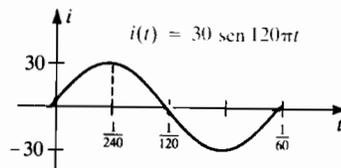


FIGURA 29

Solución. La gráfica tiene una amplitud de 30 y un periodo $2\pi/120\pi = 1/60$. Por tanto, trazamos un ciclo en la curva de seno en el intervalo $[0, 1/60]$, como se observa en la figura 29. En ella es evidente que el valor máximo de la corriente es $i = 30$ amperios y se da cuando $t = 1/240$ segundos.

En los problemas 1 al 6, determine la amplitud y el periodo, y trace las gráficas del par de funciones dadas en el mismo sistema de coordenadas. (Asegúrese de observar las diferencias y semejanzas en ambas gráficas).

1. (a) $y = 4 \operatorname{sen} t$; (b) $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} t$
2. (a) $y = 3 \cos t$; (b) $y = \frac{1}{3} \cos t$
3. (a) $y = \operatorname{sen} 4t$; (b) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{4}t$
4. (a) $y = \cos 3t$; (b) $y = \cos \frac{1}{3}t$
5. (a) $y = \cos 2\pi t$; (b) $y = \cos 2t$
6. (a) $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}t$; (b) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{4}t$

En los problemas 7 al 12 se indica un ciclo de la gráfica de $y = a \operatorname{sen} bt$ o $y = a \cos bt$. Identifique la función.

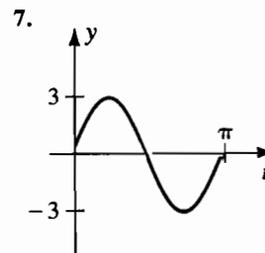


FIGURA 30

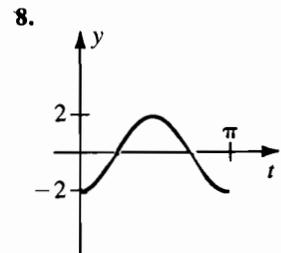


FIGURA 31

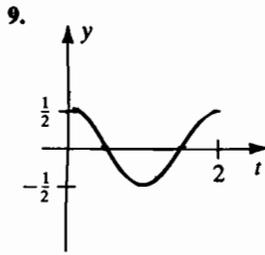


FIGURA 32

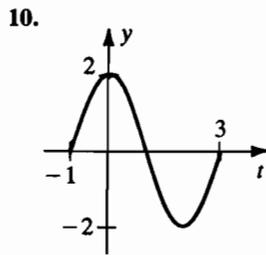


FIGURA 33

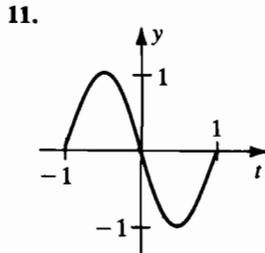


FIGURA 34

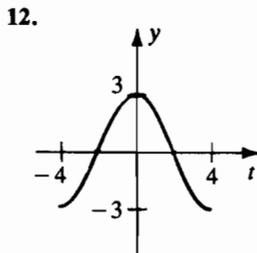


FIGURA 35

En los problemas 13 al 26, determine la amplitud y el periodo y trace la gráfica de cada función.

- | | |
|-------------------------------|---|
| 13. $y = 4 \cos t$ | 14. $y = -2 \cos t$ |
| 15. $y = -\frac{1}{2} \sin t$ | 16. $y = \frac{3}{2} \sin t$ |
| 17. $y = 2 \cos 2t$ | 18. $y = \cos \frac{1}{4}t$ |
| 19. $y = 4 \sin(-t)$ | 20. $y = 2 \sin 4t$ |
| 21. $y = 5 \cos 2\pi t$ | 22. $y = \frac{1}{2} \cos \pi t$ |
| 23. $y = \sin \frac{2}{3}t$ | 24. $y = \cos\left(-\frac{1}{2}t\right)$ |
| 25. $y = -3 \sin(-2t)$ | 26. $y = -4 \cos\left(-\frac{\pi}{2}t\right)$ |

En los problemas 27 al 30, encuentre las variaciones en las funciones seno y coseno que satisfagan las condiciones dadas. Grafique las funciones.

- 27. Amplitud 3, periodo $2\pi/3$, desplazamiento de fase $\pi/3$
- 28. Amplitud $2/3$, periodo π , desplazamiento de fase $-\pi/4$
- 29. Amplitud 0,7, periodo 0,5, desplazamiento de fase 4
- 30. Amplitud $5/4$, periodo 4, desplazamiento de fase $-1/2\pi$

En los problemas 31 al 46, trace la gráfica de la función dada. Si es apropiado, determine la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

- | | |
|--|--|
| 31. $y = \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$ | 32. $y = \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$ |
| 33. $y = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ | 34. $y = -2 \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$ |
| 35. $y = 4 \cos\left(2t - \frac{3\pi}{2}\right)$ | 36. $y = 3 \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ |

- | | |
|--|---|
| 37. $y = 3 \sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ | 38. $y = -\cos\left(\frac{t}{2} - \pi\right)$ |
| 39. $y = 5 \cos\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$ | 40. $y = 2 \sin\left(-t + \frac{\pi}{8}\right)$ |
| 41. $y = 2 \cos\left(-4t - \frac{4\pi}{3}\right)$ | 42. $y = 5 \sin(\pi t - 1)$ |
| 43. $y = \tan \pi t$ | 44. $y = \cot \frac{\pi}{2}t$ |
| 45. $y = 3 \sec \frac{1}{2}t$ | 46. $y = -\csc 2t$ |

- 47. Escriba la función $y = -4 \sin 3t$ en la forma $y = a \cos(bt + c)$, $a > 0$.
- 48. ¿La función $y = t \sin t$ es periódica?
- 49. Encuentre el periodo de $y = \sin \frac{1}{2}t + \sin 2t$.
- 50. ¿Para qué valor de d la gráfica de $y = a \cos(bt + d)$ es la misma de $y = a \sin(bt + c)$?
- 51. Verifique que el periodo de $y = \tan bt$ para $b > 0$ sea π/b .
- 52. Verifique que el periodo de $y = \cot bt$ para $b > 0$ sea π/b .
- 53. Verifique que el periodo de $y = \sec bt$ para $b > 0$ sea $2\pi/b$.
- 54. Verifique que el periodo de $y = \csc bt$ para $b > 0$ sea $2\pi/b$.
- 55. El desplazamiento angular θ de un péndulo que oscila de la vertical en un tiempo t segundos se da por $\theta = \theta_0 \cos \omega t$, en donde θ_0 es el desplazamiento inicial en $t = 0$ segundos (véase figura 36). Para $\omega = 2$ radianes/segundo y $\theta_0 = \pi/10$, trace dos ciclos de la gráfica de la función que resulte.

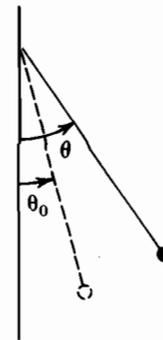


FIGURA 36

- 56. En un circuito eléctrico, la corriente I medida en amperios en un tiempo de t segundos se da por

$$I(t) = 10 \cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Trace dos ciclos de la gráfica de I como una función de tiempo t .

- 57. La profundidad del agua a la entrada de un pequeño puerto en un tiempo t se da por

$$y = a \sin\left(b\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + k\right)$$

de donde a es la mitad de la diferencia entre las profundidades de la marea alta y la baja, $2\pi/b$ es el periodo de la marea y k es el promedio de profundidad. Supongamos que el periodo de

la marejada es de 12 horas, la profundidad de la marea alta es de 18 pies y de la marea baja de 6 pies. Trace dos ciclos de la gráfica.

Después de que un peso se ha atado a un resorte, lo estirará hasta alcanzar una posición de equilibrio o reposo. Si el peso es halado A cm más abajo de la posición de equilibrio y se suelta cuando $t = 0$ segundos, en condiciones apropiadas rebotará A cm a cada lado de la posición de equilibrio, tomándose $\pi/2$ segundos para completar un ciclo. De la figura 37 determine la distancia y dé la posición de equilibrio como una función de tiempo t .

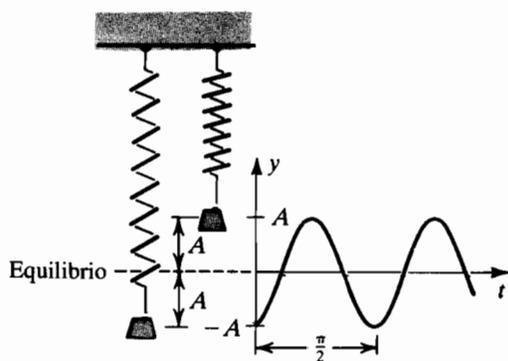


FIGURA 37

59. Las funciones trigonométricas de la forma $y = a + b \sin \omega(t - t_0)$, en donde a , b , ω y t_0 son constantes reales, se usan con frecuencia para simular la variación en la temperatura. Suponga que

$$F(t) = 60 + 10 \sin \frac{\pi}{12}(t - 8), \quad 0 \leq t \leq 24$$

da la temperatura Fahrenheit F a t horas después de la medianoche de cierto día.

- (a) ¿Cuál es la temperatura a las 8:00 a.m.?, ¿y a las 12:00 del mediodía?
 (b) ¿En qué momento $F(t) = 60$?
 (c) Trace la gráfica de F .
 (d) Encuentre las temperaturas máximas y mínimas y los tiempos en que se dan.

60. La sensación del sonido se produce cuando el oído humano detecta variaciones periódicas en la presión del aire producidas por una onda sonora en el tímpano. Si ésta es una variación armónica simple, entonces el sonido se percibe como *tono puro*. El sonido producido por un diapason que vibra a 256 ciclos por segundo se identifica como medio C . Si la presión de la amplitud es 0.2 dinas por centímetro cuadrado, la onda sonora puede describirse por

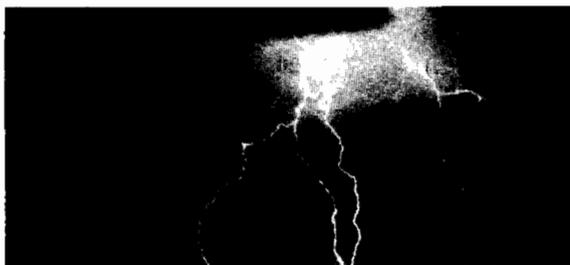
$$y = 0.2 \sin 512 \pi t$$

donde y es la diferencia (en dinas por centímetro cuadrado) entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano en t segundos. Trace dos ciclos de la gráfica.

61. La mayoría de destellos producidos por relámpagos van de nube a nube y sólo algunos van de una nube a tierra. La razón a la que se produce este tipo de destellos parece depender de la latitud. Algunos estudios empíricos han concluido que la razón de los destellos nube a nube en una tormenta N_c y los destellos nube a tierra N_g se aproxima por

$$\frac{N_c}{N_g} = 4.16 + 2.16 \cos 3\phi$$

donde ϕ es la latitud (limitada a regiones no polares $0^\circ \leq \phi \leq 60^\circ$). Grafique esta razón para las latitudes $0^\circ \leq \phi \leq 60^\circ$.



7.4 Identidades trigonométricas

Recordemos de la sección 2.1 que una ecuación como

$$2(x - 1) = 2x - 2$$

que es válida para todos los números reales x , se llama **identidad**. Una ecuación como

$$\frac{x^2 - 4x}{x} = x - 4$$

también es llamada identidad, ya que es válida para todos los números reales para los que ambos lados de la ecuación están definidos en este caso, todo $x \neq 0$. La ecuación trigonométrica

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\tan t} = \cos t$$

es una identidad porque

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} t}{\tan t} &= \frac{\operatorname{sen} t}{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}} \\ &= \operatorname{sen} t \left(\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \right) \\ &= \cos t \end{aligned}$$

para todos los números reales t para el que t está definido y $\tan \neq 0$.

Hay muchas identidades que tienen que ver con las funciones trigonométricas. Las más importantes son las identidades fundamentales que se introdujeron en la sección 6.2 y 6.4 y que se reformulan aquí. En este resumen también incluimos las identidades pares e impares que se analizaron en las secciones 7.1 y 7.2. La variable t puede representar en cada identidad un número real o la medida en grados o radianes de un ángulo.

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

PITAGORICA	COCIENTE	RECIPROCA
$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$	$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$	$\sec t = \frac{1}{\cos t}$
$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$	$\cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$	$\operatorname{csc} t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$
$\cot^2 t + 1 = \operatorname{csc}^2 t$		$\cot t = \frac{1}{\tan t}$

IDENTIDADES PARES E IMPARES

$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t,$	$\cos(-t) = \cos t,$	$\tan(-t) = -\tan t$
$\operatorname{csc}(-t) = -\operatorname{csc} t,$	$\sec(-t) = \sec t,$	$\cot(-t) = -\cot t$

Estas identidades pueden utilizarse para simplificar expresiones trigonométricas complicadas.

EJEMPLO 1 _____

Escriba como una sola función trigonométrica:

$$\operatorname{sen} t \sec t$$

Solución. Usando la identidad recíproca $\sec t = 1/\cos t$, encontramos que

$$\operatorname{sen} t \sec t = \operatorname{sen} t \frac{1}{\cos t} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \tan t$$

Con frecuencia encontraremos variaciones de las identidades pitagóricas. Por ejemplo, de $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, obtenemos

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \quad \text{y} \quad \cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$$

Formas alternas de escribir las otras identidades pitagóricas son

$$\tan^2 t = \sec^2 t - 1 \quad \text{y} \quad \cot^2 t = \csc^2 t - 1$$

EJEMPLO 2 _____

Simplifique $(1 + \operatorname{sen} t)(1 + \operatorname{sen}(-t))$.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} (1 + \operatorname{sen} t)(1 + \operatorname{sen}(-t)) &= (1 + \operatorname{sen} t)(1 - \operatorname{sen} t) && \leftarrow \text{Por } \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \\ &= 1 - \operatorname{sen}^2 t && \leftarrow \text{Por álgebra} \\ &= \cos^2 t && \leftarrow \text{De } \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 _____

Simplifique $\csc^2 t - \cot^2 t$.

Solución. De $\cot^2 t + 1 = \csc^2 t$, vemos que

$$\csc^2 t - \cot^2 t = 1$$

Podemos utilizar las identidades fundamentales y valernos del álgebra para verificar una identidad, demostrando que las expresiones dadas son equivalentes. El método preferido para verificar una identidad es mostrar que un lado de la ecuación es equivalente al otro, como en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 4 _____

Verifique la identidad

$$\sec^2 t + \csc^2 t = \sec^2 t \csc^2 t$$

Solución. Demostramos que el lado izquierdo de la ecuación es equivalente al lado derecho:

$$\begin{aligned} \sec^2 t + \csc^2 t &= \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} && \leftarrow \text{Identidades fundamentales} \\ &= \frac{1}{\cos^2 t} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} \left(\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} \right) && \leftarrow \text{Mínimo común denominador} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t \sin^2 t} && \leftarrow \text{Sumando} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 t \sin^2 t} && \leftarrow \text{Identidad fundamental} \\
 &= \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin t}\right)^2 && \leftarrow \text{Por álgebra} \\
 &= \sec^2 t \csc^2 t && \leftarrow \text{Identidades fundamentales}
 \end{aligned}$$

En el ejemplo 4 está implícita la suposición de que la identidad es válida sólo para aquellos valores de t cuyos lados de la identidad estén definidos. En el ejemplo 4 para un número real t , necesitamos que $t \neq k\pi$ y $t \neq \pi/2 + k\pi$, donde k es un número entero. En los siguientes ejemplos, no mencionaremos las limitaciones de la variable.

EJEMPLO 5 _____

Verifique la identidad

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{\tan \theta + \cot \theta}$$

Solución. Demostremos que el lado derecho de la ecuación es equivalente al lado izquierdo. (Usted debe justificar el porqué de cada paso).

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tan \theta + \cot \theta} &= \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \\
 &= \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}} \\
 &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \\
 &= \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

No hay un método general para demostrar que una ecuación trigonométrica sea una identidad. A continuación enumeramos algunas técnicas que pueden resultar útiles.



EJEMPLO 6 _____

Verifique la identidad

$$\sin x + \sin x \cot^2 x = \cos x \csc x \sec x$$

Solución. Comenzamos simplificando el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cot^2 x &= \operatorname{sen} x (1 + \cot^2 x) \\ &= \operatorname{sen} x (\operatorname{csc}^2 x) \\ &= \frac{1}{\operatorname{csc} x} \operatorname{csc}^2 x \\ &= \operatorname{csc} x\end{aligned}$$

Como hemos llegado a tan simple expresión, tratamos de reducir el lado derecho a la misma expresión:

$$\begin{aligned}\cos x \operatorname{csc} x \sec x &= \cos x \operatorname{csc} x \frac{1}{\cos x} \\ &= \operatorname{csc} x\end{aligned}$$

Como ambos lados de la ecuación dada son equivalentes a $\operatorname{csc} x$, también lo son entre sí. Por tanto, la ecuación es una identidad.

Como lo ilustra el ejemplo 6, otra técnica para verificar una identidad es reducir cada lado de la ecuación por separado a la misma expresión.

Nota de advertencia: con el fin de verificar una identidad trigonométrica, necesitamos demostrar que las expresiones dadas son equivalentes. Nótese que en los tres ejemplos anteriores trabajamos de manera independiente con las expresiones de cada lado, para demostrar que son equivalentes. Esta es la práctica estándar para verificar las identidades trigonométricas. La misma operación algebraica no debe realizarse para ambos lados de la ecuación simultáneamente. En otras palabras, no trate una ecuación trigonométrica como si fuera una identidad hasta que haya probado que realmente lo es.

Para demostrar que una ecuación no es una identidad, sólo necesitamos encontrar un valor en el dominio de la variable para la cual la ecuación no sea verdadera. Como se observa en el siguiente ejemplo, esto suele ser un proceso de ensayo y error.

EJEMPLO 7

Demuestre que

$$(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 = 1$$

no es una identidad.

Solución. Para $t = 0$, ambos lados de la ecuación están definidos y obtenemos $(0 + 1)^2 = 1$, lo cual es verdad. Esto no afirma ni refuta que la ecuación sea una identidad. Como esperamos demostrar que *no* es una identidad, ensayamos otro valor para t . Puede ser $t = \pi/4$, y encontramos que el lado izquierdo es

$$\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

lo cual no equivale al lado derecho, 1. En consecuencia, la ecuación no es una identidad, pues hemos demostrado que no es verdad, al menos para un valor de t , a saber, $t = \pi/4$.

En cálculo suele ser útil hacer una **sustitución trigonométrica** para cambiar la forma de ciertas expresiones que tienen radicales. El siguiente ejemplo ilustra la técnica usada.

EJEMPLO 8

Reformule $\sqrt{a^2 - x^2}$ como expresión trigonométrica sin radicales haciendo la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, en donde $a > 0$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Solución. Si tomamos $x = a \operatorname{sen} \theta$, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta}\end{aligned}$$

Ya que $a > 0$ y $\cos \theta \geq 0$ para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, tenemos

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta$$

Si bien muchas de las identidades consideradas en esta sección no son particularmente importantes en sí, lo que sí es importante es la facilidad que usted adquiera para simplificar y manejar las expresiones trigonométricas. Esta es primordial para destrezas más avanzadas en matemáticas, ciencias e ingeniería.

EJERCICIO 7.4

En los problemas 1 al 10, simplifique la expresión mediante las identidades fundamentales y las identidades pares e impares.

1. $\sec t \cos t$
2. $\tan \alpha \cos \alpha$
3. $\frac{\operatorname{sen} \theta}{\csc \theta} + \frac{\cos \theta}{\sec \theta}$
4. $\frac{\csc^2 x - 1}{\cot x}$
5. $\tan^2 t - \sec^2 t$
6. $1 + \tan^2(-\theta)$
7. $\operatorname{sen}(-t) + \operatorname{sen} t$
8. $\cos^2 t + \frac{1}{\csc^2 t}$
9. $\sec(-x) \cos x$
10. $1 + \frac{\cot \beta}{\tan \beta}$

En los problemas 11 al 20, reduzca la expresión dada a una sola función trigonométrica.

11. $\frac{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t}{1 + \cos t}$
12. $\cos x + \cos x \tan^2 x$
13. $\frac{\sec^2 \alpha - 1}{\tan \alpha}$
14. $\frac{\tan t + \cot t}{\csc t}$
15. $\operatorname{sen} x + \cos x \cot x$
16. $\frac{\operatorname{sen} \theta \tan \theta \csc^2 \theta - \operatorname{sen} \theta \tan \theta}{\sec^2 \alpha}$
17. $\frac{\sec^2 \alpha}{\cos \alpha + \cos \alpha \tan^2 \alpha}$
18. $\frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta - \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$
19. $\operatorname{sen} t \cos t \tan t \sec t \cot t$

$$20. \frac{\operatorname{sen} \alpha \tan \alpha}{\csc \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sec \alpha}$$

En los problemas 21 al 60, verifique la identidad.

21. $\frac{\operatorname{sen} t}{\csc t} = 1 - \frac{\cos t}{\sec t}$
22. $\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x + \tan x$
23. $1 - \cos^4 \theta = (2 - \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen}^2 \theta$
24. $\frac{1 + \tan t}{\tan t} = \cot t + \sec^2 t - \tan^2 t$
25. $1 - 2 \operatorname{sen}^2 t = 2 \cos^2 t - 1$
26. $\tan^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta = \tan^2 \beta \operatorname{sen}^2 \beta$
27. $\frac{\sec z - \csc z}{\sec z + \csc z} = \frac{\tan z - 1}{\tan z + 1}$
28. $\frac{\operatorname{sen} t + \tan t}{1 + \cos t} = \tan t$
29. $\frac{\sec^4 t - \tan^4 t}{1 + 2 \tan^2 t} = 1$
30. $\frac{1 + \operatorname{sen} t}{\cos t} + \frac{\cos t}{1 + \operatorname{sen} t} = 2 \sec t$
31. $\operatorname{sen}^2 x \cot^2 x + \cos^2 x \tan^2 x = 1$
32. $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha + \csc \alpha} = \operatorname{sen}^2 \alpha \sec \alpha$
33. $\sec t - \frac{\cos t}{1 + \operatorname{sen} t} = \tan t$

$$34. \frac{1}{\sec t - \tan t} = \sec t + \tan t$$

$$35. \frac{\tan^2 \beta}{1 + \cos \beta} = \frac{\sec \beta - 1}{\cos \beta}$$

$$36. \frac{\tan^2 t - 1}{\sec t + \cos t} = \frac{\sec t - \cos t}{\cos^2 t}$$

$$37. (\csc t - \cot t)^2 = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$$

$$38. \cos \theta - \sec \theta + \csc \theta = \frac{\sec \theta + \cos \theta}{\tan \theta}$$

$$39. 1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{\tan^2 x}{\sec x - 1}$$

$$40. \frac{\tan t + \cot t}{\cos^2 t} - \sec t \sec^3 t = \sec t \csc t$$

$$41. \frac{\cot t - \tan t}{\cot t + \tan t} = 1 - 2\sec^2 t$$

$$42. \frac{1 + \sec t}{\sec t + \tan t} = \csc t$$

$$43. \cos(-t) \csc(-t) = -\cot t$$

$$44. \frac{\tan(-t)}{\sec(-t)} = \sec t$$

$$45. \sqrt{\frac{1 + \sec \theta}{1 - \sec \theta}} = \frac{1 + \sec \theta}{|\cos \theta|}$$

$$46. \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{|\sec \alpha|}{1 - \cos \alpha}$$

$$47. \ln |\tan \theta| = \ln |\sec \theta| - \ln |\cos \theta|$$

$$48. \ln(\sec^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$49. \ln |\csc x - \cot x| = -\ln |\csc x + \cot x|$$

$$50. \ln |\sec x - \tan x| = -\ln |\sec x + \tan x|$$

$$51. \left(\frac{\sec^2 \theta}{\cot^4 \theta}\right)^4 \cdot \left(\frac{\csc \theta}{\tan^2 \theta}\right)^8 = 1$$

$$52. \frac{\cos^3 x + \sec^3 x}{\cos x + \sec x} = 1 - \cos x \sec x$$

$$53. (\tan^2 t + 1)(\cos^2 t - 1) = 1 - \sec^2 t$$

$$54. \frac{1}{1 - \cos \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 2 \csc^2 \alpha$$

$$55. (1 - \tan \beta)^2(1 + \tan \beta)^2 + 4 \tan^2 \beta = \sec^4 \beta$$

$$56. \frac{\cos(-t)}{1 + \tan(-t)} - \frac{\sec(-t)}{1 + \cot(-t)} = \sec t + \cos t$$

$$57. \frac{\sec \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta} = \cos \theta + \sec \theta$$

$$58. \sec^6 t + \cos^6 t = 1 - 3 \sec^2 t \cos^2 t$$

$$59. \csc^4 t - \csc^2 t = \cot^4 t + \cot^2 t$$

$$60. \frac{\tan x - \cot x}{\sec x \cos x} = \sec^2 x - \csc^2 x$$

En los problemas 61 al 70, demuestre que la ecuación trigonométrica dada no es una identidad.

$$61. \sec t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$$

$$62. \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$$

$$63. 1 + \sec^2 \theta = \tan^2 \theta$$

$$64. \sec x = 1 - \cos x$$

$$65. \cot^2 t + \csc^2 t = 1$$

$$66. 1 + \sec^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$67. \sec(\csc \theta) = 1$$

$$68. \tan(\cot \alpha) = \alpha$$

$$69. \cos(-x) = -\cos x$$

$$70. \ln \left| \frac{1}{\sec x} \right| = \frac{1}{\ln |\sec x|}$$

En los problemas 71 al 80, reformule la expresión dada como una expresión trigonométrica sin radicales, haciendo las sustituciones indicadas. Suponga que $a > 0$.

$$71. \sqrt{a^2 - x^2}, x = a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$72. \sqrt{a^2 + x^2}, x = a \tan \theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$73. \sqrt{x^2 - a^2}, x = a \sec \theta, 0 \leq \theta < \pi/2$$

$$74. \sqrt{16 - 25x^2}, x = (4/5) \sec \theta, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$75. \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}, x = 3 \sec \theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$76. x^2 \sqrt{x^2 - 4}, x = 2 \sec \theta, 0 \leq \theta < \pi/2$$

$$77. \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2}, x = \sqrt{3} \sec \theta, 0 < \theta < \pi/2$$

$$78. (36 + x^2)^{3/2}, x = 6 \tan \theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$79. \frac{1}{\sqrt{7 + x^2}}, x = \sqrt{7} \tan \theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

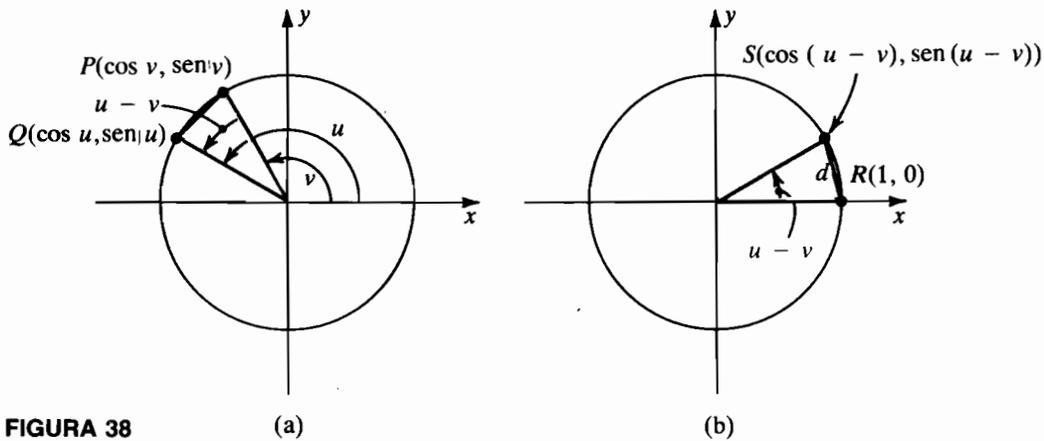
$$80. \frac{\sqrt{5 - x^2}}{x}, x = \sqrt{5} \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$$

7.5 Fórmulas de la suma y de la diferencia

Las fórmulas que deduciremos en esta sección nos permitirán expresar ciertos tipos de expresiones trigonométricas en formas más simples o más útiles. Estas fórmulas son muy

importantes en cálculo y en las ciencias físicas. Aunque las deducciones utilizan ángulos, las aplicaciones a otros campos tienen que ver en general con las funciones trigonométricas de los números reales.

Las **fórmulas de la suma y de la diferencia** para las funciones seno y coseno reducen $\cos(u + v)$, $\cos(u - v)$, $\sen(u + v)$ y $\sen(u - v)$ a expresiones que tienen que ver con $\cos u$, $\cos v$, $\sen u$ y $\sen v$. Primero obtenemos la fórmula para $\cos(u - v)$ y luego la utilizamos para obtener las demás.



Para obtener la fórmula para $\cos(u - v)$, sean u y v ángulos como los muestra la figura 38(a). Si colocamos el ángulo $u - v$ en posición normal, como se observa en la figura 38(b), tenemos que la distancia d desde R hasta S equivale a la distancia desde P hasta Q , como se ve en la figura 38(a). Los cuadrados de estas distancias son iguales, es decir,

$$[d(P, Q)]^2 = [d(R, S)]^2$$

Utilizando la fórmula de distancia, tenemos

$$(\cos u - \cos v)^2 + (\sen u - \sen v)^2 = (\cos(u - v) - 1)^2 + \sen^2(u - v),$$

o

$$\begin{aligned} \cos^2 u - 2 \cos u \cos v + \cos^2 v + \sen^2 u - 2 \sen u \sen v + \sen^2 v \\ = \cos^2(u - v) - 2 \cos(u - v) + 1 + \sen^2(u - v). \end{aligned}$$

Ya que $\cos^2 u + \sen^2 u = 1$, $\cos^2 v + \sen^2 v = 1$, y $\cos^2(u - v) + \sen^2(u - v) = 1$, la ecuación anterior se simplifica

$$2 - 2 \cos u \cos v - 2 \sen u \sen v = 2 - 2 \cos(u - v)$$

obteniendo el siguiente resultado



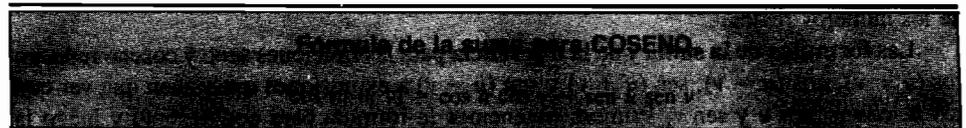
Para obtener la fórmula de adición para $\cos(u + v)$, escribimos

$$\begin{aligned} \cos(u + v) &= \cos(u - (-v)) \\ &= \cos u \cos(-v) + \sen u \sen(-v) \end{aligned}$$

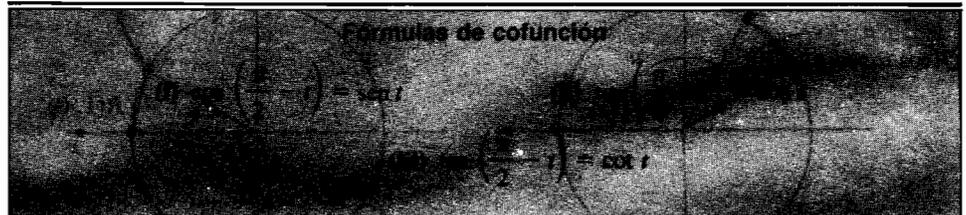
Utilizando las identidades par e impar

$$\cos(-v) = \cos v \quad \text{y} \quad \sen(-v) = -\sen v.$$

tenemos ahora lo siguiente



En la sección 7.1 analizamos las siguientes fórmulas de cofunción para $0 < t < \pi/2$, considerando las coordenadas de un punto en una circunferencia unitaria.



Probemos ahora estas fórmulas para cualquier número real t (o ángulo t medido en radianes). Recordemos que si el ángulo t se mide en grados, entonces $\pi/2$ debe remplazarse por 90° en las fórmulas de cofunción.

Para verificar (i) aplicamos la fórmula de la diferencia para $\cos(u - v)$ a $\cos(\pi/2 - t)$:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos\frac{\pi}{2} \cos t + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t = 0 \cdot \cos t + 1 \cdot \operatorname{sen} t \\ &= \operatorname{sen} t\end{aligned}$$

Para probar (ii) remplacemos t por $\pi/2 - t$ en (i) y obtenemos

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

o

$$\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

como deseábamos.

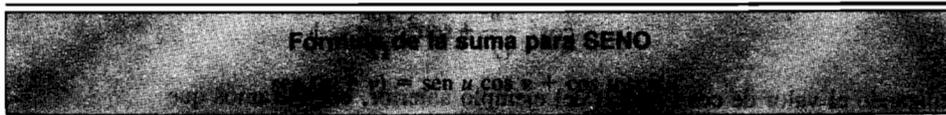
Y finalmente,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \cot t$$

Utilizando la fórmula (i) podemos ahora deducir las fórmulas de la suma y de la diferencia para seno:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(u + v) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (u + v)\right] \leftarrow \text{Fórmula de cofunción} \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cos v + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \operatorname{sen} v \leftarrow \text{Fórmula de la diferencia para el coseno} \\ &= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v\end{aligned}$$

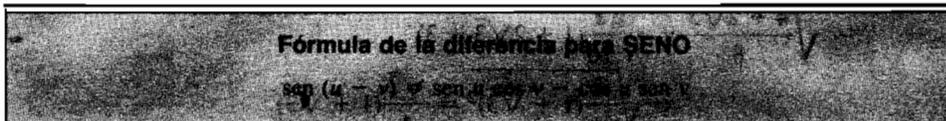
El resultado se resume de la siguiente manera:



Escribiendo $u - v$ en la forma $u + (-v)$ y usando la fórmula de la suma para seno, obtenemos

$$\begin{aligned}\sin(u - v) &= \sin(u + (-v)) = \sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v) \\ &= \sin u \cos v - \cos u \sin v.\end{aligned}$$

que verifica lo siguiente:



Estas fórmulas de la suma y de la diferencia pueden utilizarse para encontrar los valores exactos de las funciones seno y coseno de los ángulos o números que puedan estar representados como sumas o diferencias de $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$, $2\pi/3$ y así sucesivamente. Por ejemplo, podemos calcular los valores precisos del seno y coseno para ángulos como $\pi/12 = 15^\circ$, $5\pi/12 = 75^\circ$ y $7\pi/12 = 105^\circ$ (recordemos que la calculadora o las tablas trigonométricas sólo dan aproximaciones decimales a estos valores).

EJEMPLO 1 _____

Encuentre el valor exacto de $\cos(7\pi/12)$.

Solución. No tenemos forma de evaluar $\cos(7\pi/12)$ directamente. Sin embargo, podemos escribir $\cos(7\pi/12) = \cos(\pi/3 + \pi/4)$. Luego con la fórmula de la suma para el coseno, se deduce que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{3})\end{aligned}$$

También podemos escribir la respuesta así: $(\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$. Nótese que $\cos(7\pi/12) < 0$, tal como se esperaba.

EJEMPLO 2 _____

Evalúe $\sin(7\pi/12)$.

Solución. Usamos la fórmula de la suma para seno de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3})\end{aligned}\quad (3)$$

Este resultado también puede escribirse así: $(\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$.

De manera alterna, podemos obtener el valor de $\sin(7\pi/12)$ de:

$$\cos^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} = 1$$

Utilizando el valor de $\cos (7\pi/12)$ del ejemplo anterior, encontramos que

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{12} &= \sqrt{1 - \cos^2 \frac{7\pi}{12}} = \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3}) \right]^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{8}(1 - 2\sqrt{3} + 3)} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}} \end{aligned}$$

Aunque este número no se parece al resultado obtenido en (3), los valores son los mismos pues,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}} &= \sqrt{\frac{2}{16}(1 + 2\sqrt{3} + 3)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{16}(1 + \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Recordemos de la sección 3.4 que para cualquier función f la expresión

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se llama un cociente diferencia. La identidad del siguiente ejemplo contiene un cociente diferencia, donde $f(x) = \sin x$.

EJEMPLO 3 _____

Verifique que

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right) + \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right)$$

Solución. Aplicando la fórmula de la suma para seno a $\sin(x+h)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \frac{\cos x \sin h + \sin x (\cos h - 1)}{h} \\ &= \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right) + \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) \end{aligned}$$

También hay fórmulas de la suma y de la diferencia para la función tangente:



Deducimos la fórmula de la suma mediante las fórmulas de la suma para seno y coseno, de la siguiente manera:

$$\tan(u + v) = \frac{\sin(u + v)}{\cos(u + v)} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v}$$

Podemos dividir el numerador y el denominador por $\cos u \cos v$, siempre y cuando $\cos u \cos v \neq 0$. (Si $\cos u \cos v = 0$, $\cos u = 0$ ó $\cos v = 0$. En este caso, $\tan u$ o $\tan v$ están indefinidas. Se sigue que la expresión del lado derecho de la fórmula de la suma para tangente tampoco está definida).

Realizando la división, obtenemos

$$\begin{aligned} \tan(u + v) &= \frac{\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) + \left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)}{\left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) - \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)\left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)} \\ &= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \end{aligned}$$

En consecuencia, hemos demostrado que la fórmula de la suma para tangente es válida para todos los valores de u y v para los cuales ambos lados de la ecuación estén definidos.

La deducción de la fórmula de la diferencia para tangente se deja como ejercicio. Véase problema 56.

EJEMPLO 4

Evalúe $\tan(\pi/12)$.

Solución. Con el fin de utilizar las fórmulas de la suma y de la diferencia para obtener un valor exacto, debemos expresar $\pi/12$ como una suma o diferencia de los ángulos especiales 0 , $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ ó $\pi/2$. Mediante el proceso de ensayo y error, encontramos que $\pi/12 = \pi/4 - \pi/6$ y que $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$. Con la primera de estas expresiones y la fórmula de la diferencia para tangente, obtenemos

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{12} &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \quad \leftarrow \text{Racionalizando el denominador} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Usted debe reformular este ejemplo utilizando $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$ para ver que el resultado es el mismo.

EJEMPLO 5 _____

Encuentre el valor exacto de $\tan 105^\circ$.

Solución. Como $105^\circ = 45^\circ + 60^\circ$, utilizamos la fórmula de la suma para tangente para obtener

$$\begin{aligned}\tan 105^\circ &= \tan (45^\circ + 60^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - (1)(\sqrt{3})} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{-2} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{(-2)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{(-2)} = -2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Muchas de las propiedades especiales de las funciones trigonométricas estudiadas en la sección 7.1 pueden verificarse por medio de las fórmulas de la suma y de la diferencia.

EJEMPLO 6 _____

Verifique cada uno de los siguientes casos:

- (a) $\sin(\pi - t) = \sin t$
 (b) $\tan(u + \pi) = \tan u$

Solución

(a) La fórmula de la diferencia para seno nos da

$$\begin{aligned}\sin(\pi - t) &= \sin \pi \cos t - \cos \pi \sin t \\ &= (0)(\cos t) - (-1)(\sin t) = \sin t\end{aligned}$$

(b) Según la fórmula de la suma para tangente tenemos

$$\tan(u + \pi) = \frac{\tan u + \tan \pi}{1 - \tan u \tan \pi} = \tan u$$

pues $\tan \pi = 0$

Una combinación lineal del seno y coseno del mismo valor puede convertirse en una expresión que sólo contenga al seno, de la siguiente manera:

44. Si u es un ángulo del cuadrante II, v es un ángulo del cuadrante III, $\text{sen } u = \frac{4}{5}$ y $\tan v = \frac{3}{4}$, halle (a) $\text{sen}(u + v)$, (b) $\text{sen}(u - v)$, (c) $\text{cos}(u + v)$ y (d) $\text{cos}(u - v)$. ¿En qué cuadrante se sitúa el lado terminal de $u + v$? ¿y el lado terminal de $u - v$?

En los problemas 45 al 48 reformule la ecuación dada en la forma $y = A \text{sen}(bt + \phi)$. Trace la gráfica y determine la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

45. $y = \cos \pi t - \text{sen } \pi t$
 46. $y = \text{sen } \frac{\pi}{2}t - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2}t$
 47. $y = \sqrt{3} \text{sen } 2t + \cos 2t$
 48. $y = \sqrt{3} \cos 4t - \text{sen } 4t$

49. Demuestre que

$$y = a_1 \text{sen } bt + a_2 \cos bt = A \cos(bt + \phi)$$

donde $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\text{sen } \phi = -a_1/A$, y $\text{cos } \phi = a_2/A$.

50. Basándose en el problema 49 reformule cada ecuación dada en los problemas del 45 al 48 en la forma $y = A \cos(bt + \phi)$.
 51. Por medio de ecuaciones diferenciales, puede demostrarse que, en ciertas condiciones, el movimiento de una masa que cuelga de un resorte es dado por

$$y(t) = \frac{3}{4} \cos 8t - \frac{1}{4} \text{sen } 8t$$

donde y es la distancia en pies, por debajo del punto de equilibrio (punto de reposo) en un tiempo de t segundos. Determine a y ϕ tal que $y(t) = a \text{sen}(8t + \phi)$.

52. En ciertas condiciones, la ecuación del movimiento de una cuerda en vibración, estirada entre dos puntos sobre el eje x es

$$y = A \text{sen}(\omega t - kx) - A \text{sen}(\omega t + kx)$$

donde t es el tiempo y A , ω y k son constantes. Demuestre que y puede representarse de la forma equivalente

$$y = -2A \cos \omega t \text{sen } kx$$

53. Considere la presencia de una onda eléctrica que viaja en un plano. Una forma de determinar la dirección de la onda eléctrica es midiendo su hora de llegada en un sistema de estaciones tripartitas, suponiendo que la onda viaja a una velocidad constante. Supongamos que la onda llega a la estación A en un tiempo t_1 , a la estación B en t_2 y a la estación C en t_3 . Sean α , β y γ los ángulos del triángulo formado por las tres estaciones, como se observa en la figura 41. El ángulo ϕ que el frente de la onda forma con la línea AB puede determinarse así:

(a) Demuestre que

$$R = \frac{b \text{sen}(\phi + \alpha)}{c \text{sen } \phi}, \quad \text{donde } R = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}$$

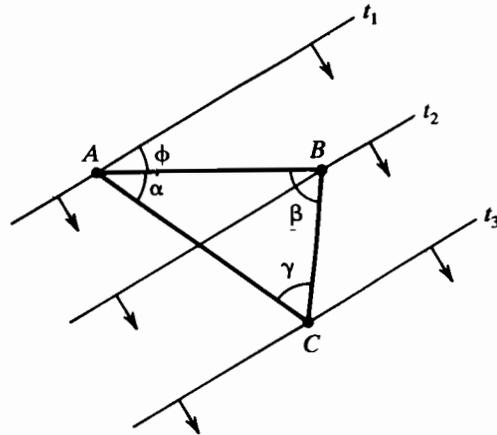


FIGURA 41

(b) Concluya que

$$\cot \phi = \frac{R \text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha \text{sen } \beta} - \cot \alpha$$

(Las estaciones tripartitas se utilizan con frecuencia para localizar la fuente de microsismos, que son pequeños movimientos de la Tierra no causados por terremotos. Los huracanes, por ejemplo son una fuente de microsismos).

54. Un modelo matemático para describir el flujo de la sangre predice que los valores óptimos de los ángulos θ_1 y θ_2 , que representan los ángulos (positivos) de las bifurcaciones con respecto al eje de la rama principal se dan por

$$\cos \theta_1 = \frac{A_0^2 + A_1^2 - A_2^2}{2A_0A_1} \quad \text{y} \quad \cos \theta_2 = \frac{A_0^2 - A_1^2 + A_2^2}{2A_0A_2}$$

donde A_0 es el área del corte transversal de la rama principal y A_1 y A_2 son las áreas del corte transversal de las bifurcaciones (véase figura 42). Sea $\psi = \theta_1 + \theta_2$ el ángulo de la bifurcación como se observa en la figura.

(a) Demuestre que

$$\cos \psi = \frac{A_0^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2}$$

- (b) Demuestre que para los valores óptimos de θ_1 y θ_2 , el área transversal de las bifurcaciones $A_1 + A_2$ es mayor que o igual a la de la rama principal.

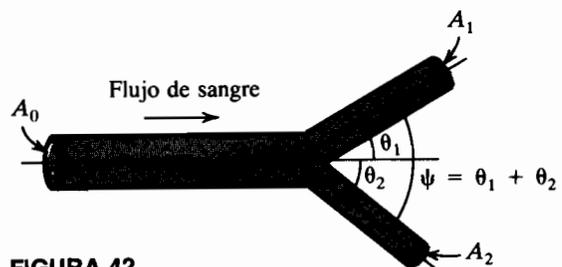


FIGURA 42

(Por tanto, la sangre debe fluir más despacio en las bifurcaciones).

$$\frac{\tan 35^\circ + \tan 55^\circ}{1 - \tan 35^\circ \tan 55^\circ}$$

55. Explique por qué se obtiene un mensaje de error de la calculadora cuando se trata de evaluar

56. Deduzca la fórmula de la diferencia para la función tangente.

7.6 Fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio

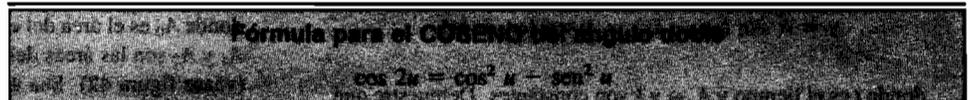
Se pueden obtener muchas fórmulas útiles a partir de las fórmulas de la suma analizadas en la sección anterior. En esta sección las utilizaremos para derivar las **fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio**, llamados así porque expresan funciones trigonométricas de $2t$ y $t/2$, en términos de funciones trigonométricas de t . Las fórmulas se aplican a cualquier número real t , así como a cualquier ángulo t medido en grados o radianes.

LAS FORMULAS DEL ANGULO DOBLE

Las siguientes dos fórmulas son casos especiales de las fórmulas de la suma para el seno y el coseno. Si $v = u$ en

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

entonces, como $\cos(u + u) = \cos 2u$ obtenemos el siguiente resultado:



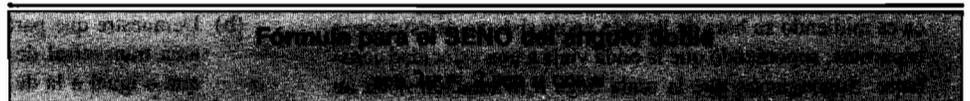
Fórmula para el COSENO del ángulo doble

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$

De forma similar, reemplazando $v = u$ en la fórmula para $\sin(u + v)$, tenemos

$$\sin(u + u) = \sin u \cos u + \cos u \sin u$$

Simplificando, obtenemos lo siguiente:



Fórmula para el SEÑO del ángulo doble

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

EJEMPLO 1

Si $\sin t = -\frac{1}{4}$ y $\pi < t < 3\pi/2$, halle los valores exactos de $\cos 2t$ y $\sin 2t$.

Solución. Primero calculamos $\cos t$ de

$$\begin{aligned}\cos^2 t + \sin^2 t &= 1 \\ \cos^2 t &= 1 - \sin^2 t\end{aligned}$$

Como $\pi < t < 3\pi/2$, escogemos la raíz cuadrada negativa:

$$\begin{aligned}\cos t &= -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \\ &= -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

De las fórmulas para el ángulo doble obtenemos

$$\begin{aligned}\cos 2t &= \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \\ &= \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{15}{16} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{14}{16} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2t &= 2 \operatorname{sen} t \cos t \\ &= 2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}\end{aligned}$$

EJEMPLO 2

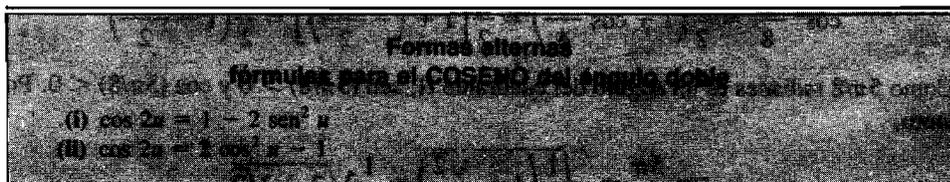
Expresa $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\operatorname{sen} \theta$.

Solución. Como $3\theta = 2\theta + \theta$, primero usamos la fórmula de la suma para el seno y luego las fórmulas para el ángulo doble:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\theta &= \operatorname{sen} (2\theta + \theta) = \operatorname{sen} 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta \\ &= 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \theta + (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen} \theta \\ &= 2 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta \\ &= 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta \\ &= 3(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta = 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen}^3 \theta.\end{aligned}$$

Nótese que en la última línea $\cos^2 \theta$ se reemplazó por $1 - \operatorname{sen}^2 \theta$, utilizando $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$.

Pueden obtenerse dos formas alternas de la fórmula para el coseno del ángulo doble de $\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$, sustituyendo $1 - \operatorname{sen}^2 u$ por $\cos^2 u$ y $1 - \cos^2 u$ por $\operatorname{sen}^2 u$. Los resultados son los siguientes.



EJEMPLO 3

Expresa $\cos 4x$ en términos de $\cos x$.

Solución. Por la forma (ii) con $u = 2x$, tenemos

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = 2 \cos^2 2x - 1 = 2(\cos 2x)^2 - 1$$

y utilizando la forma (ii) con $u = x$, obtenemos

$$\begin{aligned} \cos 4x &= 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 = 2(4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 \\ &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \end{aligned}$$

Las formas alternas de la fórmula para el coseno del ángulo doble son fuente de dos fórmulas para el ángulo medio. Despejando (i) para $\sin^2 u$ resulta:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 u &= 1 - \cos 2u \\ \sin^2 u &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2u) \end{aligned}$$

Si $t = 2u$, obtenemos lo siguiente:



De forma similar, la fórmula para el coseno del ángulo medio puede deducirse de (ii) (véase problema 43).



EJEMPLO 4

Encuentre el valor exacto de $\sin(5\pi/8)$ y $\cos(5\pi/8)$.

Solución. Si $t = 5\pi/4$, entonces $t/2 = 5\pi/8$ y de la fórmula para el ángulo medio resulta

$$\sin^2 \frac{5\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{5\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

y

$$\cos^2 \frac{5\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{5\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

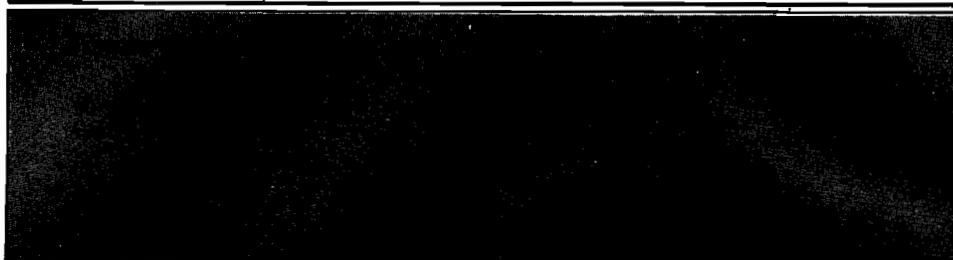
Como $5\pi/8$ radianes es un ángulo del cuadrante II, $\sin(5\pi/8) > 0$ y $\cos(5\pi/8) < 0$. Por tanto,

$$\sin \frac{5\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

y

$$\cos \frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = -\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Las formas alternas de las fórmulas para el ángulo medio pueden obtenerse tomando las raíces cuadradas de cada lado de las fórmulas del seno y coseno del ángulo medio:

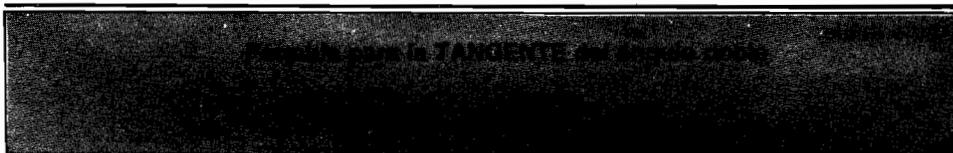


En estas formas (como se ve en el ejemplo 4), la elección del signo algebraico depende del cuadrante en el que esté situado el lado terminal del ángulo $t/2$.

Si tomamos $u = v$ en la fórmula de la suma para $\tan(u + v)$, tenemos

$$\tan(u + u) = \frac{\tan u + \tan u}{1 - \tan u \tan u} = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

Este resultado es la fórmula para la función tangente del ángulo doble:



EJEMPLO 5 _____

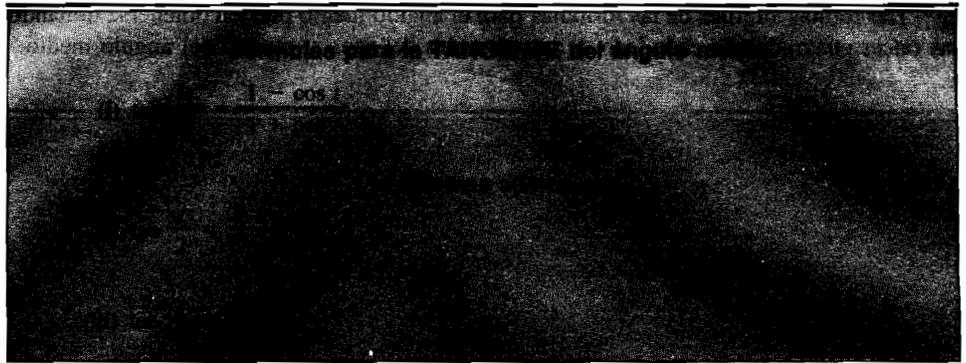
Verifique la identidad

$$\tan 2t = \frac{2 \tan t}{2 - \sec^2 t}$$

Solución. Usamos la fórmula para la tangente del ángulo doble para reformular el lado izquierdo de la identidad:

$$\begin{aligned} \tan 2t &= \frac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t} \\ &= \frac{2 \tan t}{1 - (\sec^2 t - 1)} \\ &= \frac{2 \tan t}{2 - \sec^2 t} \end{aligned}$$

La primera de las siguientes fórmulas para la tangente de ángulo medio puede obtenerse dividiendo las fórmulas correspondientes por seno y coseno y simplificando.



Para obtener (ii), primero escribimos

$$\tan \frac{t}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{t}{2}}{\operatorname{cos} \frac{t}{2}} \quad (6)$$

Deseamos demostrar que esto equivale a $(1 - \cos t)/\operatorname{sen} t$. Obtendremos $\operatorname{sen} t$ en el denominador de (6), si multiplicamos $\operatorname{cos} (t/2)$ por $2 \operatorname{sen} (t/2)$ y utilizamos la fórmula para el seno de ángulo doble:

$$\begin{aligned} \tan \frac{t}{2} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{t}{2}}{\operatorname{cos} \frac{t}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \operatorname{sen} \frac{t}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \operatorname{cos} \frac{t}{2}} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{sen} t} \end{aligned}$$

Finalmente, de la fórmula de ángulo medio $\operatorname{sen}^2 (t/2) = 1/2 (1 - \cos t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \tan \frac{t}{2} &= \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{sen} t} = \frac{2 \left[\frac{1}{2} (1 - \cos t) \right]}{\operatorname{sen} t} \\ &= \frac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6

Encuentre el valor exacto de $\tan 22.5^\circ$

Solución. Usando la fórmula (ii) para $\tan (t/2)$ y basados en el hecho de que $22.5^\circ = \frac{1}{2}(45^\circ)$, encontramos que 22.5°

$$\begin{aligned} \tan 22.5^\circ &= \frac{1 - \cos 45^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{1 - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 7

Dados $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, halle los valores exactos de $\tan 2\theta$ y $\tan (\theta/2)$.

Solución. Primero usamos $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ para hallar

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25}\end{aligned}$$

Como $90^\circ < \theta < 180^\circ$, tomamos la raíz cuadrada positiva

$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

Por tanto, $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta = -\frac{4}{3}$. Ahora, utilizando la fórmula para la tangente del ángulo doble, obtenemos

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2\left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

De la fórmula para la tangente del ángulo medio (iii) hallamos

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)} = 2$$

EJERCICIO 7.6

En los problemas 1 al 6, utilice las fórmulas del ángulo doble para escribir la expresión dada como una sola función trigonométrica del ángulo doble.

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $2 \cos \beta \sin \beta$ | 2. $\cos^2 2t - \sin^2 2t$ |
| 3. $1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5}$ | 4. $2 \cos^2 \left(\frac{19}{2}x\right) - 1$ |
| 5. $\frac{\tan 3t}{1 - \tan^2 3t}$ | 6. $2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}$ |

En los problemas 7 al 12, use la información dada para hallar (a) $\cos 2t$ (b) $\sin 2t$ y (c) $\tan 2t$.

7. $\sin t = \sqrt{2}/3$, $\pi/2 < t < \pi$
8. $\cos t = \sqrt{3}/5$, $3\pi/2 < t < 2\pi$
9. $\tan t = 1/2$, $\pi < t < 3\pi/2$
10. $\csc t = -3$, $\pi < t < 3\pi/2$
11. $\sec t = -13/5$, $\pi/2 < t < \pi$
12. $\cot t = 4/3$, $0 < t < \pi/2$

En los problemas 13 al 22, encuentre el valor exacto de la expresión dada.

13. $\cos (\pi/12)$
14. $\sin (\pi/8)$

15. $\sin (3\pi/8)$
16. $\tan (\pi/12)$
17. $\cos 67.5^\circ$
18. $\sin 15^\circ$
19. $\tan 105^\circ$
20. $\cot 157.5^\circ$
21. $\csc (13\pi/12)$
22. $\sec (-3\pi/8)$

En los problemas 23 al 28, use la información dada para hallar (a) $\cos t/2$, (b) $\sin (t/2)$ y (c) $\tan (t/2)$.

23. $\sin t = 12/13$, $\pi/2 < t < \pi$
24. $\cos t = 4/5$, $3\pi/2 < t < 2\pi$
25. $\tan t = 2$, $\pi < t < 3\pi/2$
26. $\csc t = 9$, $0 < t < \pi/2$
27. $\sec t = 3/2$, $0 < t < 90^\circ$
28. $\cot t = -1/4$, $90^\circ < t < 180^\circ$

En los problemas 29 al 42, verifique la identidad.

29. $\sin 4u = 4 \cos u (\sin u - 2 \sin^3 u)$
30. $\cos 3v = 4 \cos^3 v - 3 \cos v$
31. $(\sin t + \cos t)^2 = 1 + \sin 2t$
32. $\cos 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$
33. $\cot 2\theta = \frac{1}{2}(\cot \theta - \tan \theta)$

34. $\sec 2x = \frac{1}{2 \cos^2 x - 1}$
35. $\tan(\theta/2) = \csc \theta - \cot \theta$ 36. $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan \theta$
37. $\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin 2x$ 38. $\frac{1 - \tan^2 t}{\cos 2t} = \frac{2 \tan t}{\sin 2t}$
39. $\cot 2z = \frac{\csc^2 z - 2}{2 \cot z}$ 40. $\frac{\sin^2 2t}{(1 + \cos 2t)^2} = \sec^2 t - 1$
41. $\tan 4t = \frac{4 \tan t - 4 \tan^3 t}{1 - 6 \tan^2 t + \tan^4 t}$
42. $\frac{\cot t - \tan t}{\cot t + \tan t} = \cos 2t$
43. Deduzca la fórmula para el coseno del ángulo medio.
44. Demuestre que
- $$\tan \frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1 + \cos u}$$

En los problemas 45 al 48, determine la amplitud y el periodo de la función dada. Grafique. [Sugerencia: escriba la función en la forma $y = a \sin(bt + c)$ o $y = a \cos(bt + c)$].

45. $y = 4 \cos^2 t - 2$
46. $y = \sin(t/2) \cos(t/2)$
47. $y = 2 \sin 2t \cos 2t$
48. $y = 5 \cos^2 4t - 5 \sin^2 4t$
49. Una partícula se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo del eje x con una distancia d del origen a un tiempo de t segundos dada por $d = 4 - 8 \sin^2 4t$.
- (a) Demuestre que el movimiento es armónico simple, expresando d en la forma $d = a \sin(bt + c)$.
- (b) Determine la amplitud y el periodo del movimiento.
50. Para los puntos $P(x, y)$ y $Q(x_1, 0)$ con $x_1 < x$, como se observa en la figura 43, demuestre que
- $$d(O, Q) + d(P, Q) = y \tan(\alpha/2) + x$$

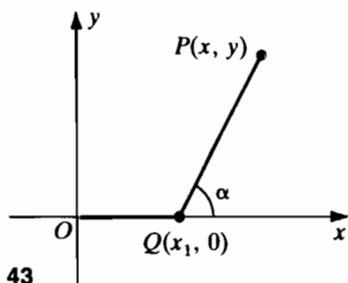


FIGURA 43

51. La razón de la velocidad de un aeroplano a la velocidad del sonido se llama número Mach, "M" del avión. Si $M > 1$, origina ondas sonoras en forma de cono en movimiento, como se observa en la figura 44. En la intersección del cono con la tierra se escuchará un ruido. Si el ángulo vértice del cono es θ , entonces

$$\sin(\theta/2) = 1/M$$

Si $\theta = \pi/6$, halle el valor exacto del número Mach.

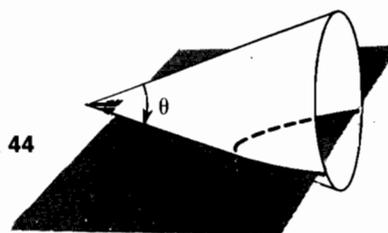


FIGURA 44

52. Demuestre que el área de un triángulo isósceles con lados iguales y longitud x es $A = (x^2/2) \sin \theta$, donde θ es el ángulo formado por los dos lados iguales. [Sugerencia: considere $\theta/2$, como se observa en la figura 45].

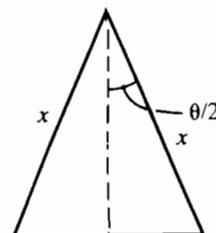


FIGURA 45

53. Si un proyectil, como en el lanzamiento de bala, es arrojado desde una altura h , hacia arriba en un ángulo ϕ con una velocidad v_0 , el alcance R con el que cae al piso es dado por la fórmula

$$R = \frac{v_0^2 \cos \phi}{g} (\sin \phi + \sqrt{\sin^2 \phi + (2gh/v_0^2)})$$

donde g es la aceleración a causa de la gravedad (véase figura 46). Puede demostrarse que el máximo alcance R_{max} se logra si el ángulo ϕ satisfacc la ecuación

$$\cos 2\phi = \frac{gh}{v_0^2 + gh}$$

Usando estas expresiones para R y $\cos 2\phi$ y las fórmulas para seno y coseno del ángulo medio con $t = 2\phi$, demuestre que

$$R_{max} = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

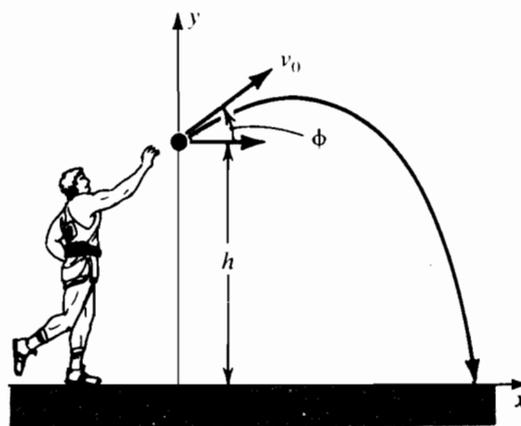
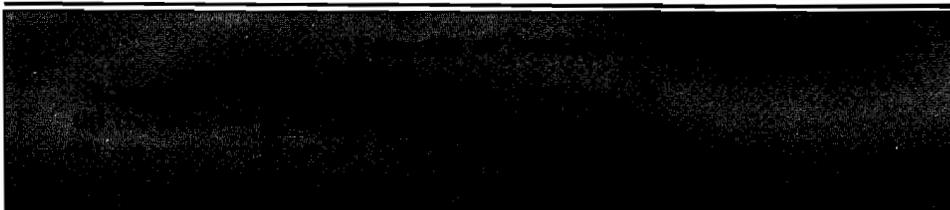


FIGURA 46

7.7 Fórmulas de producto y de suma

Ahora analizaremos las **fórmulas de producto y de suma** que nos permitirán escribir ciertos productos de los senos y cosenos como sumas de senos y cosenos, y viceversa.



Probaremos (i) y dejaremos la verificación de las fórmulas de la (ii) a la (iv) como ejercicio (véase problema 37). Comencemos aplicando las fórmulas de suma y de diferencia al lado derecho de (i) y luego simplificamos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)] \\ &= \frac{1}{2}[\cos u \cos v + \sin u \sin v - (\cos u \cos v - \sin u \sin v)] \\ &= \frac{1}{2}[2 \sin u \sin v] = \sin u \sin v \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 _____

Utilice una fórmula de producto para reformular cada uno de los siguientes casos.

- (a) $\sin 45^\circ \cos 15^\circ$
 (b) $\cos 2x \cos 3x$

Solución

(a) Usando la fórmula de producto (iii) con $u = 45^\circ$ y $v = 15^\circ$, tenemos

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ \cos 15^\circ &= \frac{1}{2}[\sin(45^\circ + 15^\circ) + \sin(45^\circ - 15^\circ)] \\ &= \frac{1}{2}[\sin 60^\circ + \sin 30^\circ] = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{4} \end{aligned}$$

(b) De la fórmula de producto (ii) con $u = 2x$ y $v = 3x$, obtenemos

$$\begin{aligned} \cos 2x \cos 3x &= \frac{1}{2}[\cos(2x - 3x) + \cos(2x + 3x)] \\ &= \frac{1}{2}[\cos(-x) + \cos 5x] = \frac{1}{2}[\cos x + \cos 5x] \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 _____

Trace la gráfica de

$$y = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

Solución. Usando la fórmula (ii) con $u = x/2$ y $v = 3x/2$, hallamos que

$$2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} = (2) \left(\frac{1}{2}\right) \left[\cos \left(\frac{x}{2} - \frac{3x}{2}\right) + \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{3x}{2}\right) \right]$$

$$= \cos(-x) + \cos 2x = \cos x + \cos 2x$$

Por tanto, la ecuación original se convierte en

$$y = \cos x + \cos 2x$$

Una vez que la expresión se escribe en forma de suma, la gráfica puede trazarse sumando las coordenadas y, como se observa en la figura 47.

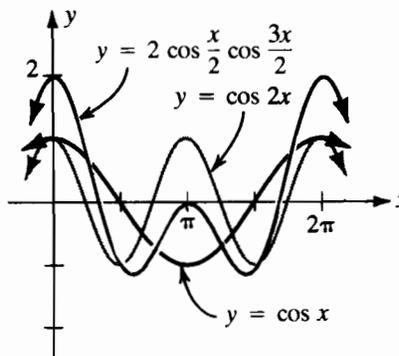
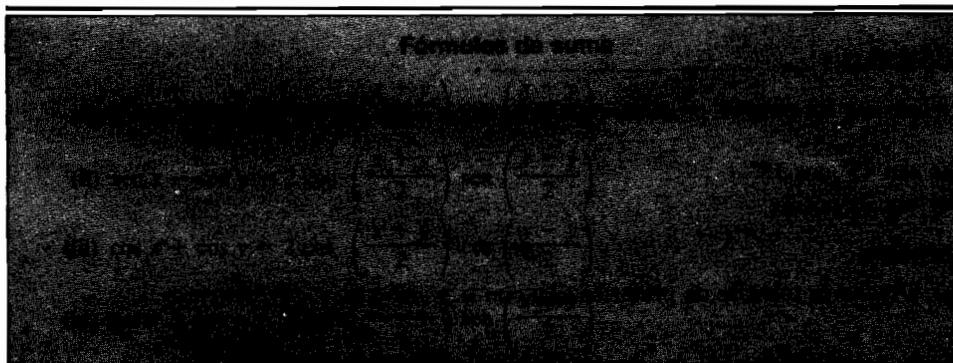


FIGURA 47

Las siguientes fórmulas nos permiten escribir sumas en forma de productos.



Podemos obtener estas fórmulas de las fórmulas de producto utilizando las siguientes sustituciones

$$x = u + v \quad y = u - v$$

de las que encontramos que $x + y = (u + v) + (u - v) = 2u$ o

$$u = \frac{x + y}{2}$$

De forma similar $x - y = (u + v) - (u - v) = 2v$ así que

$$v = \frac{x - y}{2}$$

Con estas sustituciones de la fórmula de producto (i) obtenemos

$$\operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x-y}{2} \right) = \frac{1}{2} [\cos y - \cos x]$$

o

$$-2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x-y}{2} \right) = \cos x - \cos y$$

que es la fórmula de suma (iv). De la misma forma, cada una de las fórmulas de producto restantes, junto con estas sustituciones, produce una de las fórmulas de suma. (Véase problema 38).

EJEMPLO 3

Use una de las fórmulas de la suma para replantear cada uno de los siguientes casos:

(a) $\operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ$

(b) $\cos t - \cos 5t$

Solución

(a) Con la fórmula de la suma (i) y con $x = 75^\circ$ y $y = 15^\circ$ tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \right) \\ &= 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

(b) Con la fórmula de suma (iv) y con $x = t$ y $y = 5t$, encontramos

$$\begin{aligned} \cos t - \cos 5t &= -2 \operatorname{sen} \left(\frac{t+5t}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{t-5t}{2} \right) \\ &= -2 \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} (-2t) \\ &= 2 \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} 2t \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Verifique la identidad $\frac{\cos 10t - \cos 12t}{\operatorname{sen} 10t + \operatorname{sen} 12t} = \tan t$.

Solución. Utilizamos las fórmulas de la suma (iv) y (i) para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\cos 10t - \cos 12t}{\operatorname{sen} 10t + \operatorname{sen} 12t} &= \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{10t+12t}{2} \operatorname{sen} \frac{10t-12t}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{10t+12t}{2} \cos \frac{10t-12t}{2}} \\ &= \frac{-2 \operatorname{sen} 11t \operatorname{sen} (-t)}{2 \operatorname{sen} 11t \cos (-t)} = \frac{-\operatorname{sen} (-t)}{\cos (-t)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \tan t \end{aligned}$$

Se puede consultar fácilmente la lista completa de fórmulas trigonométricas que hemos considerado aquí y en el capítulo 6, en una de las portadas de este texto.

EJERCICIO 7.7

En los problemas 1 al 10, utilice una fórmula de producto para replantear la expresión dada.

1. $\cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$
2. $\sin \frac{5\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$
3. $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$
4. $\cos 15^\circ \cos 45^\circ$
5. $\sin 2x \cos 4x$
6. $\sin x \sin 3x$
7. $\cos 5\theta \sin 3\theta$
8. $\cos 5x \cos x$
9. $\sin \frac{4x}{3} \cos \frac{x}{3}$
10. $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{5x}{2}$

En los problemas 11 al 16, escriba el producto en forma de suma y luego trace la gráfica de la función dada, sumando las coordenadas y .

11. $y = \sin t \cos 2t$
12. $y = 2 \cos 5x \sin 4x$
13. $y = 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{5x}{2}$
14. $y = -\cos \pi\theta \cos 2\pi\theta$
15. $y = -5 \cos 6\theta \sin 2\theta$
16. $y = 6 \sin \frac{7t}{2} \cos \frac{3t}{2}$

En los problemas 17 al 26, utilice una fórmula de la suma, con el fin de replantear la expresión dada.

17. $\sin \frac{7\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$
18. $\sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}$
19. $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$
20. $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ$
21. $\sin y - \sin 5y$
22. $\cos 3\theta - \cos \theta$
23. $\cos 2x + \cos 6x$
24. $\sin 5t + \sin 3t$
25. $\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t$
26. $\cos(\theta + \phi) - \cos \theta$

En los problemas 27 al 36, utilice las fórmulas de producto y de suma con el fin de verificar la expresión dada.

27. $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 2x$
28. $\frac{\sin \theta + \sin 7\theta}{\cos \theta + \cos 7\theta} = \tan 4\theta$
29. $\frac{\sin 6\beta + \sin 2\beta}{\cos 2\beta - \cos 6\beta} = \cot 2\beta$
30. $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$
31. $2 \sin \left(t + \frac{\pi}{2}\right) \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2t$
32. $\frac{\cos x - \cos y}{\sin y - \sin x} = \tan \left(\frac{x+y}{2}\right)$
33. $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right)$
34. $\frac{\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta}{\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$

$$35. \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta} = \frac{\tan(\alpha + \beta)}{\tan(\alpha - \beta)}$$

$$36. 2 \cos 2t \cos t - \cos 3t = \cos t$$

37. Verifique las fórmulas de producto de la (ii) a la (iv).

38. Verifique las fórmulas de la suma de la (i) a la (iii).

39. Una nota producida por cierto instrumento musical genera una onda sonora descrita por

$$f(t) = 0.03 \sin 500\pi t + 0.03 \sin 1,000\pi t$$

donde $f(t)$ es la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire, medida en dinas por centímetro cuadrado en el tímpano, después de t segundos. Exprese f como el producto de una función seno y coseno.

40. Si dos cuerdas de un piano golpeadas por la misma tecla están levemente fuera de tono, la diferencia entre la presión atmosférica y la del aire en el tímpano puede representarse por

$$f(t) = a \cos 2\pi b_1 t + a \cos 2\pi b_2 t$$

donde el valor de la constante b_1 se acerca a la constante b_2 . Las variaciones que se dan en la sonoridad se llaman **compás** (véase figura 48). Las dos cuerdas pueden entonarse en la misma frecuencia, sujetando una de ellas mientras suenan ambas, hasta que el compás desaparezca.

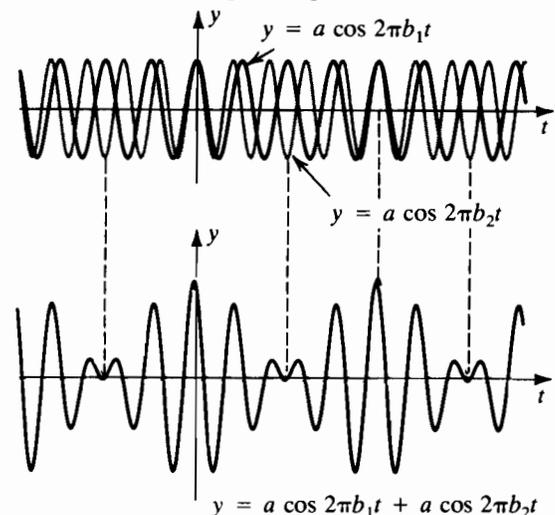


FIGURA 48

(a) Utilice una fórmula de la suma para escribir $f(t)$ como producto.

(b) Demuestre que $f(t)$ puede ser considerado como una función coseno con periodo $2/(b_1 + b_2)$ y una amplitud variable $2a \cos \pi(b_1 - b_2)t$.

41. El término $\sin \omega t \sin(\omega t + \phi)$ se encuentra en la deducción de una expresión para la energía de un circuito de corriente alterna. Demuestre que este término puede escribirse de la forma

$$\frac{1}{2}[\cos \phi - \cos(2\omega t + \phi)]$$

7.8 Ecuaciones trigonométricas

En esta sección analizaremos las técnicas para resolver ecuaciones relacionadas con funciones trigonométricas. Ecuaciones tales como

$$\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (7)$$

$$y \quad 4 \operatorname{sen}^2 t - 8 \operatorname{sen} t + 3 = 0$$

se llaman **ecuaciones trigonométricas**.

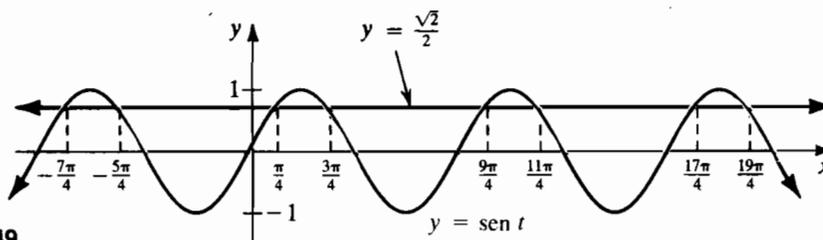


FIGURA 49

Las ecuaciones trigonométricas suelen ser condicionales. Recordemos de la sección 2.1 que, a diferencia de las identidades, las ecuaciones condicionales son verdaderas sólo para ciertos valores en el dominio de la variable.

Consideremos el problema de encontrar *todos* los números reales t que satisfagan $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como se observa en la figura 49, existe un número infinito de soluciones

$$\dots, -\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \dots \quad (8)$$

$$y \quad \dots, -\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}, \dots$$

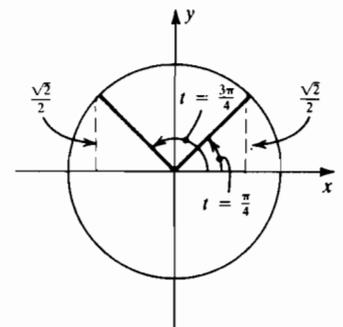


FIGURA 50

Nótese que en (8) cada solución puede obtenerse sumando 2π al resultado anterior. Desde luego, esta es una consecuencia de la periodicidad de la función seno. En general, las ecuaciones trigonométricas tienen infinitud de soluciones debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas.

Para obtener las soluciones de una ecuación como $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, es más conveniente utilizar una circunferencia unitaria y ángulos de referencia, antes que la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$. Como $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, el ángulo de referencia para t es $\frac{\pi}{4}$ radianes. El hecho de que el valor $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sea positivo implica que el ángulo de t radianes puede estar en el cuadrante I o II. De esta forma, como se observa en la figura 50, las únicas soluciones entre 0 y 2π son

$$t = \frac{\pi}{4} \quad y \quad t = \frac{3\pi}{4}$$

Como la función seno es periódica, con un periodo de 2π , todas las otras soluciones pueden obtenerse sumando los múltiplos enteros de 2π a estas soluciones:

$$t = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{o} \quad t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Cuando enfrentamos una ecuación más complicada como

$$4 \operatorname{sen}^2 t - 8 \operatorname{sen} t + 3 = 0$$

el método básico es resolverla como una sola función trigonométrica (en este caso sería $\operatorname{sen} t$), por medio de métodos similares a los utilizados para resolver ecuaciones algebraicas. Luego, los valores del ángulo se determinan utilizando la circunferencia unitaria y los ángulos de referencia. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

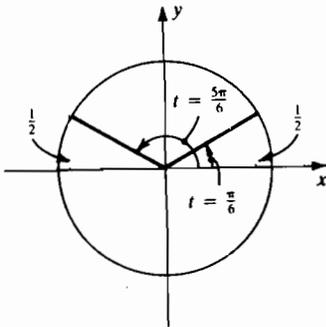


FIGURA 51

EJEMPLO 1 _____

Encuentre todas las soluciones de $4 \operatorname{sen}^2 t - 8 \operatorname{sen} t + 3 = 0$.

Solución. Primero observamos que esta es una ecuación de segundo grado en $\operatorname{sen} t$ y que se factoriza de la siguiente manera:

$$(2 \operatorname{sen} t - 3)(2 \operatorname{sen} t - 1) = 0$$

Esto implica que

$$\operatorname{sen} t = \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$$

La primera ecuación no tiene solución, pues $|\operatorname{sen} t| \leq 1$. Como se observa en la figura 51, los dos ángulos entre 0 y 2π con seno igual a $\frac{1}{2}$ son

$$t = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad t = \frac{5\pi}{6}$$

Por tanto, mediante la periodicidad de la función seno, las soluciones son

$$t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{y} \quad t = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

EJEMPLO 2 _____

Resuelva $\operatorname{sen} t = \cos t$ (9)

Solución. Dividiendo ambos lados de la ecuación por $\cos t$ resulta

$$\tan t = 1 \quad (10)$$

Esta ecuación es equivalente a (9) siempre y cuando $\cos t \neq 0$.

Observamos que si $\cos t = 0$, entonces

$$t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{o} \quad t = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

para cualquier número entero n . Ya que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \neq 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) \neq 0$$

estos valores de t no satisfacen la ecuación original. Así, encontraremos todas las soluciones para (9), resolviendo la ecuación (10).

Ahora, $\tan = 1$ implica que el ángulo de referencia para t es $\pi/4$ radianes. Como $\tan t = 1 > 0$, el ángulo de t radianes puede estar situado en el cuadrante I o III, como se observa en la figura 52. Entonces, las soluciones son

$$t = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{y} \quad t = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

o de forma equivalente

$$t = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

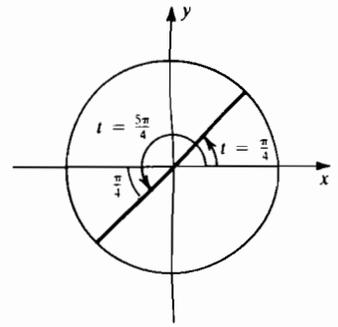


FIGURA 52

Nota de advertencia: si usted divide por una expresión que contenga una variable, es esencial determinar si los valores que hacen que la expresión sea cero son las soluciones de la ecuación original. Si lo son y usted no ha verificado, puede que no encuentre las soluciones. Fíjese que en el ejemplo 2, cuando dividimos por $\cos t$ tuvimos la precaución de que ninguna solución quedara por fuera.

Siempre que sea posible, es preferible evitar dividir por una expresión variable. Esto suele realizarse escogiendo todos los términos diferentes de cero de un lado de la ecuación y luego factorizando. El ejemplo 3 ilustra esta técnica.

EJEMPLO 3

Resuelva

$$2 \operatorname{sen} t \cos^2 t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t$$

Solución. En lugar de dividir por $\cos t$ escribimos la ecuación así:

$$2 \operatorname{sen} t \cos^2 t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t = 0$$

y factorizamos

$$\cos t \left(2 \operatorname{sen} t \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

De esta manera

$$\cos t = 0 \quad \text{o} \quad 2 \operatorname{sen} t \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Ahora el coseno es cero para todos los múltiplos impares de $\pi/2$, es decir

$$t = (2n + 1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En la segunda ecuación utilizamos la fórmula para ángulo doble $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$ para obtener

$$\operatorname{sen} 2t + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} 2t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

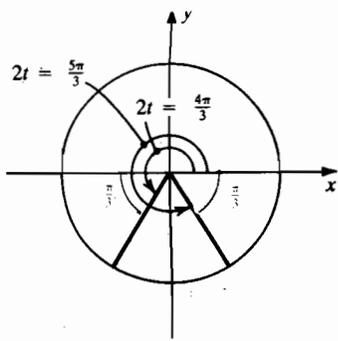


FIGURA 53

De esta manera, el ángulo de referencia para $2t$ es $\pi/3$. Como el seno es negativo, el ángulo $2t$ debe estar en el cuadrante III o IV. Como se observa en la figura 53

$$2t = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{o} \quad 2t = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$$

y en consecuencia

$$t = \frac{2\pi}{3} + n\pi \quad \text{o} \quad t = \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

Por tanto, las soluciones son

$$t = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad t = \frac{2\pi}{3} + n\pi, \quad \text{y} \quad t = \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En el ejemplo 3, si hubiéramos simplificado la ecuación dividiendo por $\cos t$ sin verificar los valores de t para los que $\cos t = 0$, habríamos perdido las soluciones $t = \pi/2 + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

EJEMPLO 4

Resuelva $3 \cos^2 x - \cos 2x = 1$.

Solución. Observamos que la ecuación dada involucra los cosenos de x y $2x$. En consecuencia, usamos la fórmula para el ángulo doble

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

para reemplazar la ecuación por una equivalente que sólo contenga $\cos x$. Encontramos que

$$3 \cos^2 x - (2 \cos^2 x - 1) = 1$$

o

$$\cos^2 x = 0$$

por tanto,

$$\cos x = 0$$

y las soluciones son

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Hasta aquí hemos visto en esta sección la variable de la ecuación trigonométrica cuando representa un número real o un ángulo medido en radianes. Si la variable representa un ángulo medido en grados, la técnica para resolverla es la misma.

EJEMPLO 5

Resuelva $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, donde θ es un ángulo medido en grados.

Solución. Como $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, el ángulo de referencia para 2θ es 60° y el ángulo 2θ debe estar en los cuadrantes II o III. Como se observa en la figura 54

$$2\theta = 120^\circ \quad \text{o} \quad 2\theta = 240^\circ$$

Cualquier ángulo que sea coterminal con uno de estos ángulos podrá satisfacer $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$. Estos ángulos se obtienen sumando cualquier múltiplo de 360° . Así, tenemos

$$2\theta = 120^\circ + 360^\circ n \quad \text{o} \quad 2\theta = 240^\circ + 360^\circ n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

que, simplificada, es

$$\theta = 60^\circ + 180^\circ n \quad \text{o} \quad \theta = 120^\circ + 180^\circ n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Entonces, las soluciones son

$$\theta = 60^\circ + 180^\circ n \quad \text{y} \quad \theta = 120^\circ + 180^\circ n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

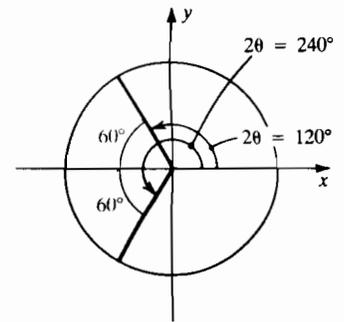


FIGURA 54

EJEMPLO 6

Encuentre todas las soluciones de

$$1 + \tan \alpha = \sec \alpha$$

donde α es un ángulo medido en grados.

Solución. La ecuación no es factorizable pero, si elevamos al cuadrado ambos lados, podemos valerlos de una identidad fundamental:

$$\begin{aligned} (1 + \tan \alpha)^2 &= (\sec \alpha)^2 \\ 1 + 2 \tan \alpha + \tan^2 \alpha &= \sec^2 \alpha \\ 1 + 2 \tan \alpha + \tan^2 \alpha &= 1 + \tan^2 \alpha \\ 2 \tan \alpha &= 0 \\ \tan \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Los valores de α en $[0^\circ, 360^\circ)$ para los que $\tan \alpha = 0$ son

$$\alpha = 0^\circ \quad \text{y} \quad \alpha = 180^\circ$$

Como elevamos al cuadrado cada lado de la ecuación original, podemos haber introducido soluciones extrañas. Por tanto, es importante que verifiquemos todas las soluciones en la ecuación original. Sustituyendo $\alpha = 0^\circ$ por $1 + \tan \alpha = \sec \alpha$ obtenemos la expresión verdadera $0 + 1 = 1$. Pero, después de sustituir $\alpha = 180^\circ$, obtenemos la expresión *falsa* $0 + 1 = -1$. Por tanto, 180° es una solución extraña y $\alpha = 0^\circ$ es la única solución en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$. Entonces, las soluciones son

$$\alpha = 0^\circ + 360^\circ n = 360^\circ n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

es decir, todos los ángulos que son coterminales con 0° .

Recordemos de la sección 3.5 que el proceso para hallar los intersejos x de la gráfica de una función $y = f(x)$ es equivalente al utilizado para resolver la ecuación $f(x) = 0$. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

EJEMPLO 7

Encuentre, sin graficar, los tres primeros intersejos t positivos de la gráfica de

$$f(t) = \sin 2t \cos t$$

Solución. Debemos resolver $f(t) = 0$, es decir

$$\operatorname{sen} 2t \cos t = 0$$

Se deduce que $\operatorname{sen} 2t = 0$ ó $\cos t = 0$. De $\operatorname{sen} 2t = 0$ obtenemos

$$2t = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

o

$$t = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

De $\cos t = 0$ obtenemos

$$t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Entonces, los tres primeros intersecciónes t positivos son

$$t = \frac{\pi}{2}, \pi, \text{ y } \frac{3\pi}{2}$$

EJERCICIO 7.8

En los problemas 1 al 6, encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada, si t representa un ángulo medido en radianes.

- | | |
|--|---------------------------|
| 1. $\operatorname{sen} t = \sqrt{3}/2$ | 2. $\cos t = -\sqrt{2}/2$ |
| 3. $\sec t = \sqrt{2}$ | 4. $\tan t = -1$ |
| 5. $\cot t = -\sqrt{3}$ | 6. $\csc t = 2$ |

En los problemas 7 al 12, encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada si x representa un número real.

- | | |
|-------------------|----------------------------------|
| 7. $\cos x = -1$ | 8. $2 \operatorname{sen} x = -1$ |
| 9. $\tan x = 0$ | 10. $\sqrt{3} \sec x = 2$ |
| 11. $-\csc x = 1$ | 12. $\sqrt{3} \cot x = 1$ |

En los problemas 13 al 18, encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada si θ representa un ángulo medido en grados.

- | | |
|---------------------------------|--|
| 13. $\csc \theta = 2\sqrt{3}/3$ | 14. $2 \operatorname{sen} \theta = \sqrt{2}$ |
| 15. $\cot \theta + 1 = 0$ | 16. $\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta$ |
| 17. $\sec \theta = -2$ | 18. $2 \cos \theta + \sqrt{2} = 0$ |

En los problemas 19 al 46, encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada si x es un número real y θ es un ángulo medido en grados.

19. $\cos^2 x - 1 = 0$
20. $2\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$
21. $3 \sec^2 x = \sec x$
22. $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} = 0$
23. $2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 2 = 0$
24. $2 \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$

25. $\cot^2 \theta + \cot \theta = 0$
26. $2 \operatorname{sen}^2 \theta + (2 - \sqrt{3}) \operatorname{sen} \theta - \sqrt{3} = 0$
27. $\cos 2x = -1$
28. $\sec 2x = 2$
29. $2 \operatorname{sen} 3\theta = 1$
30. $\tan 4\theta = -1$
31. $\cot(x/2) = 1$
32. $\csc(\theta/3) = -1$
33. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$
34. $\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x = 1$
35. $\cos 2\theta = \operatorname{sen} \theta$
36. $\operatorname{sen} 2\theta + 2 \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta = 2$
37. $\operatorname{sen}^4 x - 2 \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$
38. $\tan^4 \theta - 2 \sec^2 \theta + 3 = 0$
39. $\sec x \operatorname{sen}^2 x = \tan x$
40. $\frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta} = 2$
41. $1 + \cot \theta = \csc \theta$
42. $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$
43. $\sqrt{\frac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{2}} = 1$
44. $\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen} x} = 0$
45. $\cos \theta - \sqrt{\cos \theta} = 0$
46. $\cos \theta \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = 1$

En los problemas 47 al 54, encuentre los tres primeros intersecciónes t positivos de la gráfica de la función dada.

47. $f(t) = -5 \operatorname{sen}(3t + \pi)$
48. $f(t) = 2 \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$
49. $f(t) = 2 - \sec \frac{\pi}{2}t$
50. $f(t) = 1 + \cos \pi t$
51. $f(t) = \operatorname{sen} t + \tan t$

- 52. $f(t) = 1 - 2 \cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right)$
- 53. $f(t) = \sin t - \sin 2t$
- 54. $f(t) = \cos t + \cos 3t$ [Sugerencia: use una fórmula de la suma de la sección 7.7].

En los problemas 55 al 58, determine por medio de la gráfica si la ecuación dada tiene alguna solución.

- 55. $\tan x = x$. [Sugerencia: grafique $y = \tan x$ y $y = x$ en el mismo sistema de coordenadas].
- 56. $\sin x = x$
- 57. $\cot x - x = 0$
- 58. $\cos x + x + 1 = 0$
- 59. Del problema 52 de la sección 7.6 tenemos que el área del triángulo isósceles con ángulo θ en un vértice, como se observa en la figura 55, es $(x^2/2) \sin \theta$. Si la longitud de x es 4, ¿qué valor de θ dará un triángulo con área de 4?

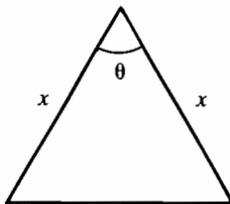


FIGURA 55

- 60. Un objeto viaja por una vía circular, centrado al origen, con una velocidad angular constante. La coordenada y del objeto en cualquier tiempo t segundos, se da por

$$y = 8 \cos \left(\pi t - \frac{\pi}{12} \right)$$

¿En qué tiempo(s) t el objeto cruza el eje x ?

- 61. ¿Cuál es el ángulo del vértice del cono formado por las ondas sonoras producidas por un aeroplano que vuela a 2 Mach? [Sugerencia: véase el problema 51 de la sección 7.6].
- 62. Un generador eléctrico produce una corriente alterna de 60 ciclos dada por

$$i(t) = 30 \sin 120\pi \left(t - \frac{7}{36} \right)$$

donde $i(t)$ es la corriente medida en amperios en t segundos. Halle el valor positivo más pequeño de t para el que la corriente sea de 15 amperios.

- 63. Si el voltaje dado por

$$V = V_0 \sin (\omega t + \alpha)$$

se imprime en un circuito en serie, se produce una corriente alterna. Si $V_0 = 110$ voltios, $\omega = 120 \pi$ radianes por segundo, y $\alpha = -\pi/6$, ¿cuándo será el voltaje igual a cero?

- 64. Considere un rayo de luz que pasa de un medio (como el aire) a otro (como el cristal). Sea ϕ el ángulo de incidencia y θ el ángulo de refracción. Como se indica en la figura 56, estos ángulos se miden desde una recta vertical. Según la ley de Snell, hay una constante c que depende de los dos medios, como

$$\frac{\sin \phi}{\sin \theta} = c$$

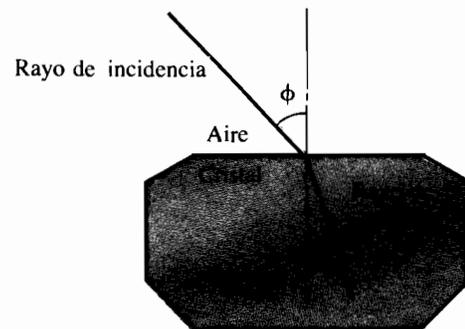


FIGURA 56

Suponga que para que la luz pase del aire al cristal $c = 1.437$. Halle ϕ y θ tal que el ángulo de incidencia sea el doble del ángulo de refracción.

- 65. Sobre la base de los datos recogidos entre 1966 y 1980, la extensión de una capa de nieve S , medida en millones de kilómetros cuadrados en el hemisferio norte como una función de tiempo, puede aproximarse por la función

$$S(w) = 25 + 21 \cos (2\pi(w - 5)/52)$$

donde w es el número de semanas posteriores al 1o. de enero.

- (a) ¿Cuánta extensión de nieve predice esta fórmula para el 1o. de abril? (Aproxime w al número entero más cercano).
- (b) ¿En qué semana predice la fórmula la menor cantidad de nieve?
- (c) ¿En qué mes se producirá esta nevada?

7.9 Funciones trigonométricas inversas

De la sección 3.7 sabemos que una función tiene su inversa sólo si es uno a uno. El análisis de las gráficas de varias funciones trigonométricas demuestra claramente que éstas no son uno a uno. Sin embargo, restringiendo apropiadamente sus dominios, podemos asegurar que las funciones que resultan son uno a uno.

ARCOSENO

En la figura 57 vemos que la función $y = \text{sen } x$ es uno a uno en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$, pues sobre este intervalo cualquier recta horizontal interseca la gráfica a lo sumo una vez. Entonces, cuando restringimos el dominio a este intervalo en particular, la función seno tiene una inversa. Denotamos esta inversa por

$$\text{sen}^{-1} x, \text{ o } \arcsen x$$

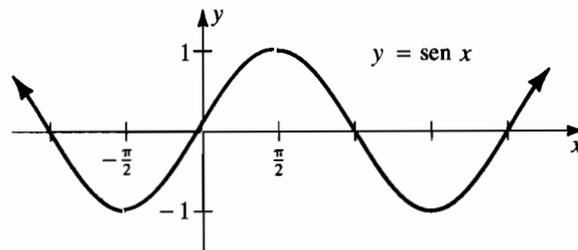


FIGURA 57

Estos símbolos se leen “seno inverso de x ” y “arcoseno de x ”, respectivamente. Tenemos la siguiente definición.

DEFINICION 2

La función **arcoseno** o **seno inverso** se define como

$$y = \arcsen x \text{ si y sólo si } x = \text{sen } y$$

donde $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ y $-1 \leq x \leq 1$.

En otras palabras,

el arcoseno del número x es ese número (o ángulo medido en radianes) y entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x .

Nótese que el “-1” en $\text{sen}^{-1} x$ *no* es un exponente. Por el contrario, denota una función inversa, es decir,

$$(\text{sen } x)^{-1} = \frac{1}{\text{sen } x} \neq \text{sen}^{-1} x$$

Para evitar esta posible confusión, algunos prefieren la terminología “ $\arcsen x$ ” que hace referencia al “arco” o ángulo cuyo seno es x . Sin embargo, $\text{sen}^{-1} x$ y $\arcsen x$ suelen inter-

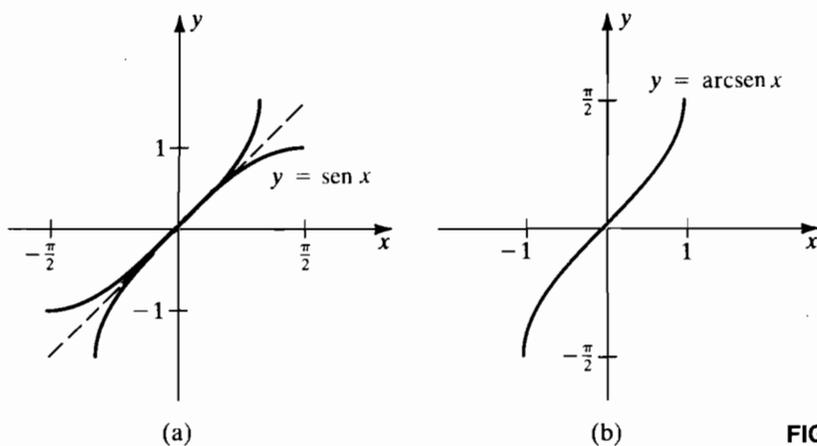


FIGURA 58

cambiarse en matemáticas y en sus aplicaciones. Por tanto, continuaremos alternando su uso hasta que usted se familiarice con ambas formas.

Recordemos de la sección 3.7 que la gráfica de una función inversa es la reflexión de la gráfica de la función dada en la recta $y = x$. Esta técnica se utiliza en la figura 58(a) para obtener la gráfica de $y = \arcsen x$. En la figura 58(b) (que indica $y = \arcsen x$ solamente), vemos que el dominio de $\arcsen x$ es $[-1, 1]$ y el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

EJEMPLO 1 _____

Encuentre (a) $\arcsen \frac{1}{2}$, (b) $\sen^{-1}(-\frac{1}{2})$, y (c) $\sen^{-1}(-1)$.

Solución

- (a) Si $y = \arcsen \frac{1}{2}$, entonces $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ y $\sen y = \frac{1}{2}$. Se deduce que $y = \pi/6$.
- (b) Si $y = \sen^{-1}(-\frac{1}{2})$, entonces $\sen y = -\frac{1}{2}$. Como debemos escoger y tal que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, encontramos que $y = -\pi/6$.
- (c) Si $y = \sen^{-1}(-1)$, tenemos que $\sen y = -1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. En consecuencia, $y = -\pi/2$.

Nota de advertencia: en la parte (b) del ejemplo 1 tuvimos cuidado al escoger y para que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Es un *error común* creer que, como $\sen(11\pi/6) = -\frac{1}{2}$, $\sen^{-1}(-\frac{1}{2})$ es $11\pi/6$. Recuerde: si $y = \sen^{-1} x$, entonces y está sujeto a la restricción $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

EJEMPLO 2 _____

Sin utilizar calculadora, encuentre $\tan(\sen^{-1} \frac{1}{4})$.

Solución. Debemos encontrar la tangente del ángulo de t radianes, con un seno igual a $\frac{1}{4}$, es decir, $\tan t$ donde $t = \sen^{-1} \frac{1}{4}$. El ángulo t se observa en la figura 59. Como

$$\tan t = \frac{\sen t}{\cos t} = \frac{\frac{1}{4}}{\cos t} \tag{11}$$

necesitamos determinar $\cos t$. De la figura 59 y la identidad $\cos^2 t + \sen^2 t = 1$, vemos que

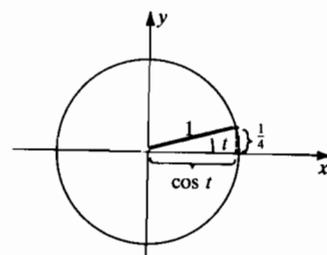


FIGURA 59

$$\cos^2 t + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$\text{o} \quad \cos t = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Sustituyendo este valor en (11), tenemos

$$\tan t = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

y así

$$\tan \left(\sin^{-1} \frac{1}{4} \right) = \tan t = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Otra forma de encontrar $\tan \left(\sin^{-1} \frac{1}{4} \right)$ es trazando un triángulo rectángulo que contenga un ángulo t para el que $t = \sin^{-1} \frac{1}{4}$, o $\sin t = \frac{1}{4}$. Esto se observa en la figura 60, donde hemos dado un valor a hip = 4 y op = 1. Podemos luego encontrar ady por medio del teorema de Pitágoras:

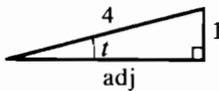


FIGURA 60

$$4^2 = 1^2 + (\text{ady})^2$$

$$\text{ady} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

Así,

$$\tan \left(\sin^{-1} \frac{1}{4} \right) = \tan t = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

ARCOCOSENO

Si restringimos el dominio de la función coseno al intervalo cerrado $[0, \pi]$, la función que resulta es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. Denotamos esta inversa así:

$$\cos^{-1} x, \quad \text{o} \quad \arccos x$$

lo que nos da la siguiente definición:

DEFINICION 3

La función **arccoseno**, o **coseno inverso**, se define por

$$y = \arccos x \text{ si y sólo si } x = \cos y$$

donde $0 \leq y \leq \pi$ y $-1 \leq x \leq 1$.

Las gráficas de $y = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi]$ y $y = \arccos x$ se observan en la figura 61. El dominio de $\arccos x$ es $[-1, 1]$ y el rango es $[0, \pi]$.

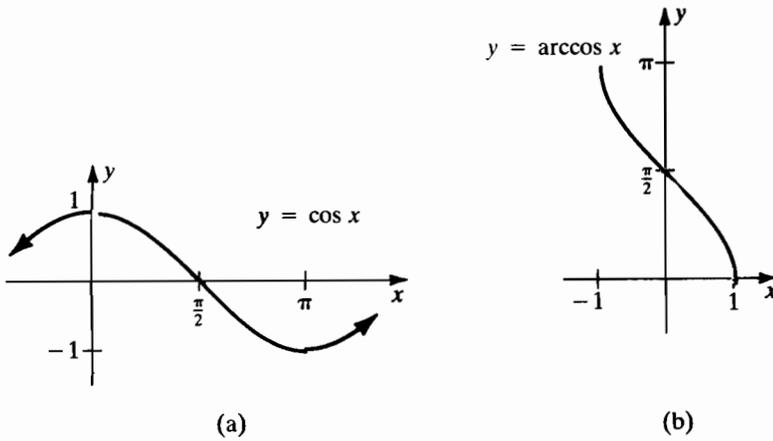


FIGURA 61

EJEMPLO 3

Encuentre (a) $\arccos(\sqrt{2}/2)$ y (b) $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$.

Solución

- (a) Si $y = \arccos(\sqrt{2}/2)$, entonces $\cos y = \sqrt{2}/2$, $0 \leq y \leq \pi$. De esta manera, $y = \pi/4$.
- (b) Si $y = \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$, tenemos que $\cos y = -\sqrt{3}/2$, y debemos encontrar y tal que $0 \leq y \leq \pi$. Por tanto, $y = 5\pi/6$ ya que $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$.

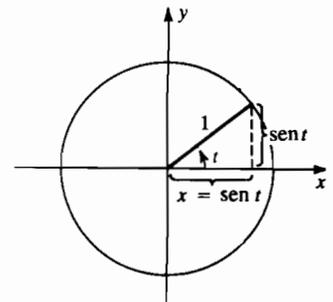


FIGURA 62

EJEMPLO 4

Escriba $\sin(\cos^{-1}x)$ como una expresión algebraica en x .

Solución. En la figura 62 hemos construido un ángulo de t radianes con un coseno igual a x . Entonces, $t = \cos^{-1}x$, o $x = \cos t$, donde $0 \leq t \leq \pi$. Ahora, para encontrar $\sin(\cos^{-1}x) = \sin t$, utilizamos la identidad $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Así,

$$\begin{aligned} x^2 + \sin^2 t &= 1 \\ \sin^2 t &= 1 - x^2 \\ \sin t &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Usamos la raíz cuadrada *positiva* de $1 - x^2$, ya que el rango de $\cos^{-1}x$ es $[0, \pi]$, y el seno de un ángulo en el cuadrante I o II es positivo.

ARCOTANGENTE

Si restringimos el dominio de $\tan x$ al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, la función resultante es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. Esta inversa se denota así:

$$\tan^{-1} x, \text{ o } \arctan x$$

DEFINICION 4

La función **arcotangente** o **tangente inversa** se define por

$$y = \arctan x \text{ si y sólo si } x = \tan y$$

donde $-\pi/2 < y < \pi/2$ y $-\infty < x < \infty$.

Las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \arctan x$ se observan en la figura 63. El dominio de $\arctan x$ es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(-\pi/2, \pi/2)$.

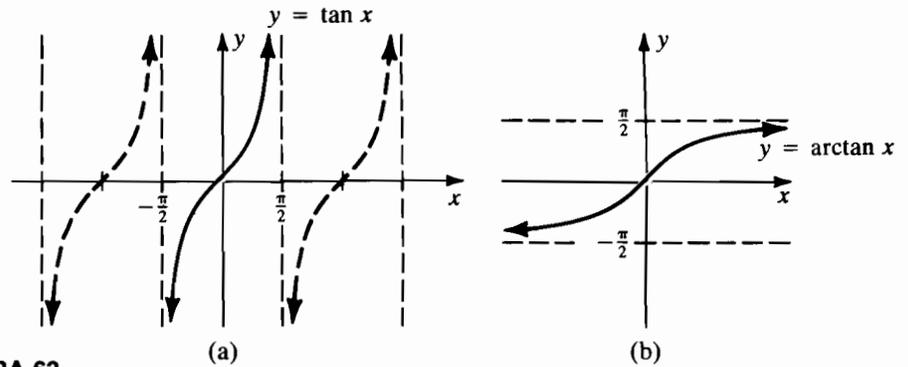


FIGURA 63

EJEMPLO 5

Encuentre $\tan^{-1}(-1)$.

Solución. Si $\tan^{-1}(-1) = y$, entonces $\tan y = -1$, donde $-\pi/2 < y < \pi/2$. Se deduce que $\tan^{-1}(-1) = y = -\pi/4$.

EJEMPLO 6

Sin utilizar calculadora, encuentre $\sin(\tan^{-1}(-\frac{5}{3}))$.

Solución. Si $t = \tan^{-1}(-\frac{5}{3})$, entonces $\tan t = -\frac{5}{3}$. Utilizamos la identidad $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ para hallar $\sec t$:

$$1 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \sec^2 t$$

$$\sec t = \sqrt{\frac{25}{9} + 1} = \sqrt{\frac{34}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{34}$$

Tomamos la raíz cuadrada positiva, ya que el rango de $\tan^{-1}t$ es $(-\pi/2, \pi/2)$, y la secante de un ángulo del cuadrante I o IV es positiva. Ahora podemos hallar $\cos t$ de la identidad recíproca:

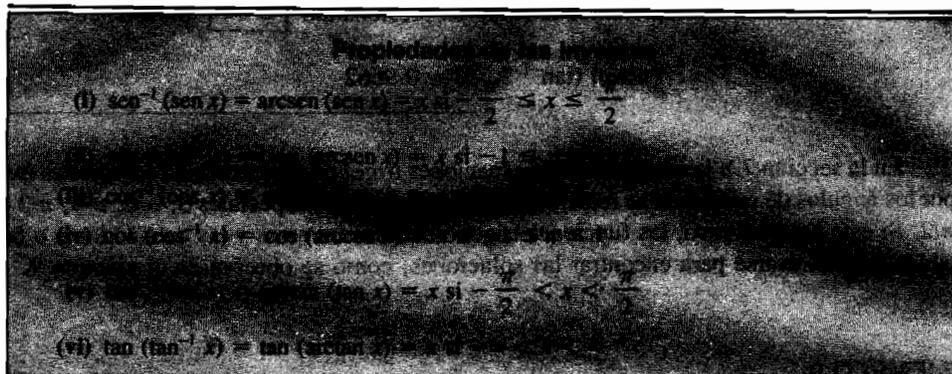
$$\cos t = \frac{1}{\sec t} = \frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Finalmente, podemos usar la identidad $\tan t = \sin t / \cos t$ para calcular $\sin(\tan^{-1}(-\frac{5}{3}))$. Encontramos que

$$\sin t = \tan t \cos t = -\frac{5}{3} \left(\frac{3}{\sqrt{34}} \right) = -\frac{5\sqrt{34}}{34}$$

PROPIEDADES DE LAS INVERSAS

Recordemos de la definición 4 del capítulo 3 que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ son válidas para cualquier función f y su inversa con ciertas restricciones apropiadas para x . Entonces, para las funciones trigonométricas inversas tenemos las siguientes propiedades.



EJEMPLO 7

Sin utilizar calculadora, evalúe cada uno de los siguientes casos:

(a) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{12}\right)$

(b) $\cos\left(\cos^{-1} \frac{1}{3}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right)$

Solución

(a) Basándonos en (i),

$$\sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$$

(b) Basándonos en (iv), $\cos(\cos^{-1} \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

(c) No podemos utilizar la propiedad inversa (v), pues $3\pi/4$ no está en $(-\pi/2, \pi/2)$. Si evaluamos primero $\tan(3\pi/4) = -1$, entonces tenemos

$$\tan^{-1}\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

USO DE LA CALCULADORA

La calculadora puede usarse para obtener aproximaciones a los valores de las funciones trigonométricas inversas. Para tal efecto, debe colocarse en el modo de radianes, pues los valores de las funciones trigonométricas inversas se definen como números reales (o ángulos medidos en radianes) y no como ángulos medidos en grados. (Si usted coloca su calculadora en el modo de grados para calcular, por ejemplo, $\tan^{-1} x$, obtendrá el ángulo en grados, entre -90° y 90° , cuya tangente es x). Si no dispone de calculadora, las tablas pueden "leerse hacia atrás" para obtener aproximaciones. En el apéndice encontrará más detalles.

EJEMPLO 8

Evalúe $\text{sen}(\tan^{-1} 3.75)$.

Solución. Con una calculadora colocada en el modo de radianes, presionamos 3.75, luego $\boxed{\text{INV}}$ y $\boxed{\text{tan}}$ (o $\boxed{\text{arctan}}$ o $\boxed{\text{tan}^{-1}}$ si tiene estas teclas). En ese momento aparecerá 1.3101939. Completamos la solución presionando $\boxed{\text{sin}}$ para obtener

$$\text{sen}(\tan^{-1} 3.75) \approx 0.9662$$

En la sección 7.8 la mayoría de las ecuaciones trigonométricas tenían soluciones que por los ángulos de referencia se relacionaban con los ángulos especiales 0 , $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ ó $\pi/2$. Si este no es el caso, las funciones trigonométricas inversas y las calculadoras o las tablas pueden usarse para encontrar las soluciones, como se observa en el ejemplo 9.

EJEMPLO 9

Encuentre las soluciones de

$$4 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución. Reconocemos que esta es una ecuación de segundo grado en términos de $\cos x$. Como no es factorizable, aplicamos la fórmula de la ecuación cuadrática para obtener

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{8}$$

En este momento descartamos el valor $(3 + \sqrt{37})/8 \approx 1.14$, pues es mayor que 1. Entonces sólo tenemos

$$\cos x = \frac{3 - \sqrt{37}}{8}$$

o

$$x = \cos^{-1} \left(\frac{3 - \sqrt{37}}{8} \right) \approx 1.97$$

Es interesante notar que, si hubiéramos tratado de calcular $\cos^{-1} [(3 + \sqrt{37})/8]$ con una calculadora, habríamos obtenido un mensaje de error.

Como se observa en el siguiente ejemplo, trabajar con las gráficas de las funciones trigonométricas inversas permite mejorar la asimilación de este material (véanse problemas 75 al 84).

EJEMPLO 10

Grafique cada uno de los siguientes casos:

(a) $y = \text{sen}(\text{sen}^{-1} x)$

(b) $y = \text{sen}^{-1}(\text{sen} x)$

Solución

(a) De la propiedad de la inversa (ii) tenemos

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x, \text{ si } -1 \leq x \leq 1$$

Sin embargo, para $|x| \geq 1$, $\text{sen}^{-1} x$ no está definido; en consecuencia, $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x)$ no se define. Por tanto, la gráfica de $y = \text{sen}(\text{sen}^{-1} x)$ es el segmento de recta $y = x$ para $-1 \leq x \leq 1$. Véase figura 64(a).

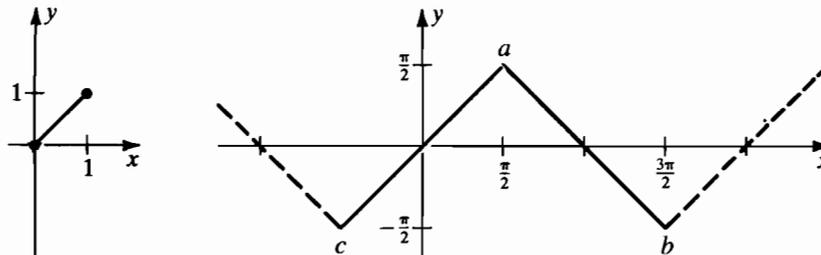


FIGURA 64 (a)

(b)

(b) De la propiedad de la inversa (i), tenemos

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x, \text{ si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Así, obtenemos el segmento de recta ac de la figura 64(b). Luego observamos que $\text{sen}^{-1}(\text{sen } x)$ se define para cualquier número real, ya que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$. La tabla adjunta da los valores de $y = \text{sen}^{-1}(\text{sen } x)$ para ciertos valores de x en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Usando estos datos, obtenemos el segmento de recta ab de la figura 64(b). Como la función seno tiene un periodo de 2π , se deduce que

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = \text{sen}^{-1}(\text{sen}(x + 2\pi))$$

En consecuencia, completamos la gráfica [líneas punteadas de la figura 64(b)] por medio de la periodicidad.

Observe que $-\pi/2 \leq \text{sen}^{-1}(\text{sen } x) \leq \pi/2$ para cualquier número real x .

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\text{sen } x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\text{sen}^{-1}(\text{sen } x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$

ARCCSC, ARCSEC Y ARCCOT

Las funciones $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ también tienen inversas cuando se restringen a los dominios $(0, \pi)$, $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ y $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$, respectivamente. (Véanse problemas 55 al 57). Otras restricciones del dominio diferentes de las analizadas aquí se utilizan algunas veces para definir las funciones inversas de cotangente, secante y cosecante. (Véase problema 58).

Estas funciones no se utilizan con tanta frecuencia como arctan, arccos y arcsen y, por ende, la mayoría de calculadoras científicas no traen teclas para estas funciones. Sin embargo, cualquier calculadora que resuelva arcsen, arccos y arctan puede usarse para obtener los valores de arccsc, arcsec y arccot. A diferencia del hecho de que $\sec x = 1/\cos x$, $\sec^{-1} x \neq 1/\cos^{-1} x$; por el contrario $\sec^{-1} x \neq \cos^{-1}(1/x)$ para $|x| \geq 1$. Relaciones similares son válidas para $\csc^{-1} x$ y $\cot^{-1} x$ (véanse problemas 87 al 89).

EJERCICIO 7.9

En los problemas 1 al 14, encuentre el valor indicado sin utilizar calculadora.

- | | |
|--|---|
| 1. $\sin^{-1} 0$ | 2. $\tan^{-1} \sqrt{3}$ |
| 3. $\arccos(-1)$ | 4. $\arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 5. $\arccos \frac{1}{2}$ | 6. $\arctan(-\sqrt{3})$ |
| 7. $\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | 8. $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 9. $\tan^{-1} 1$ | 10. $\sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 11. $\arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | 12. $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$ |
| 13. $\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | 14. $\arctan 0$ |

En los problemas 15 al 32, encuentre el valor indicado sin utilizar calculadora.

- | | |
|---|---|
| 15. $\sin \left(\cos^{-1} \frac{3}{5}\right)$ | 16. $\cos \left(\sin^{-1} \frac{1}{3}\right)$ |
| 17. $\tan \left(\arccos \left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ | 18. $\sin \left(\arctan \frac{1}{4}\right)$ |
| 19. $\cos \left(\arctan(-2)\right)$ | 20. $\tan \left(\sin^{-1} \left(-\frac{1}{6}\right)\right)$ |
| 21. $\csc \left(\sin^{-1} \frac{3}{5}\right)$ | 22. $\sec \left(\tan^{-1} 4\right)$ |
| 23. $\sin \left(\sin^{-1} \frac{1}{5}\right)$ | 24. $\cos \left(\cos^{-1} \left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ |
| 25. $\tan \left(\tan^{-1} 1.2\right)$ | 26. $\sin \left(\arcsen 0.75\right)$ |
| 27. $\arcsen \left(\sin \frac{\pi}{16}\right)$ | 28. $\arccos \left(\cos \frac{2\pi}{3}\right)$ |
| 29. $\tan^{-1} \left(\tan \pi\right)$ | 30. $\sin^{-1} \left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)$ |
| 31. $\cos^{-1} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ | 32. $\arctan \left(\tan \frac{\pi}{7}\right)$ |

En los problemas 33 al 40, escriba la expresión dada como una expresión algebraica en función de x .

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 33. $\sin(\tan^{-1} x)$ | 34. $\cos(\tan^{-1} x)$ |
| 35. $\tan(\arcsen x)$ | 36. $\sec(\arccos x)$ |
| 37. $\cot(\sin^{-1} x)$ | 38. $\cos(\sin^{-1} x)$ |
| 39. $\csc(\arctan x)$ | 40. $\tan(\arccos x)$ |

En los problemas 41 al 48, utilice una calculadora adaptada en el modo de radianes para obtener el valor de la expresión.

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| 41. $\sin^{-1} 0.7033$ | 42. $\cos^{-1} 0.2675$ |
| 43. $\tan^{-1} 5.798$ | 44. $\sin(\cos^{-1} 0.7317)$ |
| 45. $\tan(\arcsen 0.1296)$ | 46. $\cos(\arctan 1.369)$ |
| 47. $\sin(\tan^{-1} 2.066)$ | 48. $\cos(\sin^{-1} 0.5227)$ |

En los problemas del 49 al 54, encuentre las soluciones de la ecuación dada en el intervalo indicado. (Aproxime las respuestas a la centésima más cercana).

49. $20 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, $[0, \pi]$
50. $3 \sin^2 x - 8 \sin x + 4 = 0$, $[-\pi/2, \pi/2]$
51. $\tan^2 x + \tan x - 1 = 0$, $(-\pi/2, \pi/2)$
52. $3 \sin 2x + \cos x = 0$, $[-\pi/2, \pi/2]$
53. $5 \cos^3 x - 3 \cos^2 x - \cos x = 0$, $[0, \pi]$
54. $\tan^4 x - 3 \tan^2 x + 1 = 0$, $(-\pi/2, \pi/2)$
55. La función **cotangente inversa** puede definirse por $y = \operatorname{arccot} x$ (o $y = \cot^{-1} x$) si y sólo si $x = \cot y$, donde $0 < y < \pi$. Grafique $y = \operatorname{arccot} x$ y dé el dominio y el rango de esta función.
56. La función **cosecante inversa** puede definirse por $y = \operatorname{arccsc} x$ (o $y = \csc^{-1} x$) si y sólo si $x = \csc y$, donde $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ y $y \neq 0$. Grafique $y = \operatorname{arccsc} x$ y dé el dominio y el rango de esta función.
57. Una definición de la función **secante inversa** es $y = \operatorname{arcsec} x$ (o $y = \sec^{-1} x$) si y sólo si $x = \sec y$, donde $0 \leq y \leq \pi$ y $y \neq \pi/2$. (Véase problema 58 para una definición alterna). Grafique $y = \operatorname{arcsec} x$ y dé el dominio y el rango de $\operatorname{arcsec} x$ para esta definición.
58. Una definición alterna de la función **secante inversa** puede obtenerse restringiendo el dominio de la función **secante** a $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$. Con esta restricción, defina la función arcsec , formule su dominio y su rango, y grafique $y = \operatorname{arcsec} x$.

En los problemas 59 al 70, encuentre los valores indicados, sin utilizar calculadora.

- | | |
|--|--|
| 59. $\sec^{-1} 2$ | 60. $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ |
| 61. $\csc^{-1} \sqrt{2}$ | 62. $\operatorname{arccsc}^{-1}(-1)$ |
| 63. $\operatorname{arccot} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | 64. $\operatorname{arcsec}(-\sqrt{2})$ |
| 65. $\sin(\sec^{-1} 2)$ | 66. $\cos(\cot^{-1} \frac{1}{2})$ |
| 67. $\cot(\cot^{-1}(-3))$ | 68. $\sec^{-1}(\sec 1.6)$ |

69. $\arccsc\left(\csc\frac{3\pi}{2}\right)$ 70. $\cot(\operatorname{arccot}(-5))$

En los problemas 71 y 72, escriba la expresión dada como una expresión algebraica en función de x .

71. $\cos(\sec^{-1} x)$ 72. $\tan(\cot^{-1} x)$
 73. Con una calculadora en el modelo de radianes, evalúe $\arctan(\tan 1.8)$, $\arccos(\cos 1.8)$ y $\arcsen(\sen 1.8)$. Explique los resultados.
 74. Con una calculadora en el modo de radianes evalúe $\tan^{-1}(\tan(-1))$, $\cos^{-1}(\cos(-1))$ y $\sen^{-1}(\sen(-1))$. Explique los resultados.

En los problemas 75 al 84, trace la gráfica de la función dada.

75. $y = \arctan x$ 76. $y = \frac{\pi}{2} - \arctan x$
 77. $y = \arcsen x$ 78. $y = \sen^{-1}(x + 1)$
 79. $y = 2 \cos^{-1} x$ 80. $y = \cos^{-1} 2x$
 81. $y = \cos(\cos^{-1} x)$ 82. $y = \cos^{-1}(\cos x)$
 83. $y = \arccos(x - 1)$
 84. $y = \cos(\arcsen x)$

85. ¿Para qué valores de x es verdad que (a) $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$ y (b) $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$?
 86. ¿Para qué valores de x es verdad que (a) $\csc(\operatorname{arccsc} x) = x$ y (b) $\operatorname{arccsc}(\csc x) = x$?
 87. Verifique que

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

88. Verifique que

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ for } |x| \geq 1$$

89. Verifique que

$$\operatorname{arccsc} x = \arcsen\left(\frac{1}{x}\right) \text{ for } |x| \geq 1$$

En los problemas 90 al 95, utilice los resultados de los problemas del 87 al 89 y, con la ayuda de una calculadora, halle el valor indicado.

90. $\sec^{-1} 2.5$ 91. $\cot^{-1} 0.75$
 92. $\csc^{-1}(-1.3)$ 93. $\operatorname{arccsc}(-1.5)$
 94. $\operatorname{arccot}(-0.3)$ 95. $\operatorname{arcsec}(-1.2)$

96. En ciertas condiciones, la corriente i de un circuito eléctrico en un tiempo t es dada por

$$i = I[\sen(\omega t + \theta) \cos \phi + \cos(\omega t + \theta) \sen \phi]$$

Resuelva para t . [Sugerencia: use la fórmula de la suma de seno para escribir la expresión en paréntesis como una sola función seno].

97. El ángulo de partida θ para que una bala golpee el blanco a una distancia R (suponiendo que el blanco y el arma estén a la misma altura) satisface lo siguiente

$$R = \frac{v_0^2 \sen 2\theta}{g}$$

donde v_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración que imprime la gravedad. Si el blanco está a 800 pies del arma y la velocidad inicial es de 200 pies por segundo, encuentre el ángulo de partida. Use $g = 32$ pies/segundo² [Sugerencia: hay dos soluciones].

98. Para el juego olímpico de lanzamiento de martillo, puede demostrarse que la máxima distancia es lograda por el ángulo de lanzamiento θ (medido desde la horizontal), que satisface

$$\cos 2\theta = \frac{gh}{v^2 + gh}$$

donde h es la altura del martillo sobre el suelo en el momento del lanzamiento, v es la velocidad inicial, y g es la aceleración que imprime la gravedad. Encuentre el ángulo de lanzamiento óptimo para $v = 13.7$ m/s y $h = 2.25$ m. Use $g = 9.81$ m/s².

99. En el diseño de autopistas y vías férreas las curvas se inclinan para evitar los riesgos de la fuerza centrífuga. El ángulo de inclinación óptimo θ (véase figura 65) es dado por

$$\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

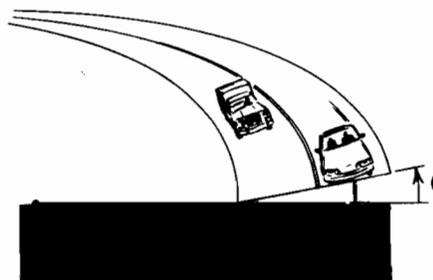


FIGURA 65

donde v es la velocidad del vehículo, R es el radio de la curva y g es la aceleración que imprime la gravedad. Como lo indica la fórmula, para un radio dado no hay un solo ángulo correcto para todas las velocidades. Como consecuencia, las curvas son inclinadas para el promedio de velocidad del tráfico que transita las vías. Encuentre el ángulo de inclinación correcto para una curva de radio de 600 pies en una vía cuya velocidad en promedio es de 30 mph. Use $g = 32$ pies/s². [Sugerencia: utilice unidades compatibles].

100. Si μ es el coeficiente de fricción entre el auto y el camino, entonces la velocidad máxima v_m que un auto puede alcanzar en una curva sin deslizarse es dada por

$$v_m^2 = gR \tan(\theta + \tan^{-1} \mu)$$

donde θ es el ángulo de inclinación de la curva. Encuentre v_m para la carretera del problema 99 si $\mu = 0.26$.

101. Visto lateralmente, un cono volcánico suele parecer un trapecioide simétrico (véase figura 66). Estudios de volcanes de menos de 50 mil años indican que la altura del cono H_{co} y la abertura del cráter W_{cr} están relacionados con la amplitud del cono W_{co} por las ecuaciones

$$H_{co} = 0.18W_{co}$$

$$W_{cr} = 0.40W_{co}$$

y

Si $W_{co} = 1.00$, use estas ecuaciones para determinar el ángulo de base ϕ del trapecioide en la figura 66.

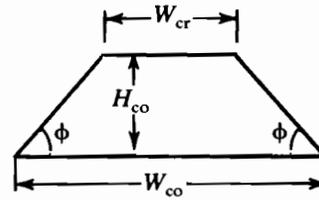


FIGURA 66

7.10 Forma trigonométrica y raíz n -ésima de números complejos

Ahora desarrollaremos la forma trigonométrica para representar los números complejos, que se analizaron en la sección 2.4.

REPRESENTACION GEOMETRICA

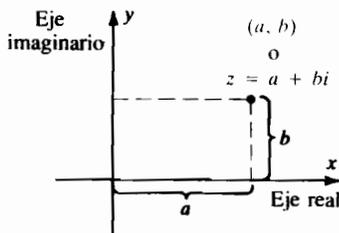


FIGURA 67

Comenzamos considerando una **representación geométrica**, para números complejos. Un número complejo $z = a + bi$ está determinado en forma única por la pareja de números reales (a, b) . Así podemos identificar el primero y el segundo elementos de una pareja ordenada con las partes real e imaginaria de z , respectivamente. Por ejemplo, $(2, -5)$ corresponde a $z = 2 - 5i$. Cuando cada punto en un plano coordenado se identifica con un número complejo de esta forma, el plano se llama **plano complejo***. Como se observa en la figura 67, el eje y o vertical se llama **eje imaginario**, y el eje x u horizontal se llama **eje real**.

EJEMPLO 1

Grafique los números complejos

$$z_1 = 5 + 4i, \quad z_2 = -2i, \quad z_3 = -2 - 3i, \quad \text{y} \quad z_4 = -4 + 2i$$

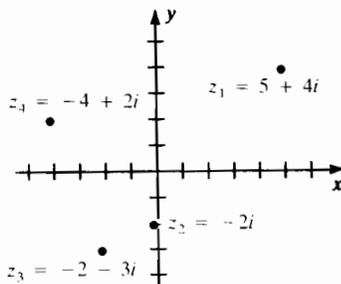


FIGURA 68

Solución. Como se observa en la figura 68, z_1, z_2, z_3 y z_4 se identifican por los puntos $(5, 4), (0, -2), (-2, -3)$ y $(-4, 2)$, respectivamente.

* Algunas veces se hace referencia al **plano de Argand**, en honor del matemático francés Jean R. Argand (1768-1822).

FORMA TRIGONOMETRICA DE UN NUMERO COMPLEJO

Si $z = a + bi$ es un número complejo diferente de cero y $P(a, b)$ es su representación geométrica como se observa en la figura 69, entonces la distancia de P al origen se da por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Esta distancia se llama **módulo** o **valor absoluto**, de z y se denota por $|z|$. Sea θ el ángulo en posición normal cuyo lado terminal pasa por $P(a, b)$. Entonces, $\cos \theta = a/r$ y $\sin \theta = b/r$, de donde obtenemos

$$a = r \cos \theta \quad y \quad b = r \sin \theta$$

Sustituyendo estas expresiones por a y b en $z = a + bi$, obtenemos

$$z = a + bi = (r \cos \theta) + (r \sin \theta)i$$

$$z = r[\cos \theta + i \sin \theta] \tag{12}$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Decimos que (12) es una **forma trigonométrica** o **forma polar** del número complejo z . El ángulo θ se llama **argumento** o **amplitud** de z y satisface $\tan \theta = b/a$. Sin embargo, θ no es necesariamente $\arctan(b/a)$, pues θ no se restringe a $(-\pi/2, \pi/2)$. (Véanse ejemplos 2 y 3). También el argumento θ no está determinado únicamente, pues $\cos \theta = \cos(\theta + 2k\pi)$ y $\sin \theta = \sin(\theta + 2k\pi)$ para cualquier número entero k . Si $z = a + bi = 0$, entonces $a = b = 0$. En este caso, $r = 0$ y podemos tomar cualquier ángulo θ como argumento. De hecho, sabemos que si $a_1 + b_1i = a_2 + b_2i$, entonces $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. Sin embargo, si $r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ entonces $r_1 = r_2$, pero θ_1 no necesariamente es igual a θ_2 .

EJEMPLO 2

Escriba en forma trigonométrica (a) $1 + i$ y (b) $1 - \sqrt{3}i$.

Solución

(a) Identificamos $a = 1$ y $b = 1$. Entonces,

$$r = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

Como $\tan \theta = b/a = 1$ y $(1, 1)$ está situada en el primer cuadrante, tomamos $\theta = \pi/4$, como se ve en la figura 70. Así,

$$z = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

(b) En este caso,

$$r = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

De $\tan \theta = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3}$ y el hecho de que $(1, -\sqrt{3})$ esté situado en el cuarto cuadrante, tomamos $\theta = 5\pi/3$, como se ve en la figura 71. Así,

$$z = 2 \left[\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right]$$

De manera alterna, podríamos tomar $\theta = -\pi/3$ y escribir

$$z = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]$$

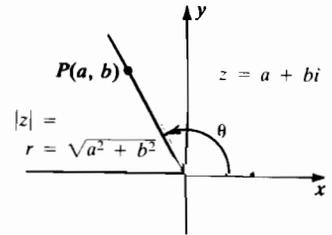


FIGURA 69

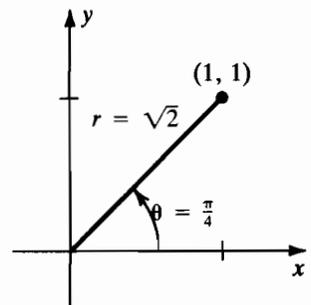


FIGURA 70

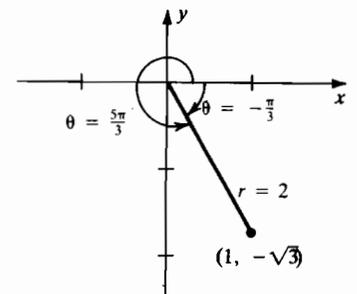


FIGURA 71

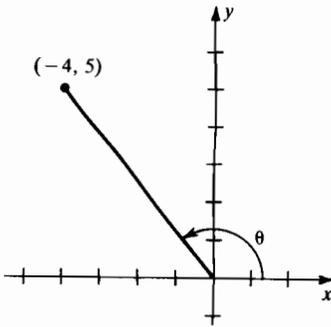


FIGURA 72

EJEMPLO 3

Encuentre la forma trigonométrica de $z = -4 + 5i$.

Solución. El módulo es

$$r = |-4 + 5i| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

Como $\tan \theta = -\frac{5}{4}$, observemos que θ no está relacionado con ninguno de los ángulos especiales $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$. Ya que $(-4, 5)$ se sitúa en el segundo cuadrante (figura 72), debemos tener cuidado al ajustar el valor de θ obtenido con una calculadora o con las tablas, para que nuestra respuesta final sea un ángulo del cuadrante II. Una forma de hacerlo es usando una calculadora en el modo de radianes para obtener el ángulo de referencia $\theta' = \tan^{-1} \frac{5}{4} \approx 0.8961$ radianes. El ángulo del cuadrante II que deseamos es, entonces,

$$\theta = \pi - \theta' \approx 2.2455$$

Así,

$$z \approx \sqrt{41}[\cos 2.2455 + i \operatorname{sen} 2.2455]$$

De manera alterna, la forma trigonométrica anterior puede escribirse usando un ángulo medido en grados. Con una calculadora en modo de grados, obtendríamos $\theta' \approx 51.34^\circ$ y $\theta = 180^\circ - \theta' \approx 128.66^\circ$, de donde se deduce que

$$z \approx \sqrt{41}[\cos 128.66^\circ + i \operatorname{sen} 128.66^\circ]$$

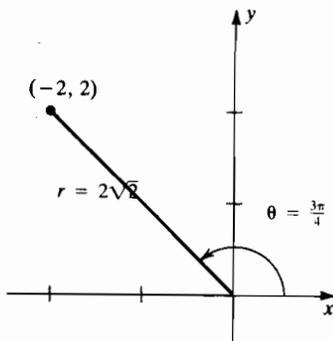


FIGURA 73

EJEMPLO 4

Encuentre el módulo y el argumento de $z_1 z_2$, donde $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$,

Solución. El producto es

$$z_1 z_2 = 2i(1 + i) = -2 + 2i$$

y, en consecuencia,

$$r = |z_1 z_2| = |-2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Identificando $a = -2$ y $b = 2$ tenemos $\tan \theta = -1$. Como θ es un ángulo en el cuadrante II, concluimos que $\theta = 3\pi/4$ (véase figura 73).

MULTIPLICACION Y DIVISION EN LA FORMA TRIGONOMETRICA

En el anterior ejemplo observamos que el módulo $r = 2\sqrt{2}$ del producto $z_1 z_2$ es el producto del módulo $r_1 = 2$ de z_1 y el módulo $r_2 = \sqrt{2}$ de z_2 . También el argumento $\theta = 3\pi/4$ de $z_1 z_2$ es la suma de los argumentos $\theta_1 = \pi/2$ y $\theta_2 = \pi/4$ de z_1 y z_2 , respectivamente. Hemos ilustrado un ejemplo particular del siguiente teorema, que describe cómo multiplicar y dividir números complejos cuando están escritos en forma trigonométrica.

RAICES DE z

Decimos que w es la raíz n -ésima de un número complejo z si $w^n = z$. En el siguiente análisis consideraremos un método para expresar la raíz n -ésima de un número complejo cuando esté escrito en forma trigonométrica.

Denotemos el módulo y el argumento de w por ρ y ϕ , respectivamente, así que $w = \rho [\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi]$. Si w es una raíz n -ésima de $z = r[\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]$ entonces, por el teorema de DeMoivre, tenemos que

$$w^n = z$$

puede escribirse así:

$$\rho^n [\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi] = r[\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]$$

Cuando dos números complejos son iguales, sus módulos son necesariamente iguales. Entonces, tenemos

$$\rho^n = r \quad \text{o} \quad \rho = r^{1/n}$$

y

$$\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

Igualando las partes reales e imaginarias de esta ecuación, tenemos

$$\cos n\phi = \cos \theta, \quad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen} \theta$$

de donde se deduce que $n\phi = \theta + 2k\pi$, o

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

donde k es un entero cualquiera. Como k adopta los valores enteros sucesivos $0, 1, 2, \dots, n-1$, obtenemos n raíces diferentes de z . Para $k \geq n$, los valores de $\operatorname{sen} \phi$ y $\cos \phi$ repiten los valores obtenidos cuando $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Para ver esto, supongamos que $k = n + m$ donde $m = 0, 1, 2, \dots$. Entonces,

$$\phi = \frac{\theta + 2(n+m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\pi$$

Como el seno y coseno tienen un periodo de 2π , tenemos

$$\operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2m\pi}{n} \right) \quad \text{y} \quad \cos \phi = \cos \left(\frac{\theta + 2m\pi}{n} \right)$$

y así no se obtienen nuevas raíces cuando $k \geq n$. Resumiendo estos resultados, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 3

Las raíces n -ésimas de un número complejo z diferente de cero $z = r[\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]$ se dan por

$$w = r^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

en donde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, y θ se miden en radianes.

Denotamos los n valores de w por z_0, z_1, \dots, z_{n-1} (correspondientes a $k = 0, 1, \dots, n-1$, respectivamente).

EJEMPLO 7 _____Encuentre las tres raíces cúbicas de i .**Solución.** En la forma trigonométrica para i , $r = 1$ y $\theta = \pi/2$, entonces

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

Con $n = 3$ encontramos según el teorema 3 que

$$w = 1^{1/3} \left[\cos \left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Ahora para

$$k = 0, \quad z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$$

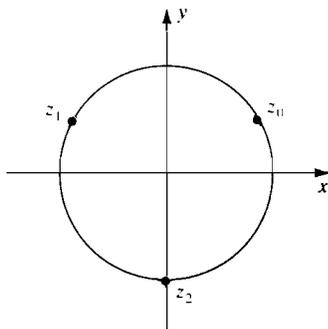
$$\begin{aligned} k = 1, \quad z_1 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2, \quad z_2 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = -i$$

Las tres raíces cúbicas de i encontradas en el ejemplo 7, se marcan en la figura 74. Observemos que están espaciadas equitativamente alrededor de la circunferencia de radio 1, centrada en el origen. En general, las raíces n -ésimas de un número complejo diferente de cero z están distribuidas proporcionalmente en las circunferencias del círculo de radio $|z|^{1/n}$ con centro en el origen (véase problema 87).

**FIGURA 74****EJEMPLO 8** _____Encuentre las cinco raíces quintas de $1 + i$.**Solución.** El módulo y el argumento de $1 + i$ son $\sqrt{2}$ y 45° respectivamente.Así que, $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$ Hemos elegido expresar el argumento en grados porque 45° es divisible por 5. Con $n = 5$, $r^{1/n} = (\sqrt{2})^{1/5} = 2^{1/10}$. Así, según el teorema 3, obtenemos

$$k = 0, \quad z_0 = 2^{1/10}[\cos 9^\circ + i \operatorname{sen} 9^\circ]$$

$$k = 1, \quad z_1 = 2^{1/10}[\cos 81^\circ + i \operatorname{sen} 81^\circ]$$

$$k = 2, \quad z_2 = 2^{1/10}[\cos 153^\circ + i \operatorname{sen} 153^\circ]$$

$$k = 3, \quad z_3 = 2^{1/10}[\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ]$$

$$k = 4, \quad z_4 = 2^{1/10}[\cos 297^\circ + i \operatorname{sen} 297^\circ]$$

Con una calculadora podemos obtener estas aproximaciones:

$$z_0 \approx 1.0586 + 0.1677i$$

$$z_1 \approx 0.1677 + 1.0586i$$

$$z_2 \approx -0.9550 + 0.4866i$$

$$z_3 \approx -0.7579 - 0.7579i$$

$$z_4 \approx 0.4866 - 0.9550i$$

EJERCICIO 7.10

En los problemas 1 al 10, grafique los números complejos dados y evalúe y grafique el número complejo indicado.

1. $z_1 = 2 + 5i; \bar{z}_1$

2. $z_1 = -8 - 4i; \frac{1}{4}\bar{z}_1$

3. $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 - 2i; z_1 + z_2$

4. $z_1 = 4i, z_2 = -4 + i; z_1 - z_2$

5. $z_1 = 6 - 3i, z_2 = -i; \bar{z}_1 + z_2$

6. $z_1 = 5 + 2i, z_2 = -1 + 2i; z_1 + \bar{z}_2$

7. $z_1 = -2i, z_2 = 1 - i; z_1 z_2$

8. $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 - i; z_1 z_2$

9. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i, z_2 = 1 - \sqrt{3}i; \frac{z_1}{z_2}$

10. $z_1 = i, z_2 = 1 - i; \frac{z_1}{z_2}$

En los problemas 11 al 22, encuentre el módulo y el argumento del número complejo dado.

11. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

12. $z = 4 + 3i$

13. $z = \sqrt{2} - 4i$

14. $z = -5 + 2i$

15. $z = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$

16. $z = -8 - 2i$

17. $z = 3 + 3i$

18. $z = -1 - i$

19. $z = \sqrt{3} + i$

20. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

21. $z = 2 - i$

22. $z = 4 + 8i$

En los problemas 23 al 32, escriba el número complejo dado en forma trigonométrica.

23. $z = -4i$

24. $z = 15i$

25. $z = 5\sqrt{3} + 5i$

26. $z = 3 + i$

27. $z = -2 + 5i$

28. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

29. $z = 3 - 5i$

30. $z = -10 + 6i$

31. $z = -2 - 2i$

32. $z = 1 - i$

En los problemas 33 al 42, escriba el número complejo dado en la forma $z = a + bi$. No utilice calculadora.

33. $z = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right]$

34. $z = 6 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$

35. $z = 10 [\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ]$

36. $z = \sqrt{5} [\cos 420^\circ + i \operatorname{sen} 420^\circ]$

37. $z = 2 [\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ]$

38. $z = 7 \left[\cos \frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12} \right]$

39. $z = \cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{5\pi}{3} \right)$

40. $z = \frac{3}{2} \left[\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right]$

41. $z = 4 [\cos (\tan^{-1} 2) + i \operatorname{sen} (\tan^{-1} 2)]$

42. $z = 20 \left[\cos \left(\tan^{-1} \frac{3}{5} \right) + i \operatorname{sen} \left(\tan^{-1} \frac{3}{5} \right) \right]$

En los problemas 43 al 48, encuentre $z_1 z_2$ y z_1/z_2 en forma trigonométrica, escribiendo primero z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

43. $z_1 = 3i, z_2 = 6 + 6i$

44. $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + i$

45. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$

46. $z_1 = 5i, z_2 = -10i$

47. $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = 5 - 5i$

48. $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, z_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$

En los problemas 49 al 52, encuentre $z_1 z_2$ y z_1/z_2 . Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.

49. $z_1 = \sqrt{6} \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right]$

$z_2 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$

50. $z_1 = 10 \left[\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right]$

$z_2 = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right]$

51. $z_1 = 3 \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right]$

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 10, responda verdadero o falso.

- La recta $x = \pi/2$ es una asíntota para la gráfica de $y = \tan x$. ___
- La gráfica de $y = \csc t$ no interseca el eje x . ___
- La recta $y = 1$ es una asíntota para la gráfica de $y = \sin t$. ___
- $\sin(-0.312) = \sin 0.312$. ___
- Las gráficas de $f(t) = 3 \sin(-2t)$ y $g(t) = -3 \cos(2t - \pi/2)$ son idénticas. ___
- La ecuación $\tan \alpha + 1 = \sec \alpha$ es una identidad. ___
- Para cualquier número real x , $\tan(\tan^{-1} x) = x$. ___
- Si $z = r[\cos \theta + i \sin \theta]$ es la forma trigonométrica de $z = a + bi$, entonces $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\theta = \tan^{-1}(b/a)$. ___
- Si el módulo del número complejo z es 3, entonces el módulo de z^3 es 9. ___
- Se dice que un objeto describe un movimiento armónico simple si su desplazamiento desde un punto de equilibrio en un tiempo t puede describirse por $y = a \sin(bt + c)$, donde a , b y c son números reales. ___

En los problemas del 11 al 26, grafique la función dada. Si corresponde, determine la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

- | | |
|---|--|
| 11. $y = 5(1 + \sin t)$ | 12. $y = -\frac{4}{3} \cos t$ |
| 13. $y = \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ | 14. $y = \pi - \cot t$ |
| 15. $y = -\sec t$ | 16. $y = \csc(t - \pi)$ |
| 17. $y = t + \cos t$ | 18. $y = \sin t - \cos t$ |
| 19. $y = -2 \cos \frac{1}{4}t$ | 20. $y = \frac{1}{4} \cos \pi t$ |
| 21. $y = -\sin(3t + \pi)$ | 22. $y = 4 \cos\left(-2t - \frac{\pi}{3}\right)$ |
| 23. $y = 2 \sec 4t$ | 24. $y = 1 - \tan \pi t$ |
| 25. $y = 10 \cos\left(-3t + \frac{\pi}{2}\right)$ | 26. $y = -4 \sin\left(\frac{1}{4}t - \pi\right)$ |

En los problemas 27 al 32, encuentre el valor exacto de la expresión dada.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 27. $\cos(-7\pi/12)$ | 28. $\sin(7\pi/8)$ |
| 29. $\tan(7\pi/8)$ | 30. $\sin(13\pi/12)$ |
| 31. $\sin 15^\circ \sin 45^\circ$ | 32. $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$ |
33. Dado que $\cos t = \sqrt{2}/3$, donde $3\pi/2 < t < 2\pi$, encuentre $\sin \frac{1}{2}t$, $\cos \frac{1}{2}t$, $\tan \frac{1}{2}t$, $\sin 2t$, $\cos 2t$, y $\tan 2t$.
34. Si $\sin u = \frac{2}{5}$ y $\cos v = \frac{5}{13}$, encuentre $\sin(u + v)$ y $\cos(u - v)$, donde $0 < u < \pi/2$ y $3\pi/2 < v < 2\pi$.

En los problemas 35 al 38, verifique la identidad dada.

- $\sin^2 \theta \sec \theta = \sec \theta - \cos \theta$
- $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = \sin 2x$
- $\frac{\tan^2 \beta}{\sec \beta - 1} = 1 + \sec \beta$

$$38. \frac{\sin t + \tan t}{1 + \sec t} = \sin t$$

En los problemas 39 y 40, demuestre que la ecuación trigonométrica dada no es una identidad.

- $\sin \theta + \cos \theta = 1$
- $\sqrt{1 + \sec^2 x} = \tan x$

En los problemas 41 al 44, encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada si x es un número real y θ es un ángulo medido en grados.

- $\cos 2\theta + \sin \theta = 1$
- $\tan^2 \theta = 2 \sec \theta - 2$
- $2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$
- $\sin x - \sqrt{\sin x} = 0$

En los problemas 45 al 50, encuentre el valor indicado, sin usar calculadora.

- | | |
|---|---|
| 45. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ | 46. $\arccos(-1)$ |
| 47. $\tan\left(\sec^{-1}\frac{4}{3}\right)$ | 48. $\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)$ |
| 49. $\sin^{-1}(\sin \pi)$ | 50. $\cos(\arccos 0.42)$ |

En los problemas 51 y 52, escriba la expresión dada como una expresión algebraica en función de x .

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| 51. $\sin(\arccos x)$ | 52. $\sec(\tan^{-1} x)$ |
|-----------------------|-------------------------|

En los problemas 53 y 54, encuentre las soluciones (aproximadas a la centésima más cercana) de la ecuación dada en el intervalo indicado.

- $3 \cos 2x + \sin x = 0$, $[-\pi/2, \pi/2]$
- $\tan^4 x + \tan^2 x - 1 = 0$, $(-\pi/2, \pi/2)$

En los problemas 55 y 56, trace la gráfica de la función dada.

- $y = \arccos x$
- $y = \arctan(x - \pi/2)$

En los problemas 57 y 58, dados z_1 y z_2 , evalúe y grafique los números complejos indicados.

- $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4i$; \bar{z}_1 , $z_1 + z_2$, y $z_1 z_2$
- $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$; $z_1 - z_2$, $\bar{z}_1 z_2$, y z_1/z_2

En los problemas 59 al 62, encuentre el módulo y el argumento del número complejo dado y escriba el número en forma trigonométrica.

- | | |
|--------------|--------------------|
| 59. $3 - 3i$ | 60. $\sqrt{3} - i$ |
| 61. $2 - 3i$ | 62. $1 + 4i$ |

En los problemas 63 y 64, escriba el número complejo dado en la forma $z = a + bi$.

- 63. $z = 4 \left[\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right]$
- 64. $z = 2[\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ]$

En los problemas 65 y 66, encuentre $z_1 z_2$ y z_1/z_2 en forma trigonométrica escribiendo primero z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

- 65. $z_1 = -1 - i, z_2 = 1 + \sqrt{3}i$
- 66. $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = 2 - 2i$

En los problemas 67 y 68, use el teorema de DeMoivre para calcular la potencia dada.

- 67. $(-1 - i)^7$
- 68. $\left[4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right) \right]^{10}$

En los problemas 69 y 70, evalúe las raíces indicadas.

- 69. Las cinco raíces quintas de 32
- 70. Las tres raíces cúbicas de $-i$
- 71. Factorice el polinomio $x^3 - 27i$
- 72. Un objeto viaja por una vía circular, centrado al origen, con velocidad angular constante. La coordenada x del objeto a cualquier tiempo t es dada por

$$x = 4 \cos \left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6} \right)$$

- (a) ¿Cuál es la coordenada x del punto cuando $t = 0$ segundos?
 - (b) ¿Cuál es el radio de la vía circular?
73. Un canal debe hacerse con una lámina de metal, de 30 cm de ancho, levantando los bordes unos 10 cm a lo largo de cada lado para que formen ángulos iguales ϕ con la vertical (véase figura 75). Expresé el área A del corte transversal como una función del ángulo ϕ . Trace la gráfica de esta función para $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

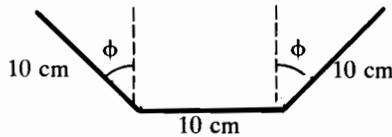


FIGURA 75

- 74. Demuestre que $\arcsen \frac{3}{5} + \arcsen \frac{4}{5} = \arcsen \frac{24}{25}$. [Sugerencia: use la fórmula de la suma para función seno].
- 75. Puede demostrarse que una bola de baloncesto de diámetro d , al acercarse a la cesta desde un ángulo θ con la horizontal pasará a través de un aro de diámetro D si

$$D \operatorname{sen} \theta > d, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

(véase figura 76). Si la bola tiene un diámetro de 24.6 cm y el aro de 45 cm, ¿qué rango de ángulos de acercamiento θ resultarán en una cesta?

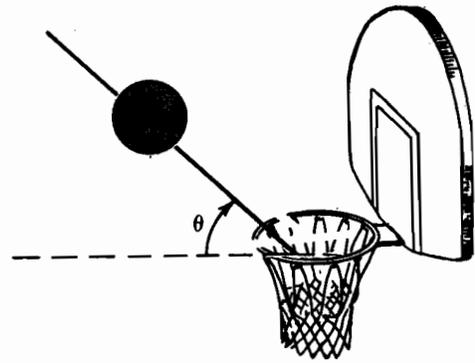


FIGURA 76

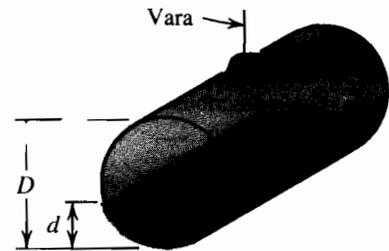


FIGURA 77

- 76. El aceite para calefacción doméstica suele almacenarse en un tanque cilíndrico apropiado que debe estar horizontal. Como se observa en la figura 77, la profundidad del aceite debe medirse sumergiendo una vara a través de un diámetro vertical. (a) Si la vara indica que la profundidad del aceite es d pulgadas demuestre que el volumen V del aceite es dado por la fórmula

$$V = (V_0/\pi) \left[\cos^{-1} \left(\frac{1 - 2d/D}{1 - 2d/D} \right) - \frac{(1 - 2d/D)\sqrt{(1 - d/D)d/D}}{(1 - 2d/D)\sqrt{(1 - d/D)d/D}} \right]$$

donde V_0 es la capacidad del tanque.

- (b) Demuestre que la fórmula de la parte (a) puede reescribirse de la siguiente forma

$$V = \frac{V_0}{\pi} [\cos^{-1} x - x\sqrt{(1 - x^2)/2}]$$

donde $x = 1 - 2d/D$.

- 77. En ciertas condiciones puede demostrarse que el ángulo de desplazamiento θ (medido en radianes) de un péndulo plano en un tiempo de t segundos está dado por

$$\theta = c_1 \cos \sqrt{g/L}t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{g/L}t$$

donde L es la longitud del péndulo, g la aceleración que imprime la gravedad y c_1 y c_2 son constantes que dependen de cómo se coloque en movimiento el péndulo (véase figura 78). Si $c_1 = \sqrt{3}$ y $c_2 = 1$, determine A , b y ϕ tal que $\theta = A \operatorname{sen}(bt - \phi)$.

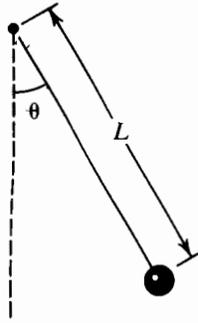


FIGURA 78

78. En ciertas condiciones, el desplazamiento vertical y (medido en pies desde la posición de equilibrio) de una masa al extremo de un resorte después de t segundos es dado por

$$y = -\frac{2}{3} \cos 10t + \frac{1}{2} \sin 10t$$

(véase figura 37).

- (a) Demuestre que $y = \frac{5}{6} \sin(10t - 0.927)$.
 (b) ¿En qué momento pasa la masa por la posición de equilibrio?
 79. Desde una nave espacial S se observa el punto P en la Tierra, como se ve en la figura 79. Para localizar P debemos determi-

nar el ángulo β formado por la línea que va de P al centro C de la Tierra y la recta que va de S a C . Sea A un punto en la circunferencia del horizonte (véase problema 86 en el capítulo 6 del ejercicio de repaso) tal que $AS \perp AC$, como se observa en la figura. Las medidas del ángulo α formado por PS y CS y el ángulo θ formado por AS y CS pueden hacerse desde la nave.

- (a) Demuestre que

$$\tan \alpha = \frac{\sin \theta \sin \beta}{1 - \sin \theta \cos \beta}$$

[Sugerencia: trace una perpendicular desde P a CS].

- (b) Si las medidas $\alpha = 27^\circ$ y $\theta = 30^\circ$ se obtienen, encuentre β .

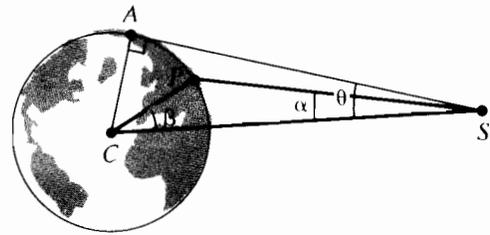


FIGURA 79

8.1 Sistemas de ecuaciones no lineales

ECUACIONES SIMULTANEAS

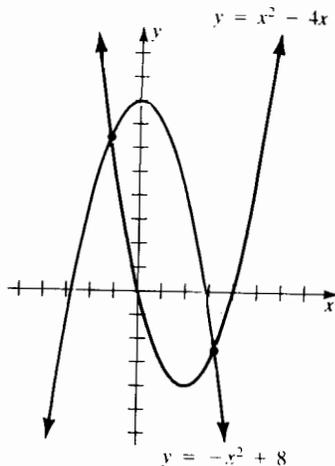


FIGURA 1

Como lo ilustra la figura 1, los gráficos de las parábolas $y = x^2 - 4x$ y $y = -x^2 + 8$ se cortan en dos puntos. Así, las coordenadas de los puntos de intersección deben satisfacer ambas ecuaciones, y decimos que

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 + 8 \end{cases} \quad (1)$$

son **ecuaciones simultáneas**, o que (1) es un **sistema de ecuaciones**. Específicamente, (1) es un **sistema de ecuaciones no lineal***. La **solución** de un sistema de ecuaciones con dos variables, o incógnitas, x y y es cualquier par ordenado de números reales (a, b) que satisfaga cada ecuación del sistema cuando a y b son sustituidas por x y y , respectivamente. La solución de un sistema de ecuaciones que incluye tres variables es una tripla ordenada de números reales (a, b, c) , y así sucesivamente. Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen precisamente las mismas soluciones.

METODO DE SUSTITUCION

En esta sección y en la próxima usaremos dos métodos para solucionar los sistemas de ecuaciones. La primera técnica considerada se llama **método de sustitución**. Los siguientes pasos resumen este método para sistemas de *dos* ecuaciones con *dos* variables.



EJEMPLO 1 _____

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 + 8 \end{cases}$$

* Recuerde que una ecuación lineal con dos variables es cualquier ecuación que pueda expresarse en la forma $ax + by + c = 0$. En esta ecuación, el exponente de ambas variables es 1.

Solución. Puesto que la primera ecuación ya expresa y en términos de x , sustituimos esta expresión por y en la segunda ecuación y simplificamos

$$\begin{aligned}x^2 - 4x &= -x^2 + 8 \\2x^2 - 4x - 8 &= 0 \\x^2 - 2x - 4 &= 0\end{aligned}$$

De la fórmula cuadrática encontramos $x = 1 - \sqrt{5}$ y $x = 1 + \sqrt{5}$. Usando la primera ecuación para obtener los valores correspondientes de y tenemos

$$y = (1 - \sqrt{5})^2 - 4(1 - \sqrt{5}) = 2 + 2\sqrt{5}$$

$$y = (1 + \sqrt{5})^2 - 4(1 + \sqrt{5}) = 2 - 2\sqrt{5}$$

Así $(1 - \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$ y $(1 + \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ son soluciones del sistema dado.

EJEMPLO 2

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases}x^4 - 2(10^{2y}) - 3 = 0 \\x - 10^y = 0\end{cases}$$

Solución. De la segunda ecuación, tenemos que

$$x = 10^y$$

y por consiguiente

$$x^2 = 10^{2y}$$

Al sustituir este último resultado dentro de la primera ecuación tenemos

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

o

$$(x^2 - 3)(x^2 + 1) = 0$$

Puesto que $x^2 + 1 > 0$ para todos los números reales x , se deduce que

$$x^2 = 3, \quad \text{o} \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Pero $x = 10^y > 0$ para toda y ; por consiguiente, debemos tomar $x = \sqrt{3}$. Resolviendo $\sqrt{3} = 10^y$ para y tenemos

$$y = \log_{10} \sqrt{3}, \quad \text{o} \quad y = \frac{1}{2} \log_{10} 3$$

Por tanto, $(\sqrt{3}, \frac{1}{2} \log_{10} 3)$ es la única solución del sistema.

EJEMPLO 3

Considere un rectángulo en el cuadrante I limitado por los ejes x y y y la gráfica de $y = 20 - x^2$. (Véase figura 2). Halle las dimensiones de tal rectángulo si su área es de 16 unidades cuadradas.

Solución. Sean (x, y) las coordenadas del punto P en la gráfica de $y = 20 - x^2$ mostrado en la figura. Entonces, el

$$\text{área del rectángulo} = xy \text{ o } 16 = xy$$

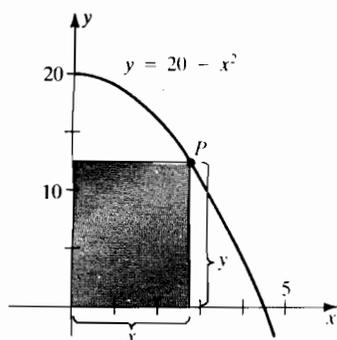


FIGURA 2

Así obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy = 16 \\ y = 20 - x^2 \end{cases}$$

La primera ecuación del sistema produce $y = 16/x$. Después de sustituir esta expresión por y en la segunda ecuación, obtenemos

$$\frac{16}{x} = 20 - x^2$$

$$16 = 20x - x^3$$

o

$$x^3 - 20x + 16 = 0$$

Ahora la regla de los signos de Descartes indica que esta última ecuación tiene bien sea dos raíces o ninguna raíz positiva. Las raíces racionales positivas posibles son 1, 2, 4, 8 y 16. Probando estos números por división sintética, eventualmente se muestra que

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 1 & 0 & -20 & 16 & \\ & & 4 & 16 & -16 & \\ \hline & 1 & 4 & -4 & 0 & = r \end{array}$$

y así 4 es una solución. Pero la división anterior de la factorización

$$x^3 - 20x + 16 = (x - 4)(x^2 + 4x - 4)$$

Aplicando la fórmula cuadrática a

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

nos da dos raíces reales más:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

El número positivo $-2 + 2\sqrt{2}$ es otra solución. (Puesto que las dimensiones son positivas, rechazamos el número negativo $-2 - 2\sqrt{2}$). En otras palabras, hay dos rectángulos con el área de 16 unidades cuadradas.

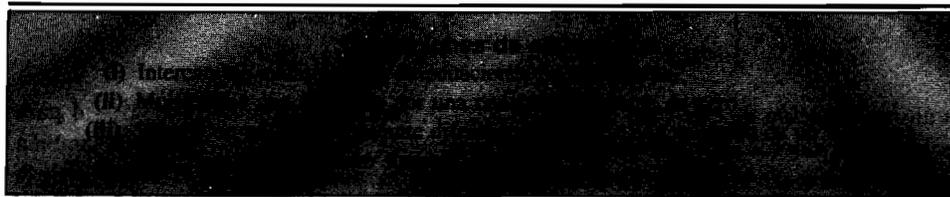
Para hallar y usamos $y = 16/x$. Si $x = 4$, entonces $y = 4$, y si $x = -2 + 2\sqrt{2} \approx 0.83$, entonces $y = 16/(-2 + 2\sqrt{2}) \approx 19.31$. Así, las dimensiones de los dos rectángulos son

4 unidades \times 4 unidades y (aproximadamente) 0.83 unidades \times 19.31 unidades.

Nota de advertencia: en el ejemplo 3 observamos que la ecuación $16 = 20x - x^3$ fue obtenida al multiplicar la ecuación que la precede por x . Recuerde: cuando las ecuaciones son multiplicadas por una variable, hay la posibilidad de introducir una solución extraña. Para asegurarse de que éste no sea el caso, usted debe probar cada solución.

METODO DE ELIMINACION

El siguiente método que ilustramos usa **operaciones de eliminación**. Cuando se aplica a un sistema de ecuaciones, estas operaciones producen un sistema equivalente de ecuaciones,



A menudo le sumamos un múltiplo constante diferente de cero de una ecuación a otras ecuaciones de un sistema, con la intención de eliminar una variable de aquellas ecuaciones.

EJEMPLO 4 _____

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -2x^2 + 7y^2 = 7 \end{cases}$$

Solución. Como preparación para eliminar el término x^2 , empezamos multiplicando la primera ecuación por 2. El sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 8 \\ -2x^2 + 7y^2 = 7 \end{cases} \quad (2)$$

es equivalente al sistema dado. Ahora sumándole la primera ecuación de este último sistema a la segunda, obtenemos otro sistema equivalente al original. En este caso, hemos eliminado x^2 de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 8 \\ 9y^2 = 15 \end{cases}$$

De la última ecuación vemos que $y = \pm \sqrt{15}/3$. Sustituyendo estos dos valores de y en $x^2 + y^2 = 4$ entonces tenemos

$$x^2 + \frac{15}{9} = 4, \quad \text{o} \quad x^2 = \frac{21}{9}$$

así que
$$x = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$$

Así $(\sqrt{21}/3, \sqrt{15}/3), (-\sqrt{21}/3, \sqrt{15}/3), (\sqrt{21}/3, -\sqrt{15}/3)$, y $(-\sqrt{21}/3, -\sqrt{15}/3)$ son todas soluciones. Las gráficas de las ecuaciones dadas y los puntos correspondientes a los pares ordenados están en la figura 3.

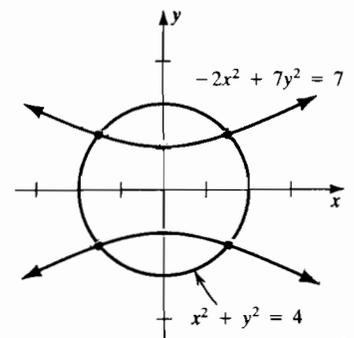


FIGURA 3

En el ejemplo 4 no hay necesidad de escribir el sistema (2). El sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 9y^2 = 15 \end{cases}$$

se obtiene inmediatamente combinando los pasos de multiplicar la primera ecuación por 2 y luego sumársela a la segunda. Además, como manera alternativa para resolver el sistema, podemos multiplicar la primera ecuación por -7 y sumársela a la segunda* para obtener

* Esto es lo mismo que multiplicar por 7 y restar.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -9x^2 = -21 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 9x^2 = 21 \end{cases}$$

La última ecuación de este caso da $x = \pm \sqrt{21}/3$. Entonces, usamos $x^2 + y^2 = 4$ para encontrar los valores correspondientes de y . Finalmente, notamos que el sistema también puede resolverse por el método de sustitución, al hacerlo, por ejemplo, en $y^2 = 4 - x^2$ de la segunda ecuación.

En el siguiente ejemplo, usamos la tercera operación de eliminación para simplificar el sistema antes de aplicar el método de sustitución.

EJEMPLO 5

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ x^2 - 2y + y^2 = 0 \end{cases}$$

Solución. Al multiplicar la primera ecuación por -1 y sumarle el resultado a la segunda, eliminamos x^2 de la ecuación:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación del último sistema implica que $y = x$. Al sustituir esta expresión en la primera ecuación, produce

$$x^2 - 2x + x^2 = 0, \quad \text{o} \quad 2x(x - 1) = 0$$

Se deduce que $x = 0$, $x = 1$ y correspondientemente, $y = 0$, $y = 1$. Así, las soluciones del sistema son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

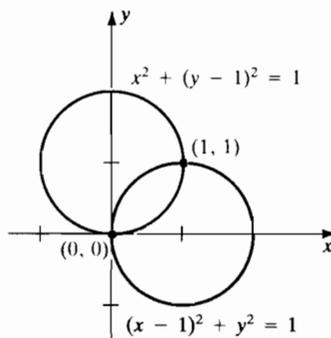


FIGURA 4

Al completar el cuadrado en x y y , podemos escribir el sistema en el ejemplo 5 como

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{cases}$$

De esto vemos que ambas ecuaciones describen circunferencias de radio $r = 1$. Las circunferencias y sus puntos de intersección están ilustrados en la figura 4.

En ciertos problemas que incluyen encontrar los valores máximo y mínimo de una función, a menudo es necesario resolver un sistema de ecuaciones no lineales con tres (o más) variables. Las variables del ejemplo siguientes son x , y , y λ (la letra griega lambda minúscula). Aunque describimos el método de sustitución para sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas, puede usarse en sistemas más grandes.

EJEMPLO 6

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$ax + by + c = 0$$

Así, un **sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (3)$$

determina dos líneas rectas en el plano xy .

SISTEMAS CONSISTENTES E INCONSISTENTES

Como vemos en las figuras 9(a), 9(b), y 9(c), respectivamente, hay tres casos posibles para las gráficas de las ecuaciones en el sistema (3):

- (i) las rectas se intersecan en un solo punto,
- (ii) las ecuaciones describen la misma recta, o
- (iii) las dos rectas son paralelas

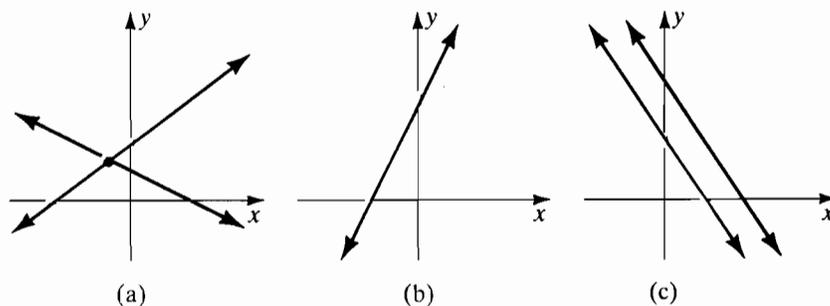


FIGURA 9

En estos tres casos decimos, respectivamente:

- (i) El sistema es consistente y las ecuaciones son independientes. Tiene exactamente una solución, es decir, el par ordenado de números reales correspondientes al punto de intersección de las rectas.
- (ii) El sistema es consistente, pero las ecuaciones son dependientes. Tiene infinitas soluciones, esto es, todos los pares de números reales correspondientes a los puntos de una recta.
- (iii) El sistema es inconsistente. No hay soluciones.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, podemos usar ya sea el método de sustitución o el método de eliminación.

EJEMPLO 1 _____

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Solución. Resolviendo la segunda ecuación para y , tenemos que

$$y = 2x - 4$$

Sustituimos esta expresión en la primera ecuación y despejamos x

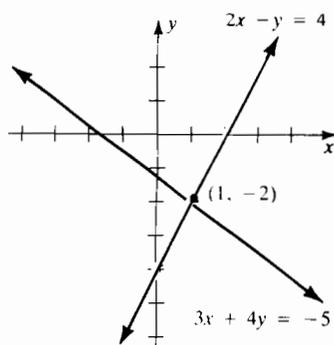


FIGURA 10

$$\begin{aligned} 3x + 4(2x - 4) &= -5 \\ 11x &= 11 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Entonces, la primera ecuación da

$$\begin{aligned} 3(1) + 4y &= -5 \\ 4y &= -8 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Así, la única solución del sistema es $(1, -2)$. El sistema es consistente y las ecuaciones son independientes. Las gráficas de las ecuaciones dadas se muestran en la figura 10.

EJEMPLO 2

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

Solución. Multiplicando la primera ecuación por -3 y sumándole el resultado a la segunda, da el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 4y = 6 \\ -14y = -17 \end{cases}$$

Resulta de la segunda ecuación que $y = 17/14$. Entonces, de la primera ecuación tenemos

$$x + 4\left(\frac{17}{14}\right) = 6$$

así que $x = \frac{8}{7}$. La solución es $(\frac{8}{7}, \frac{17}{14})$.

EJEMPLO 3

La inspección del sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -10x + 5y = -25 \end{cases}$$

muestra que multiplicar la primera ecuación por -5 produce la segunda ecuación. Por consiguiente, el sistema es equivalente al de dos ecuaciones idénticas.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

El sistema dado es consistente, pero las ecuaciones son dependientes. Si denotamos x por α sus soluciones pueden escribirse como el par ordenado

$$(\alpha, 2\alpha - 5)$$

donde α es un número real. Por cada elección de α , obtenemos una solución del sistema dado. Por ejemplo, para $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, y $\alpha = 1$, obtenemos las soluciones $(0, -5)$, $(\frac{1}{2}, -4)$, y $(1, -3)$, respectivamente. (Véase figura 11).

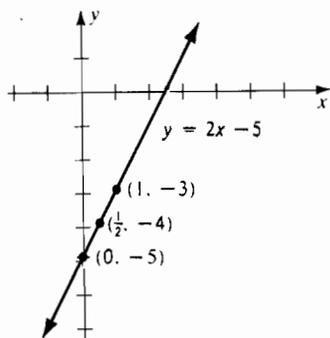


FIGURA 11

EJEMPLO 4

El sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

es inconsistente. Note que si restamos las ecuaciones, obtenemos la ecuación $0 = 3$, la cual nunca es verdadera. Así, el sistema no tiene soluciones. (Véase figura 12).

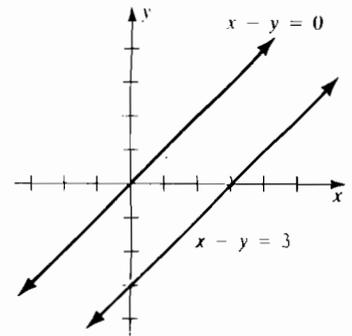


FIGURA 12

EJEMPLO 5

Una fuerza de mínima magnitud P se le aplica a un bloque de 300 libras que está sobre un plano inclinado para impedir que se resbale hacia abajo (véase figura 13). Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0.4 entonces la magnitud de la fuerza de rozamiento es $0.4 N$, donde N es la magnitud de la fuerza normal ejercida sobre el bloque por el plano. Puesto que el sistema está en equilibrio, los componentes horizontal y vertical de las fuerzas deben ser cero:

$$\begin{cases} P \cos 30^\circ + 0.4N \cos 30^\circ - N \cos 60^\circ = 0 \\ P \sin 30^\circ + 0.4N \sin 30^\circ + N \sin 60^\circ - 300 = 0 \end{cases}$$

Resuelva este sistema para P y N .

Solución. Usando $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ y $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, simplificamos el sistema anterior a

$$\begin{cases} \sqrt{3}P + (0.4\sqrt{3} - 1)N = 0 \\ P + (0.4 + \sqrt{3})N = 600 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por $\sqrt{3}$ y restando, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} \sqrt{3}P + (0.4\sqrt{3} - 1)N = 0 \\ 4N = 600\sqrt{3} \end{cases}$$

La segunda ecuación del último sistema da $N = 600\sqrt{3}/4 \approx 259.81$ lb.

La primera ecuación, entonces, produce $P = (1 - 0.4\sqrt{3})600/4 \approx 46.08$ lb.

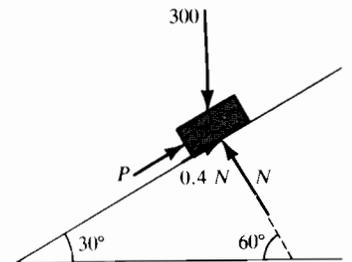


FIGURA 13

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES VARIABLES

Una ecuación lineal con tres variables

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde a , b y c no son todos cero, determina un plano en el espacio tridimensional. La solución de un sistema de tres ecuaciones con tres variables

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (4)$$

es una tripla ordenada de la forma (x, y, z) que satisface cada ecuación del sistema. La intersección de los tres planos descrita por el sistema (4) puede ser

- (i) un solo punto,
- (ii) infinitos puntos, o
- (iii) ningún punto

Como antes, a cada uno de estos casos le aplicamos los términos (i) consistente e independiente, (ii) consistente y dependiente y (iii) inconsistente, respectivamente. Cada uno se ilustra en la figura 14.

METODO DE SOLUCION

Por el método de eliminación es posible reducir el sistema (4) de tres ecuaciones lineales con tres variables a un sistema equivalente en forma triangular,

$$\begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ b'_2y + c'_2z = d'_2 \\ c'_3z = d'_3 \end{cases}$$

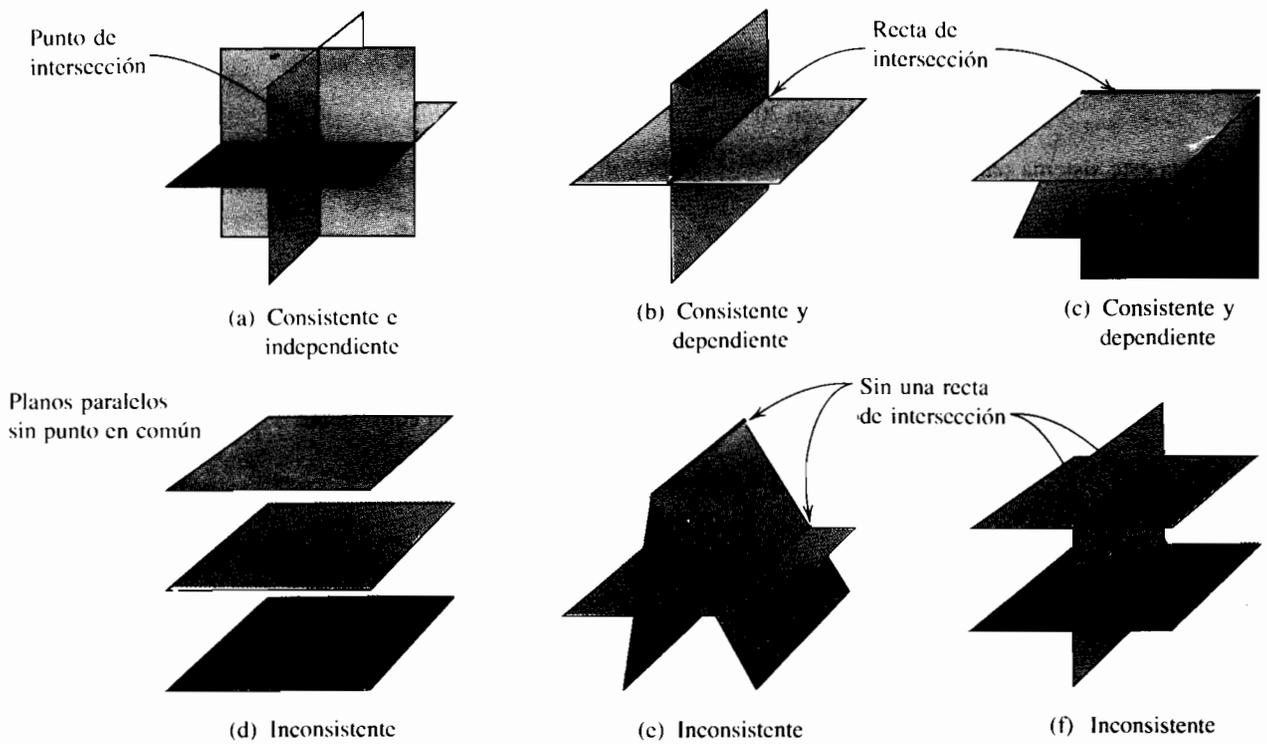


FIGURA 14

del cual puede obtenerse una solución (si existe) por **sustitución hacia atrás**. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 6

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases}$$

Solución. Multiplicando la primera ecuación por -4 , sumándole el resultado a la segunda, multiplicando la primera ecuación por -2 y sumándole el resultado a la tercera, se elimina x de estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ -10y - 5z = 20 \\ -5y + z = 31 \end{cases} \quad (5)$$

Si la segunda ecuación en (5) se multiplica por $-\frac{1}{2}$ y se le suma a la tercera ecuación, eliminamos y de la tercera ecuación y se obtiene un sistema equivalente en forma triangular:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ -10y - 5z = 20 \\ \frac{7}{2}z = 21 \end{cases} \quad (6)$$

Pero al multiplicar la segunda fila por $-\frac{1}{10}$ y la tercera fila por $\frac{2}{7}$, llegamos a otra forma triangular que es equivalente al sistema original:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ y + \frac{1}{2}z = -2 \\ z = 6 \end{cases}$$

De este último sistema, es inmediatamente obvio que $z = 6$. Usando este valor y sustituyendo hacia atrás en la segunda ecuación, resulta

$$y = -\frac{1}{2}z - 2 = -\frac{1}{2}(6) - 2 = -5$$

Finalmente, sustituyendo $y = -5$ y $z = 6$ en la primera ecuación, obtenemos:

$$x = -2y - z - 6 = -2(-5) - 6 - 6 = -2$$

Por consiguiente, la solución del sistema es $(-2, -5, 6)$.

EJEMPLO 7

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 0 \\ 8x + y + 5z = 6 \end{cases} \quad (7)$$

Solución. Usando la primera ecuación para eliminar la variable x de la segunda y tercera ecuaciones, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -7y - 3z = -10 \\ -7y - 3z = -10 \end{cases}$$

Este sistema, a su vez, es equivalente al sistema de forma triangular:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 7y + 3z = 10 \\ 0z = 0 \end{cases} \quad (8)$$

En este sistema no podemos determinar valores únicos para x , y y z . Cuando más, podemos despejar dos variables en términos de la variable que queda. Por ejemplo, de la segunda ecuación en (8), obtenemos y en términos de z :

$$y = -\frac{3}{7}z + \frac{10}{7}$$

Entonces, despejando x de la primera ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= -y - z + 2 \\ &= -\left(-\frac{3}{7}z + \frac{10}{7}\right) - z + 2 \\ &= -\frac{4}{7}z + \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Así, en las soluciones para y y x podemos escoger z *arbitrariamente*; si denotamos z con el símbolo α , donde α es un número real, entonces las soluciones del sistema son todas ternas ordenadas de la forma $(-\frac{4}{7}\alpha + \frac{4}{7}, -\frac{3}{7}\alpha + \frac{10}{7}, \alpha)$. Enfatizamos que para cada número real α , obtenemos una solución de (7). Por ejemplo, al escoger que α sea, digamos, 0, 1 y 2, obtenemos las soluciones $(\frac{4}{7}, \frac{10}{7}, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(-\frac{4}{7}, \frac{4}{7}, 2)$, respectivamente. En otras palabras, el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones.

En el ejemplo 7 no hay nada especial para resolver (8) para x y y en términos de z . Por ejemplo, al resolver (8) despejando x y z en términos de y , obtenemos la solución $(\frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}, \beta, -\frac{7}{3}\beta + \frac{10}{3})$, donde β es cualquier número real. Nótese que, al colocar β igual a $\frac{10}{7}, 1$ y $\frac{4}{7}$, obtenemos las mismas soluciones del ejemplo 7 correspondientes, a su vez, a $\alpha = 0, \alpha = 1, \alpha = 2$.

EJEMPLO 8

El sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + 3y = 1 \\ 8x - 3z = 4 \end{cases}$$

es equivalente a

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4y + z = 1 \\ 4y + z = 4 \end{cases}$$

el que, a su vez, es equivalente al sistema en forma triangular:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4y + z = 1 \\ 0z = 3 \end{cases}$$

Puesto que $0z = 0$ para cualquier número z , la última ecuación nunca se satisface. Así, el sistema es inconsistente y no tiene soluciones.

EJEMPLO 9

Una concesión del gobierno de US\$1,360,000 se dividió entre 100 científicos de tres grupos de investigación A, B, C . Cada científico del grupo de investigación A recibió US\$20,000, cada científico de B recibió US\$8,000 y cada científico de C recibió US\$10,000. El grupo de investigación A recibió cinco veces los fondos del grupo de investigación B . ¿Cuántos científicos pertenecen a cada grupo?

Solución. Sea

x = el número de científicos del grupo A

y = el número de científicos del grupo B

z = el número de científicos del grupo C

entonces

$20,000x$ = la cantidad de dinero recibido por el grupo A.

$8,000y$ = la cantidad de dinero recibido por el grupo B.

$10,000z$ = la cantidad de dinero recibido por el grupo C.

Además, si el grupo de investigación A recibe cinco veces los fondos que recibió el grupo B, entonces tenemos que

$$20,000x = 5(8,000y),$$

Así tenemos el sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 20,000x + 8,000y + 10,000z = 1,360,000 \\ 20,000x - 40,000y = 0 \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este último sistema por los métodos usados en esta sección, obtenemos $x = 40$, $y = 20$, y $z = 40$.

SISTEMAS HOMOGENEOS

Se dice que un sistema de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \quad (9)$$

o

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \quad (10)$$

es **homogéneo**. Los sistemas lineales homogéneos (9) y (10) *siempre* tienen las soluciones triviales $(0, 0)$ y $(0, 0, 0)$, respectivamente. Por consiguiente, *estos sistemas son siempre consistentes*. Además de la solución trivial, sin embargo, pueden existir infinitas soluciones no triviales.

EJEMPLO 10 _____

Los mismos pasos usados para resolver el sistema del ejemplo 7 pueden usarse para resolver el sistema homogéneo relacionado

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 5x - 2y + 2z = 0 \\ 8x + y + 5z = 0. \end{cases}$$

En este caso, encontramos

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 7y + 3z = 0 \\ 0z = 0. \end{cases}$$

Al escoger $z = \alpha$, donde α es un número real, tenemos que $x = -\frac{1}{7}\alpha$ y $y = -\frac{3}{7}\alpha$. Por consiguiente, las soluciones del sistema constan de todas las triplas ordenadas de la forma $(-\frac{1}{7}\alpha, -\frac{3}{7}\alpha, \alpha)$. Nótese que para $\alpha = 0$, obtenemos la solución trivial $(0, 0, 0)$ pero para $\alpha = -7$, obtenemos la solución no trivial $(4, 3, -7)$.

El análisis de esta sección es también aplicable a los sistemas de n ecuaciones lineales con n variables para $n > 3$.

EJERCICIO 8.2

En los problemas 1 al 26, halle las soluciones del sistema dado. Diga si el sistema es consistente, con ecuaciones dependientes, independientes o si es inconsistente.

1. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x - y + 1 = 0 \\ x + 3y + 9 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 4y + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ -0.5x + y = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6x - 4y = 9 \\ -3x + 2y = -4.5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -x - 2y + 4 = 0 \\ 5x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7x - 3y - 14 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = -8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ x - 2y + z = 4 \\ x + y - z = -4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + 6y + z = -2 \\ 3x + 4y - z = 2 \\ 5x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 7y - 4z = 1 \\ 2x + 3y + z = -3 \\ -x - 18y + 13z = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x + 4y - z = -2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 4x - y + 3z = 1 \\ 5x - 5y + 21z = 5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - 5y + z = 0 \\ 10x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} -5x + y + z = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 3y = 22 \\ y + 6z = -3 \\ \frac{1}{3}x + 2z = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x - z = 12 \\ x + y = 7 \\ 5x + 4z = -9 \end{cases}$

21. $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y - z = -1 \\ -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = \frac{3}{2} \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + 6y + z = 9 \\ 3x + y - 2z = 7 \\ -6x + 3y + 7z = -2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 1 \\ 5x + 5y - 5z = 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = 11 \\ 4x + 3y - 6z = -18 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - y + 3z - w = 8 \\ x + y - z + w = 3 \\ x - y + 5z - 3w = -1 \\ 6x + 2y + z - w = -2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - 2y + z - 3w = 0 \\ 8x - 8y - z - 5w = 16 \\ -x - y + 3w = -6 \\ 4x - 7y + 3z - 10w = 2 \end{cases}$

En los problemas 27 al 30 resuelva el sistema dado.

27. $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 3 \end{cases}$

[Sugerencia: primero resuelva para $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$]

28. $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 3 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{z} = -1 \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3 \log_{10} x + \log_{10} y = 2 \\ 5 \log_{10} x + 2 \log_{10} y = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \cos x - \sin y = 1 \\ 2 \cos x + \sin y = -1 \end{cases}$

31. Un aeroplano vuela a 3,300 millas de Hawai a California en 5.5 horas con el viento en favor. De California a Hawai, en contra de un viento de la misma velocidad, el viaje le toma 6

horas. Determine la velocidad del aeroplano y la velocidad del viento.

32. Una persona tiene veinte monedas, de diez y de veinticinco centavos, las cuales totalizan US\$4.25. Determine cuántas monedas de cada denominación tiene la persona.
33. Un tanque de 100 galones está lleno de agua en la cual se han disuelto 50 libras de sal. Un segundo tanque contiene 200 galones de agua con 75 libras de sal. ¿Cuánto debería sacarse y mezclarse de cada tanque para hacer una solución de 90 galones con $\frac{1}{3}$ de libra de sal por galón?
34. Si cambiamos la dirección de la fuerza de rozamiento de la figura 13 del ejemplo 5, entonces el sistema de ecuaciones llega a ser

$$\begin{cases} P \cos 30^\circ - 0.4N \cos 30^\circ - N \cos 60^\circ = 0 \\ P \sin 30^\circ - 0.4N \sin 30^\circ + N \sin 60^\circ - 300 = 0 \end{cases}$$

En este caso, P representa la magnitud de la fuerza que es justamente suficiente para mantener el bloque sobre el plano. Encuentre P y N .

35. Las magnitudes T_1 y T_2 de las tensiones de los dos cables mostrados en la figura 15 satisfacen

$$\begin{cases} T_1 \cos 25^\circ - T_2 \cos 15^\circ = 0 \\ T_1 \sin 25^\circ + T_2 \sin 15^\circ - 200 = 0 \end{cases}$$

Encuentre T_1 y T_2 .

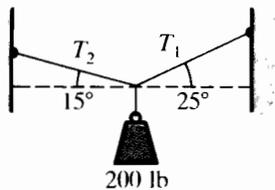


FIGURA 15

36. La suma de tres números es 20. La diferencia de los primeros dos es 5 y el tercero es 4 veces la suma de los dos. Encuentre los números.
37. Tres bombas P_1 , P_2 , y P_3 , trabajando juntas, pueden llenar un tanque en 2 horas. Las bombas P_1 y P_2 pueden llenar el mismo tanque en 3 horas, mientras las bombas P_2 y P_3 pueden llenarlo en 4 horas. Determine cuánto gastaría cada bomba trabajando sola para llenar el tanque.
38. La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa a través de los puntos $(1, 10)$, $(-1, 12)$, y $(2, 18)$. Halle a , b , y c .
39. Halle, el área del triángulo rectángulo mostrado en la figura 16.
40. De acuerdo con la ley de voltajes de Kirchoff, las corrientes i_1 , i_2 e i_3 del circuito en paralelo mostrado en la figura 17 satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} i_1 + 2(i_1 - i_2) + 0i_3 = 6 \\ 3i_2 + 4(i_2 - i_3) + 2(i_2 - i_1) = 0 \\ 2i_3 + 4(i_3 - i_2) + 0i_1 = 12 \end{cases}$$

Resuelva para i_1 , i_2 , e i_3 .

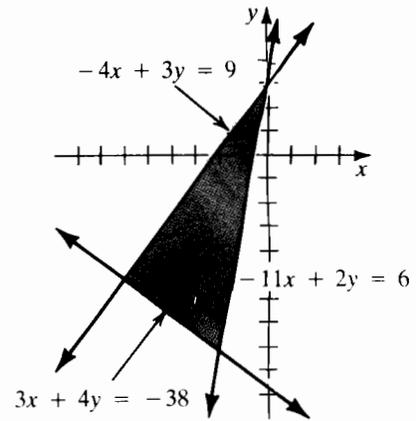


FIGURA 16

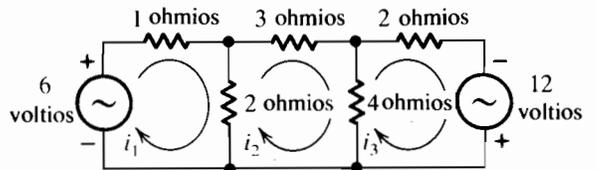


FIGURA 17

41. El contador de una grabadora registra el número de revoluciones del carrete que enrolla. Para hacer que la cinta mantenga en movimiento las cabezas de grabación de manera uniforme, el carrete que enrolla debe girar más rápidamente al principio y luego más lentamente. Puede demostrarse que la relación entre el tiempo t al que la cinta ha estado grabando (empezando en $t = 0$), y el número del contador x (empezando en $x = 0$) está dada por una función cuadrática de la forma

$$t(x) = ax^2 + bx$$

- (a) Suponga que una cinta tiene un total de grabación de 45 minutos. Halle las constantes a y b si la cinta produce 400 revoluciones en 25 minutos y 600 revoluciones en 45 minutos.
- (b) Suponga que una cinta en la parte (a) se devuelve completamente y luego se adelanta hasta que pase el material previamente grabado a la posición 550 del contador. ¿Cuántos minutos de grabación le quedan?
42. Los rayos cósmicos son desviados hacia los polos por el campo magnético de la Tierra, de tal manera que solamente los rayos más enérgicos pueden penetrar las regiones ecuatoriales (véase figura 18). Como resultado, el porcentaje de ionización σ y, por tanto, la conductividad de la estratosfera son mayores cerca de los polos que cerca del ecuador. La conductividad puede ser aproximada por la fórmula

$$\sigma = (A + B \sin^4 \phi)^{1/2}$$

donde ϕ es la latitud y A y B son constantes que deben escogerse de tal forma que se ajusten a los datos físicos. Las medidas del globo hechas en el hemisferio sur indicaron una con-

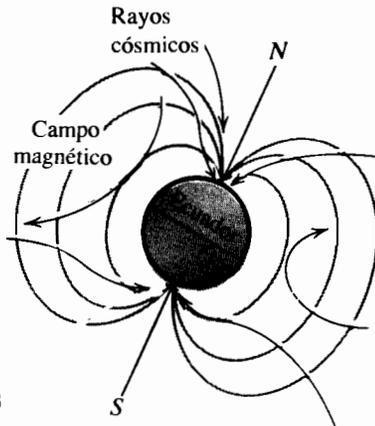


FIGURA 18

conductividad de aproximadamente 3.8×10^{-12} siemens/metro a una latitud sur de 35.5° y 5.6×10^{-12} siemens/metro en 51° latitud sur. (Un siemen es el recíproco de un ohmio, el

cual es una unidad de resistencia eléctrica). Determine las constantes A y B . ¿Cuál es la conductividad a 42° latitud sur?

43. Cuando Beth se graduó en la universidad, había completado 40 cursos, en los cuales recibió grados de A , B y C . Su PPG final (puntaje promedio de grado) fue 3.125. Su PPG en sólo los cursos en los cuales recibió los grados de A y B fue de 3.8. Se supone que los grados A , B y C valen 4 puntos, 3 puntos y 2 puntos, respectivamente. Determine el número de grados A , B y C que recibió.
44. Determine condiciones a_1 , a_2 , b_1 , y b_2 de modo que el sistema (9) tenga solamente la solución trivial.
45. Determine un valor de k tal que el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 6x - 9y = k \end{cases}$$

sea (a) inconsistente y (b) dependiente.

8.3 Fracciones parciales

En la sección 1.8 vimos que podemos expresar una suma tal como

$$\frac{-4}{x+3} + \frac{4}{x-2}$$

como una fracción

$$\frac{20}{(x+3)(x-2)} \quad (11)$$

usando el mínimo común denominador. En cursos posteriores de matemáticas estamos frecuentemente interesados en el problema inverso: dada una fracción tal como (11), descomponerla en fraccionarios individuales o **parciales**, con denominadores $x+3$ y $x-2$. La solución de este tipo de problemas incluye sistemas de ecuaciones lineales.

Supongamos que $f(x)/g(x)$ es una expresión racional donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios tales que el grado de $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$. Cuando el denominador $g(x)$ se expresa como un producto de $(cx+d)^n$ y $(ax^2+bx+c)^m$, con $n=1, 2, \dots$, y $m=1, 2, \dots$, donde ax^2+bx+c es **irreducible** (esto es, no se descompone en factores con coeficientes reales), la expresión $f(x)/g(x)$ puede descomponerse en una suma de fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_k}{(cx+d)^k} \quad \text{y} \quad \frac{B_kx+C_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Consideremos dos casos.

Caso I. Correspondiendo a cada factor $(cx + d)^n$, $n = 1, 2, \dots$, del denominador $g(x)$, la descomposición de $f(x)/g(x)$ contiene las fracciones parciales

$$\frac{A_1}{cx + d} + \frac{A_2}{(cx + d)^2} + \dots + \frac{A_n}{(cx + d)^n}$$

donde el A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ son números reales.

Como primer ejemplo mostraremos cómo (11) puede escribirse en fracciones parciales.

EJEMPLO 1 _____

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de (11).

Solución. Puesto que el exponente para cada uno de los factores $x + 3$ y $x - 2$ del denominador es $n = 1$, la descomposición de (11) contiene las fracciones parciales

$$\frac{A}{x + 3} \quad \text{y} \quad \frac{B}{x - 2}$$

donde A y B son constantes. Esto es,

$$\frac{20}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 2}$$

Volviendo a escribir el lado derecho de la última ecuación con el mínimo común denominador $(x + 3)(x - 2)$, obtenemos

$$\frac{20}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{A(x - 2) + B(x + 3)}{(x + 3)(x - 2)}$$

Puesto que los denominadores de ambos lados de la ecuación son iguales, los numeradores son también iguales:

$$20 = A(x - 2) + B(x + 3)$$

o
$$20 = (A + B)x - 2A + 3B$$

Puesto que la última ecuación es una identidad, los coeficientes de las potencias semejantes a x deben ser iguales:

$$\begin{array}{c} \text{igual} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ 0x + 20 = (A + B)x + (-2A + 3B) \\ \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \qquad \qquad \qquad \text{igual} \end{array}$$

Estas igualdades llevan al sistema de ecuaciones lineales con las variables A y B :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + 3B = 20 \end{cases}$$

Solucionando este sistema obtenemos $A = -4$ y $B = 4$ (Verifique esto). Por tanto,

$$\frac{20}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{-4}{x + 3} + \frac{4}{x - 2}$$

EJEMPLO 2

Halle la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{2x^2 - x + 5}{x^3 - 2x^2 + x}$$

Solución. El denominador se factoriza como $x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$. Ahora, puesto que el exponente para el factor x es $n = 1$ y el exponente para el factor $(x - 1)^2$ es $n = 2$, se deduce de la exposición del caso I que la descomposición de la expresión racional debe contener las fracciones parciales

$$\frac{A}{x} \quad y \quad \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

donde A , B y C son constantes. De

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x + 5}{x(x - 1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx}{x(x - 1)^2} \end{aligned}$$

obtenemos $2x^2 - x + 5 = A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx$,

o $2x^2 - x + 5 = (A + B)x^2 + (-2A - B + C)x + A$

Igualando los coeficientes de potencias semejantes a x en la última identidad, resulta

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A - B + C = -1 \\ A = 5 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $A = 5$, $B = -3$, y $C = 6$ y así

$$\frac{2x^2 - x + 5}{x(x - 1)^2} = \frac{5}{x} + \frac{-3}{x - 1} + \frac{6}{(x - 1)^2}$$

Caso II. Correspondiendo a cada factor $(ax^2 + bx + c)^m$, $m = 1, 2, \dots$, del denominador $g(x)$, la descomposición de $f(x)/g(x)$ contiene las fracciones parciales

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

Donde el B_i y C_i , $i = 1, 2, \dots, m$ son números reales.

EJEMPLO 3

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 3x - 2}{(x^2 + x + 4)^2}$$

Solución. Podemos fácilmente verificar de la fórmula cuadrática que $x^2 + x + 4$ es irreducible. Con $m = 2$, se deduce de la exposición del caso II que la forma de la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional dada debe ser

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 3x - 2}{(x^2 + x + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 4)^2}$$

Colocando el lado derecho de la ecuación sobre el mínimo común denominador e igualando los numeradores, obtenemos

$$x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = (Ax + B)(x^2 + x + 4) + Cx + D$$

o
$$x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = Ax^3 + (A + B)x^2 + (4A + B + C)x + 4B + D$$

Esta última identidad origina el sistema

$$\begin{cases} A & = 1 \\ A + B & = 7 \\ 4A + B + C & = 3 \\ 4B + D & = -2 \end{cases}$$

el cual tiene la solución $A = 1, B = 6, C = -7, D = -26$. Así,

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 3x - 2}{(x^2 + x + 4)^2} = \frac{x + 6}{x^2 + x + 4} + \frac{-7x - 26}{(x^2 + x + 4)^2}$$

Si el grado de $f(x)$ es mayor o igual al grado de $g(x)$ en $f(x)/g(x)$, entonces debemos llevar a cabo una división antes de usar fracciones parciales. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4

Halle la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{12x^3}{(2x + 1)(3x^2 + 1)}$$

Solución. Puesto que el grado del numerador es el mismo del denominador, empezamos con una división

$$\frac{12x^3}{(2x + 1)(3x^2 + 1)} = 2 - \frac{6x^2 + 4x + 2}{(2x + 1)(3x^2 + 1)}$$

Ahora, puesto que $3x^2 + 1$ es irreducible, tenemos

$$\frac{6x^2 + 4x + 2}{(2x + 1)(3x^2 + 1)} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{Bx + C}{3x^2 + 1}$$

De esto obtenemos

$$\begin{aligned} 6x^2 + 4x + 2 &= A(3x^2 + 1) + (Bx + C)(2x + 1) \\ &= (3A + 2B)x^2 + (B + 2C)x + A + C \end{aligned}$$

y

$$\begin{cases} 3A + 2B & = 6 \\ B + 2C & = 4 \\ A + C & = 2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema $A = \frac{2}{3}, B = \frac{14}{3}, y C = \frac{4}{3}$. Por tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{12x^3}{(2x + 1)(3x^2 + 1)} = 2 - \frac{\frac{2}{3}}{2x + 1} - \frac{\frac{14}{3}x + \frac{4}{3}}{3x^2 + 1}$$

EJERCICIO 8.3

En los problemas 1 al 28, encuentre la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional dada.

1. $\frac{1}{x(x+2)}$

3. $\frac{-9x+27}{x^2-4x-5}$

5. $\frac{2x^2-x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

7. $\frac{5x-6}{(x-3)^2}$

9. $\frac{x}{x^2-16}$

11. $\frac{1}{x^2(x+2)^2}$

13. $\frac{6x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+9)}$

15. $\frac{4x^2+4x-6}{(2x-3)(x^2-x+1)}$

2. $\frac{2}{x(4x-1)}$

4. $\frac{-5x+18}{x^2+2x-63}$

6. $\frac{1}{x(x-2)(2x-1)}$

8. $\frac{5x^2-25x+28}{x^2(x-7)}$

10. $\frac{10x-5}{25x^2-1}$

12. $\frac{-4x+6}{(x-2)^2(x-1)^2}$

14. $\frac{2x+10}{2x^3+x}$

16. $\frac{2x^2-x+7}{(x-6)(x^2+x+5)}$

17. $\frac{t+8}{t^4-1}$

19. $\frac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)}$

21. $\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$

23. $\frac{3x-1}{x^3(x-1)(x+3)}$

25. $\frac{x^4+3x}{x^2-1}$

27. $\frac{x^3+x^2-x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

18. $\frac{y^2+1}{y^3-1}$

20. $\frac{x-15}{(x^2+2x+5)(x^2+6x+10)}$

22. $\frac{2x^2}{(x-2)(x^2+4)^2}$

24. $\frac{x^2-x}{x(x+4)^3}$

26. $\frac{x^2-4x+1}{2x^2+5x+2}$

28. $\frac{x^6}{x^3-2x^2+x-2}$

En los problemas 29 y 30, encuentre la descomposición en fracciones parciales de la expresión dada.

29. $\frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^2 t + 3 \operatorname{sen} t + 2}$

30. $\frac{1}{\cos^3 t - \cos^2 t}$

8.4 Sistemas de inecuaciones lineales

SEMIPLANOS

Una **inecuación lineal con dos variables** x y y es una desigualdad que tiene una de las formas

$$ax + by + c < 0, \quad ax + by + c > 0 \quad (12)$$

$$ax + by + c \leq 0, \quad ax + by + c \geq 0 \quad (13)$$

Una **solución** de una inecuación lineal con dos variables es un par ordenado de números reales (x_0, y_0) que satisface la desigualdad cuando x_0 y y_0 son sustituidos por x y y , respectivamente. Puesto que las inecuaciones en (12) y (13) tienen infinitas soluciones, la notación

$$\{(x, y) | ax + by + c < 0\}, \{(x, y) | ax + by + c \geq 0\}$$

y así sucesivamente, se usa para denotar un conjunto de soluciones. Geométricamente, cada uno de estos conjuntos describe un **semiplano**. Como se muestra en la figura 19, la gráfica de la ecuación lineal $ax + by + c = 0$, divide el plano xy en dos regiones, o semiplanos. Uno de estos semiplanos es la gráfica del conjunto de soluciones de la inecuación lineal. Si

la desigualdad es estricta, como en (12) dibujamos la gráfica de $ax + by + c = 0$ como una recta punteada, puesto que los puntos sobre la recta no están en el conjunto de soluciones de la inecuación. Véase figura 19(a). Por otra parte, si la desigualdad no es estricta, como en (13), el conjunto de soluciones incluye los puntos que satisfacen $ax + by + c = 0$, y así dibujamos el gráfico de la ecuación como una recta continua. Véase figura 19(b).

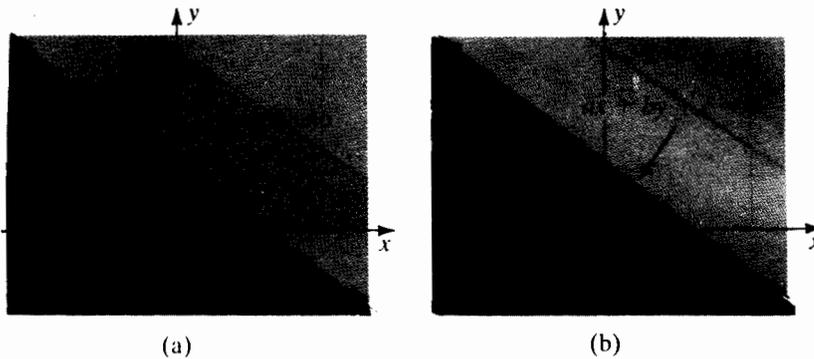


FIGURA 19

EJEMPLO 1

Sobre la recta numérica la desigualdad $x \geq 1$ se satisface con todos los números a la derecha de $x = 1$, incluido $x = 1$. Sin embargo en el plano cartesiano, el conjunto $\{(x, y) | x \geq 1\}$ incluye todos los puntos a la derecha de la recta vertical $x = 1$ incluyendo la recta. Este semiplano se ilustra en la figura 20.

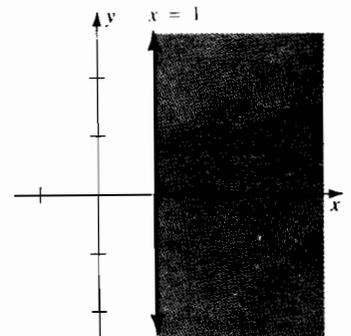


FIGURA 20

EJEMPLO 2

Grafique las soluciones de la inecuación

$$2x - 3y \geq 12 \tag{14}$$

Solución. Primero, graficamos la recta,

$$2x - 3y = 12 \tag{15}$$

como se muestra en la figura 21(a). Resolviendo la inecuación (14) para y obtenemos

$$y \leq \frac{2}{3}x - 4 \tag{16}$$

Puesto que la coordenada y de cualquier punto (x, y) en la gráfica (14) debe satisfacer (16), concluimos que el punto (x, y) debe estar sobre la recta o debajo de ella (15). Véase figura 21(b).

Alternativamente, el conjunto

$$\{(x, y) | 2x - 3y - 12 \geq 0\}$$

describe un semiplano limitado por la gráfica de (15). Así podemos determinar si la gráfica de la inecuación incluye la región sobre la recta o debajo de ella (15), determinando si un punto que no esté en la recta tal como $(0, 0)$ satisface la inecuación original. Sustituyendo $x = 0, y = 0$ en (14), obtenemos la proposición falsa $0 \geq 12$. Esto implica que la gráfica de la inecuación incluye la región del otro lado de la recta

$$2x - 3y = 12$$

esto es, el lado que no contiene el origen.

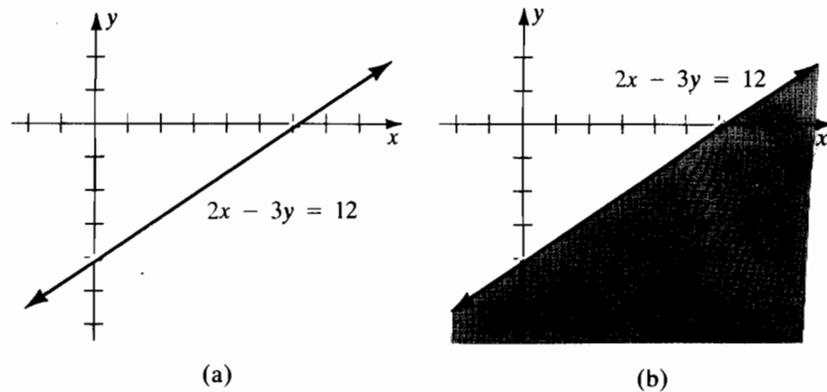
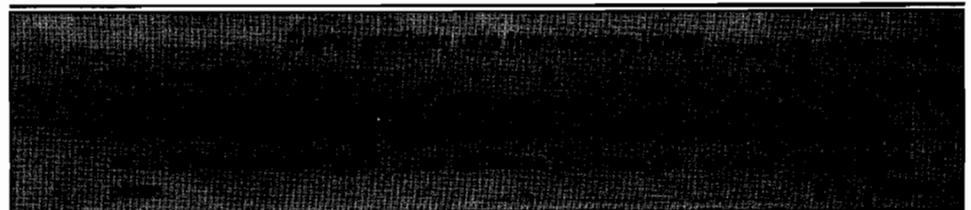


FIGURA 21

En general, dada una inecuación lineal de las formas (12) ó (13), podemos hacer la gráfica de las soluciones procediendo de la siguiente manera:



EJEMPLO 3

Grafique las soluciones de $3x + y - 2 < 0$.

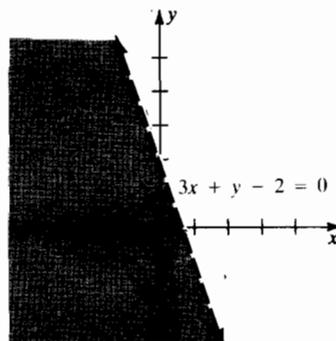


FIGURA 22

Solución. En la figura 22 indicamos la gráfica de $3x + y - 2 = 0$ con una recta punteada, puesto que no será parte del conjunto de soluciones. Entonces, seleccionamos $(0, 0)$ como un punto que no está sobre la recta. Puesto que $x = 0, y = 0$ satisface la inecuación original, sombreamos la región que contiene el origen.

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES

En la próxima sección examinaremos algunas aplicaciones que requieran soluciones de un **sistema de inecuaciones lineales**. Una **solución** de tal sistema es cualquier par ordenado de números reales (x_0, y_0) que satisfaga cada inecuación. En otras palabras, (x_0, y_0) es una solución de un sistema de inecuaciones lineales cuando es miembro del conjunto de soluciones *comunes* a todas las inecuaciones. Este conjunto de soluciones comunes es, simplemente, la *intersección* de conjuntos solución de las inecuaciones.

EJEMPLO 4

Haga la gráfica de las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

Solución. Los conjuntos

$$\{(x, y) | x \geq 1\} \quad \text{y} \quad \{(x, y) | y \leq 2\}$$

denotan los conjuntos de soluciones para cada inecuación. Estos conjuntos se ilustran en la figura 23 por las regiones gris y rosada, respectivamente. Las soluciones del sistema dado son los pares ordenados en el conjunto

$$\{(x, y) | x \geq 1\} \cap \{(x, y) | y \leq 2\} = \{(x, y) | x \geq 1 \quad \text{y} \quad y \leq 2\}$$

Este último conjunto es la intersección de regiones gris y rosada mostrada en la figura 23.

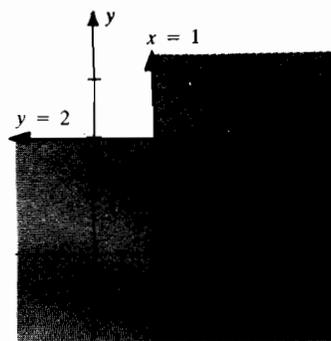


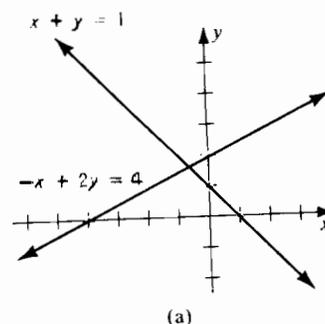
FIGURA 23

EJEMPLO 5

Grafique las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

Solución. La gráfica de cada recta se muestra en la figura 24(a). La sustitución de (0, 0) en la primera inecuación da la proposición verdadera $0 \leq 1$, lo cual implica que la gráfica de las soluciones de $x + y \leq 1$, es el semiplano de *abajo* (e incluyendo) la recta $x + y = 1$. Esta es la región rosada de la figura 24(b). De igual forma, sustituyendo (0, 0) en la segunda inecuación obtenemos la proposición falsa $0 \geq 4$, y así la gráfica de las soluciones de $-x + 2y \geq 4$ es el semiplano de *arriba* (e incluyendo) la recta $-x + 2y = 4$. Esta es la región gris de la figura 24(b). La gráfica de las soluciones del sistema de inecuaciones es, entonces, la intersección de las gráficas de estos dos conjuntos solución. Esta es la intersección de las regiones gris y rosada en la figura 24(b).



(a)

A menudo nos interesamos en las soluciones de un sistema de inecuaciones lineales sujetas a las restricciones $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Esto significa que la gráfica de las soluciones es un subconjunto de un conjunto que consiste en el primer cuadrante y los ejes coordenados no negativos. Por ejemplo, la inspección de la figura 24(b) revela que el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

sujeto a los requisitos agregados de $x \geq 0$, $y \geq 0$, no tienen soluciones.

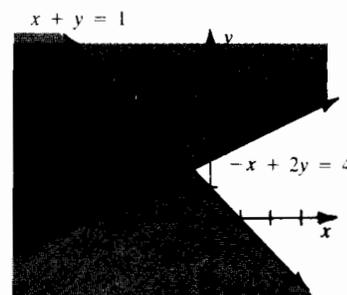


FIGURA 24

EJEMPLO 6

La gráfica de las soluciones del sistema de inecuaciones lineales

$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

es la región que se muestra en la figura 25(a).

La gráfica de las soluciones de

$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + 2y \geq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

es la región que se muestra en la figura 25(b).

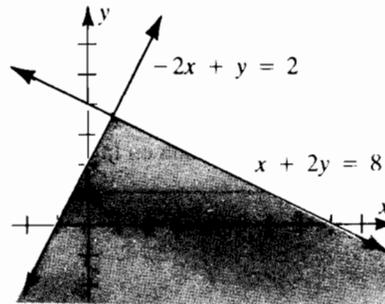
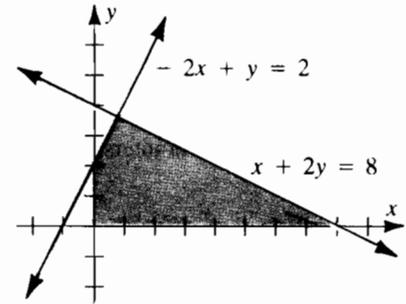


FIGURA 25

(a)



(b)

EJERCICIO 8.4

En los problemas 1 al 10, haga la gráfica de las soluciones de las inecuaciones dadas.

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| 1. $y \geq x$ | 2. $y \leq 2x + 3$ |
| 3. $x + 3y \geq 6$ | 4. $x - y \leq 4$ |
| 5. $x + 2y < -x + 3y$ | 6. $2x + 5y > x - y + 6$ |
| 7. $-y \geq 2(x + 3) - 5$ | 8. $x \geq 3(x + 1) + y$ |
| 9. $4y + 5 \leq -3x + 17$ | 10. $5x + 2y \geq 20$ |

En los problemas 11 al 30, haga la gráfica de las soluciones del sistema de inecuaciones lineales dado.

- | | |
|--|--|
| 11. $\begin{cases} x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 5 \end{cases}$ | 12. $\begin{cases} -1 \leq x \leq 5 \\ y \geq 3 \end{cases}$ |
| 13. $\begin{cases} y \leq x \\ x \geq 2 \end{cases}$ | 14. $\begin{cases} y \geq x \\ y \geq 0 \end{cases}$ |
| 15. $\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 1 \end{cases}$ | 16. $\begin{cases} x + y < 1 \\ -x + y < 1 \end{cases}$ |
| 17. $\begin{cases} x + 2y \leq 4 \\ -x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$ | 18. $\begin{cases} 4x + y \geq 12 \\ -2x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ |
| 19. $\begin{cases} x - 3y > -9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ | 20. $\begin{cases} x + y > 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ |
| 21. $\begin{cases} y < x + 2 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$ | 22. $\begin{cases} 4y > x \\ x \geq 2 \\ y \leq 5 \end{cases}$ |
| 23. $-1 \leq x + y \leq 1$ | 24. $-x \leq y \leq x$ |
| 25. $\begin{cases} x + 2y \leq -x + y + 4 \\ -x + y + 3 \leq 2x - y - 3 \end{cases}$ | |

26. $\begin{cases} x + 2y \geq -x + 5y + 6 \\ y \geq 6 - x \\ y \geq 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ y \geq -x \\ y \leq 2x \end{cases}$

29. $\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + 3y \leq 10 \\ x - y \leq 5 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ x - y \geq -6 \\ 2x + y \leq 6 \end{cases}$

30. $\begin{cases} -x + y \leq 0 \\ -x + 3y \geq 0 \\ x + y - 8 \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$

En los problemas 31 y 32, encuentre un sistema de inecuaciones lineales que describa la región mostrada en la figura.

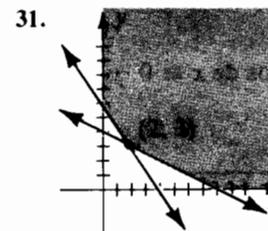


FIGURA 26

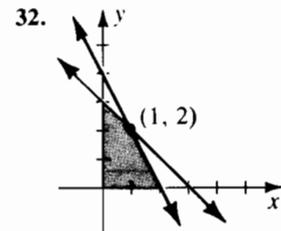


FIGURA 27

33. Considere el sobre de longitud x y altura y mostrado en la figura 28 y la siguiente regulación postal, de noviembre de 1978:

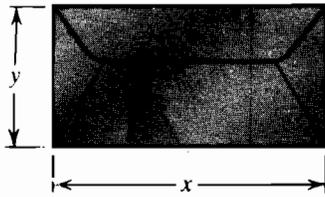


FIGURA 28

Todos los artículos de primera clase que pesen una onza o menos y todos los artículos individuales de tercera clase que

pesen dos onzas o menos están sujetos a un precio extra de correo cuando la altura sea mayor que $6\frac{1}{8}$ pulgadas o el largo sea mayor que $11\frac{1}{2}$ pulgadas, menor que 1.3 veces la altura, o mayor que 2.5 veces la altura.

- (a) Usando x y y , interprete la regulación anterior como un sistema de inecuaciones lineales.
- (b) Asumiendo que las especificaciones de peso se satisfacen, haga la gráfica de la región que describa los tamaños del sobre que no están sujetos a un precio extra de correo.
- (c) ¿Un sobre de 8 pulgadas de largo y 4 pulgadas de altura requiere precio extra?

8.5 Introducción a la programación lineal

EL PROBLEMA BASICO

Una **función lineal con dos variables** es una función de la forma

$$F(x, y) = ax + by + c \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son constantes} \quad (17)$$

con dominio en un subconjunto del plano cartesiano. El problema básico en la **programación lineal** es encontrar el valor máximo (más grande) o el valor mínimo (más pequeño) de una función lineal que está definida en un conjunto determinado por un sistema de inecuaciones lineales. Por ejemplo,

$$\begin{array}{l} \text{maximice} \\ \text{sujeta a} \end{array} \begin{cases} F(x, y) = 5x + 10y \\ x + 2y \leq 6 \\ 3x + y \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

es un problema típico de programación lineal. En este contexto, F se llama **función objetivo** y las inecuaciones lineales se llaman **restricciones**. Se dice que cualquier par ordenado de números reales (x_0, y_0) que satisfaga todas las restricciones es una **solución factible** del problema. El conjunto de soluciones factibles se denotará por S . Se puede demostrar que para cualquier par de puntos de la gráfica de S , el segmento de recta que los une está completamente en la gráfica de S . Cualquier conjunto del plano que tenga esta propiedad se llama **convexo**. La figura 29(a) ilustra un polígono convexo y la figura 29(b), un polígono que no es convexo. Los puntos de las esquinas del conjunto convexo S determinados por las restricciones se llaman **vértices**.

En todo este análisis nos preocuparemos por la gráfica del conjunto S de las soluciones factibles del sistema de inecuaciones lineales en las cuales $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Exponemos el siguiente teorema sin demostración.

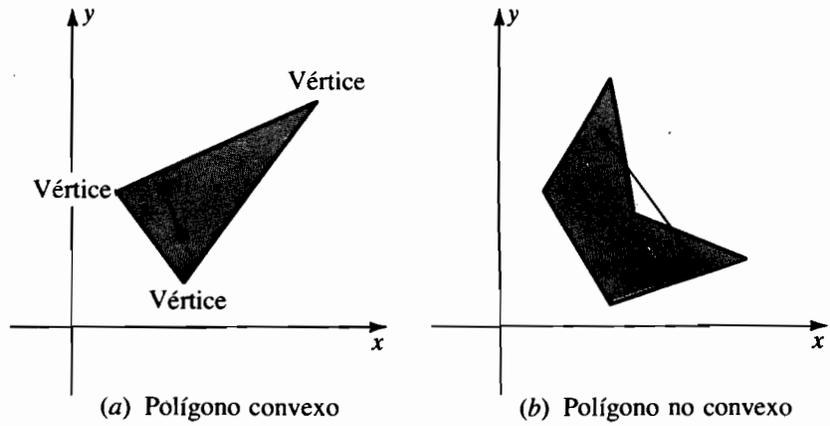


FIGURA 29

TEOREMA 1

Sea $F(x, y) = ax + by + c$ definida en un conjunto S . Si la gráfica de S es un polígono convexo, entonces F tiene a la vez un valor máximo y uno mínimo sobre S , y cada uno de éstos está localizado en un vértice de S .

EJEMPLO 1

Encuentre los valores máximo y mínimo de

$$F(x, y) = 10x + 15y$$

sujeta a

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 3x + y \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Solución. Primero hacemos la gráfica del conjunto S de soluciones factibles y hallamos todos los vértices resolviendo las ecuaciones simultáneas apropiadas. Por ejemplo, el vértice $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 6 \\ 3x + y &= 9 \end{aligned}$$

(Véase figura 30). Se deduce del teorema 1 que los valores máximo y mínimo de F ocurren en los vértices. De la tabla adjunta, vemos que el valor máximo de la función objetivo es

$$F(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}) = 10(\frac{12}{5}) + 15(\frac{9}{5}) = 51$$

El valor mínimo es $F(0, 0) = 0$.

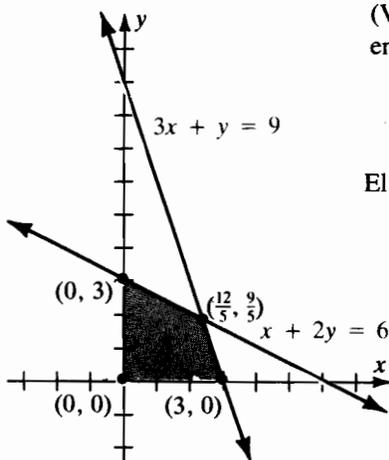


FIGURA 30

VERTICE	VALOR DE F
(0, 3)	45
(0, 0)	0
(3, 0)	30
$(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$	51

EJEMPLO 2

Encuentre los valores máximo y mínimo de

$$F(x, y) = 6x + y + 1$$

sujeta a

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

Solución. En la figura 31 se da la gráfica de S determinada por las restricciones, y los vértices están marcados. Como vemos en la tabla adjunta, el valor máximo de F es

$$F(5, 5) = 6(5) + 5 + 1 = 36$$

El valor mínimo es

$$F(1, 2) = 6(1) + 2 + 1 = 9$$

VERTICE	VALOR DE F
(1, 6)	13
(1, 2)	9
(5, 2)	33
(5, 5)	36
(4, 6)	31

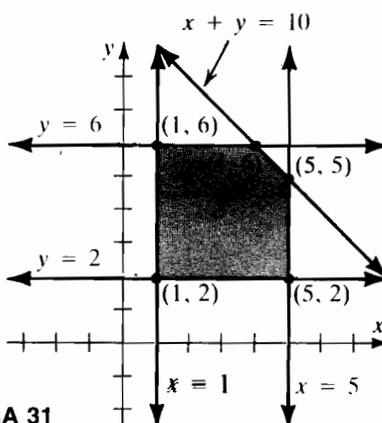


FIGURA 31

EJEMPLO 3

Una pequeña compañía manufacturera de herramientas tiene dos fraguas F_1 y F_2 , cada una de las cuales, por las necesidades de mantenimiento, puede operar máximo 20 horas por día. La compañía hace dos tipos de herramientas: A y B . La herramienta A requiere 1 hora en la fragua F_1 y 3 horas en la fragua F_2 . La herramienta B requiere 2 horas en la fragua F_1 y 1 hora en la fragua F_2 . La compañía obtiene una utilidad de US\$20 por herramienta A y de US\$10 en la herramienta B . Determine el número de cada tipo de herramienta que la compañía debe hacer para maximizar su utilidad diaria.

Solución. Sea x = el número de herramientas A que se producen cada día y y = el número de herramientas B producidas cada día. La función objetivo es la utilidad diaria

$$P(x, y) = 20x + 10y$$

El número total de horas por día que ambas herramientas requieren en la fragua F_1 debe satisfacer

$$1 \cdot x + 2 \cdot y \leq 20$$

De forma similar, el número total de horas por día que ambas herramientas requieren en la fragua F_2 debe satisfacer

$$3 \cdot x + 1 \cdot y \leq 20$$

Así necesitamos

$$\begin{array}{l} \text{maximizar } P(x, y) = 20x + 10y \\ \text{sujeta a } \begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 3x + y \leq 20 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

La gráfica de S determinada por las restricciones se muestra en la figura 32. En la tabla vemos que la utilidad máxima diaria es

$$P(4, 8) = 20(4) + 10(8) = 160$$

Esto es, cuando la compañía hace 4 de las herramientas A y 8 de las herramientas B cada día, su máxima utilidad diaria es de US\$160.

VERTICE	VALOR DE P
(0, 10)	100
(0, 0)	0
($\frac{20}{3}$, 0)	133.33
(4, 8)	160

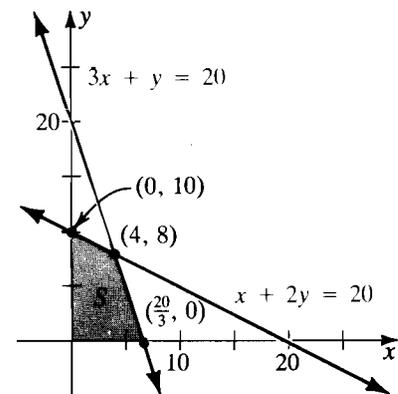


FIGURA 32

EJEMPLO 4

Durante su tiempo libre, John trabaja a destajo en la casa, haciendo pares de mitones, bufandas y gorros en forma de cono. Durante el invierno produce un total de 300 de estos artículos por mes. Tiene un pedido fijo mensual en una compañía grande de las afueras, que ordena por correo de 50 a 100 pares de mitones, por lo menos 100 bufandas y 70 gorros. Los costos del material usado son de US\$0.20 por cada par de mitones, US\$0.40 por cada bufanda, y US\$0.50 por cada gorro. Determine el número de cada artículo que debería hacerse cada mes para minimizar su costo total mensual.

Solución. Si x y y denotan el número de pares de mitones y bufandas, respectivamente, suministrados por John a la compañía de órdenes por correo cada mes, el número de gorros suministrados es, entonces, $300 - x - y$. Sus costos totales mensuales son

$$C(x, y) = 0.2x + 0.4y + 0.5(300 - x - y)$$

$$\text{o} \quad C(x, y) = -0.3x - 0.1y + 150$$

Las restricciones son

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 300 - x - y \geq 0 \\ 50 \leq x \leq 100 \\ y \geq 100 \\ 300 - x - y \geq 70 \end{cases}$$

La última inecuación es equivalente a $x + y \leq 230$. La gráfica del conjunto S de soluciones factibles determinada por las restricciones y los vértices del conjunto se muestran en la figura 33. De la tabla adjunta obtenemos que $C(100, 130) = 107$ es el mínimo. Así, John debe hacer 100 pares de mitones, 130 bufandas y 70 gorros cada mes, para minimizar los costos totales.

VERTICE	VALOR DE C
(50, 100)	125
(50, 180)	117
(100, 130)	107
(100, 100)	110

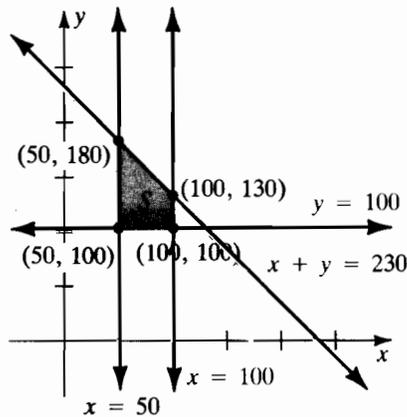


FIGURA 33

Del análisis precedente, Ud. no debe tener la impresión de que una función objetivo debe tener tanto un máximo como un mínimo. Si la gráfica de S no es un polígono convexo, entonces la conclusión del teorema 1 puede no ser verdadera. Dependiendo de las restricciones, podría suceder que una función lineal F tenga un mínimo, pero no un máximo (o viceversa). Sin embargo, se puede demostrar que si F tiene un mínimo (o un máximo) en S , entonces se obtiene en el vértice de la región. También, el máximo (o el mínimo) de una función objetivo puede ocurrir en más de un vértice.

EJEMPLO 5

Considere la función lineal

$$F(x, y) = 5x + 20y$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ 2x + y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

La inspección de la figura 34 muestra que la gráfica del conjunto S de las soluciones de las restricciones no es un polígono convexo. Se puede probar que

$$F(4, 0) = 20$$

es mínimo. Sin embargo, en este caso, la función objetivo no tiene máximo, puesto que $F(x, y)$ puede aumentar sin límite simplemente aumentando x ($x \geq 4$) o aumentando y ($y \geq -4$).

VERTICE	VALOR DE F
(0, 4)	80
($\frac{3}{5}, \frac{12}{5}$)	52
(4, 0)	20

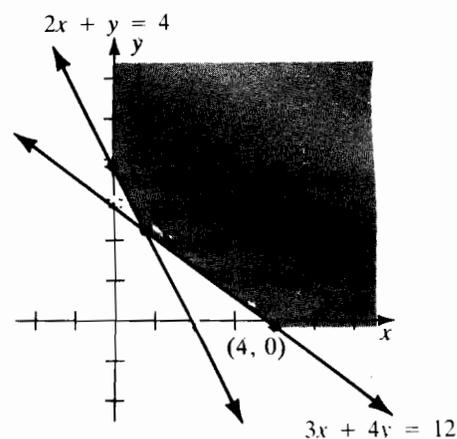


FIGURA 34

EJERCICIO 8.5

En los problemas 1 al 12, encuentre los valores máximo y mínimo de la función lineal F dada sobre el conjunto S definido por las restricciones. Asumimos que $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

1. $F(x, y) = 4x + 7y$
 $\begin{cases} x \leq 3, y \geq 1 \\ y \leq x \end{cases}$

2. $F(x, y) = 20x - 3y$
 $\begin{cases} y \leq 4 \\ x + y \geq 3 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$

3. $F(x, y) = 5x + 8y$
 $\begin{cases} x \leq 2 \\ x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$

4. $F(x, y) = 3x + 6y$
 $\begin{cases} x \geq 2, y \leq 4 \\ x + 3y \geq 6 \\ 2x - y \leq -2 \\ 3x + 2y \leq 18 \end{cases}$

5. $F(x, y) = 3x + 6y$
 $\begin{cases} x + 3y \geq 6 \\ 2x - y \leq -2 \\ 3x + 2y \leq 18 \end{cases}$

6. $F(x, y) = 8x + 12y$
 $\begin{cases} x - 4y \leq -6 \\ -3x + y \leq -4 \\ 2x + 3y \leq 21 \end{cases}$

7. $F(x, y) = x + 4y$
 $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ 2x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$

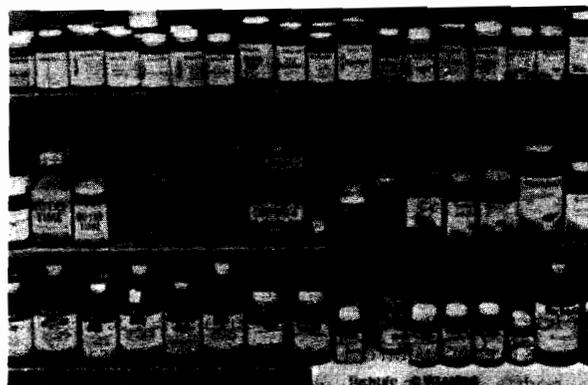
8. $F(x, y) = x + y$
 $\begin{cases} y \leq 5 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$

9. $F(x, y) = 3x + 6y$
 $\begin{cases} x \leq 4, y \leq 5 \\ 2x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 10 \end{cases}$

10. $F(x, y) = x - 4y$
 $\begin{cases} 3x + y \geq 12 \\ 3x - 2y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 30 \\ 3x - 2y \geq 3 \end{cases}$

11. $F(x, y) = 4x + 2y + 25$
 $\begin{cases} -x + 2y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ -3x + y \leq 5 \end{cases}$

12. $F(x, y) = 2x + 3y + 6$
 $\begin{cases} x \leq 8, y \leq 5 \\ 3x + 2y \geq 8 \\ -x + 5y \leq 20 \end{cases}$



En los problemas 13 al 16 la función objetivo dada F , sujeta a las restricciones, tiene un valor mínimo. Encuentre este valor. Explique por qué F no tiene valor máximo. Asuma que $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

13. $F(x, y) = 6x + 4y$

$$\begin{cases} 2x - y \geq 6 \\ 2x + 5y \geq 10 \end{cases}$$

14. $F(x, y) = 10x + 20y$

$$\begin{cases} x \geq 3, y \geq 1 \\ y \leq x \end{cases}$$

15. $F(x, y) = 10x + 10y$

$$\begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ 2x + y \geq 6 \end{cases}$$

16. $F(x, y) = 10x + 5y$

$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x + 2y \geq 6 \\ x + 4y \geq 8 \end{cases}$$

17. Una compañía fabrica radios y televisores. Tiene US\$10 de utilidad por cada radio y US\$40 por cada televisor. Debido a lo limitado de las instalaciones de producción, el número total de radios y televisores que la compañía puede fabricar en un mes es a lo sumo de 350. Por la disponibilidad de partes,

- puede fabricar máximo 300 radios y 100 televisores cada mes. Determine cuántos radios y televisores debe producir la compañía cada mes para llevar al máximo sus utilidades.
18. Una mujer desea invertir hasta US\$10,000 en dos clases de certificados de depósito, *A* y *B*, que producen respectivamente 6.5% y 7.5%, anualmente. Quiere invertir en *B*, a lo sumo, el triple del dinero invertido en *A*. Encuentre el producto anual máximo si no se puede invertir más de US\$6,000 en *B* y no más de US\$5,000 en *A*.
 19. A un paciente se le informa que su dosis diaria de vitaminas debe ser de por lo menos 6 unidades de *A*, 4 unidades de *B* y 18 unidades de *C*, pero no más de 12 unidades de *A*, 8 unidades de *B* y 56 unidades de *C*. Encuentra que una droguería vende dos marcas, *X* y *Y* de vitaminas múltiples que contienen las vitaminas necesarias. Una cápsula de la marca *X* contiene 1 unidad de *A*, 1 unidad de *B*, y 7 unidades de *C*, y cuesta 5 centavos. Una cápsula de la marca *Y* contiene 3 unidades de *A*, 1 unidad de *B*, y 2 unidades de *C* y cuesta 6 centavos. ¿Cuántas cápsulas de cada marca debe tomar cada día para minimizar su costo?
 20. Una compañía de seguros usa dos computadores, uno IBC 490 y uno CDM 500. Cada hora el IBC puede procesar 8 unidades (1 unidad = 100) de títulos médicos, 1 unidad de títulos de seguro de vida y 2 unidades de títulos de seguros de autos. Cada hora el CDM puede procesar 2 unidades de títulos médicos, 1 unidad de títulos de seguro de vida y 7 unidades de títulos de seguros de autos. La compañía encuentra necesario procesar por lo menos 16 unidades de títulos médicos, 5 unidades de títulos de seguros de vida, y 20 unidades de seguros de autos por día. Si le cuesta a la compañía US\$100 la hora hacer funcionar la IBC y US\$ 200 la hora hacer funcionar la CDM, ¿cuántas horas máximo debe funcionar cada computador diariamente para conservar el costo de la compañía al mínimo?, ¿cuál es el costo mínimo?, ¿hay un costo máximo por día?
 21. El depósito de Kerry tiene un surtido de 1,300 pares de "jeans" diseñados y 1,700 pares de marca genérica, los cuales van a ser enviados a dos almacenes: un sitio de gran escala y un almacén de descuentos. El depósito recibe una utilidad de US\$14.25 por cada par de "jeans" diseñados y US\$12.50 por cada par con la marca genérica de "jeans" en el sitio de gran escala. La utilidad que le corresponde al almacén de descuentos es de US\$4.80 y de \$3.40 por par. El sitio de gran escala, sin embargo, puede llevar a lo sumo 1,800 pares de "jeans", mientras el almacén de descuentos tiene cabida para un máximo de 2,500 pares. Encuentre el número de pares tanto de "jeans" diseñados, como de marca genérica que el depósito debe enviar a cada almacén para maximizar su utilidad total. ¿Cuál es la ganancia máxima?
 22. La compañía de Joan fabrica tres clases de autos: *A*, *B* y *C*. De allí sale un total de 100 unidades cada año. El número de autos *B* fabricados no debe ser tres veces mayor que el de autos *A*, pero su producción anual combinada debe ser por lo menos de 20. El número de autos *C* que pueden hacerse cada año debe ser por lo menos de 32. La fabricación de cada auto *A* cuesta US\$9,000. Los autos *B* y *C* cuestan US\$6,000 y US\$8,000, respectivamente. ¿Cuántos autos de cada clase deben fabricarse para minimizar el costo de la producción anual?, ¿cuál es el costo mínimo?
 23. Los alces que viven en un parque nacional de Michigan comen a la vez plantas acuáticas, que son altas en sodio, pero bajas en energía (contienen una gran cantidad de agua) y plantas terrestres, las cuales son altas en contenido de energía, pero esencialmente no contienen sodio. Los experimentos han demostrado que un alce puede obtener cerca de 0.8 mj (megajulios) de energía de 1 kg de plantas acuáticas y cerca de 3.2 mj de energía de 1 kg de plantas terrestres. Se estima que un alce adulto necesita comer por lo menos 17 kg de plantas acuáticas diariamente para satisfacer sus necesidades de sodio. Se ha estimado también que el primer estómago del alce es incapaz de digerir más de 33 kg de alimento diariamente. Encuentre la dosis diaria tanto de plantas acuáticas como de terrestres que contendrán el máximo de energía para la ingestión del alce, sujeta al requerimiento de sodio y a la capacidad del primer estómago.



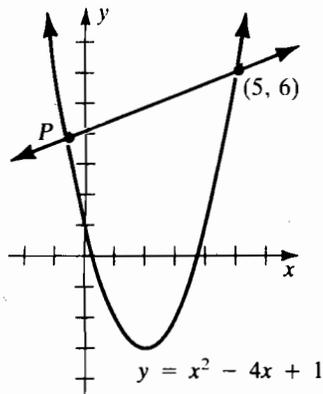


FIGURA 35

En los problemas 25 al 28, encuentre la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional dada.

25. $\frac{1}{x^4(x^2 + 5)}$

26. $\frac{x^5 - x^4 + 2x^3 + 5x - 1}{(x - 1)^2}$

27. $\frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}$

28. $\frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}$

En los problemas 29 al 32, haga la gráfica del conjunto solución del sistema de inecuaciones dado.

29. $\begin{cases} y - x \leq 0 \\ y + x \leq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - 3y \geq -6 \\ 3x - 2y \leq 12 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + y \geq 1 \\ -x + y \leq 7 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq y \leq 6 \\ x + y \geq 5 \\ x + y \leq 9 \end{cases}$

33. Encuentre los valores máximo y mínimo de

$$F(x, y) = 100x - 40y$$

sabiendo que

$$\begin{cases} -x + 3y \leq 5 \\ x + y \geq 3 \\ 2x - y \leq 7 \\ x \geq 0, 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

34. La función $F(x, y) = 20x + 50y$, sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} 4x + 5y \geq 20 \\ 3x + y \geq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

tiene un valor mínimo. ¿Cuál es? Explique por qué la función no tiene un valor máximo.

35. En cierta granja pequeña, el cultivar un acre de maíz requiere 6 horas de trabajo y US\$36 de capital, mientras que cultivar un acre de avena requiere 2 horas de trabajo y US\$18 de capital. Suponga que el granjero tiene 12 acres de tierra, 48 horas de trabajo, y US\$360 de capital disponible. Si el ingreso por el maíz es de US\$40 por acre y el de la avena de US\$20 por acre, ¿cuántos acres de cada uno debe el granjero cultivar para maximizar el ingreso total (incluido el capital no usado)?

9.1

Introducción a las matrices

El método de solución, y la solución misma, de un sistema de ecuaciones lineales no depende de ninguna manera de los símbolos que se usen como variables. En el ejemplo 6 de la sección 8.2, vimos que la solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases} \quad (1)$$

es $(-2, -5, 6)$. Esta misma terna ordenada es también una solución de

$$\begin{cases} u + 2v + w = -6 \\ 4u - 2v - w = -4 \\ 2u - v + 3w = 19 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} r + 2s + t = -6 \\ 4r - 2s - t = -4 \\ 2r - s + 3t = 19 \end{cases}$$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales depende solamente de los números que aparecen en el sistema. Veremos que podremos resolver (1) por operaciones apropiadas en el *arreglo* de números

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{bmatrix} \quad (2)$$

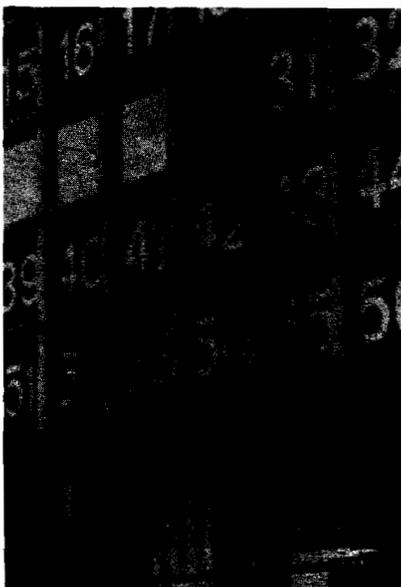
Antes de examinar esta idea, necesitamos desarrollar un sistema matemático cuyos elementos sean arreglos de números. Un arreglo rectangular como (2) se llama **matriz**.

DEFINICION 1

Una **matriz** A es un arreglo rectangular de números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si hay m filas y n columnas, decimos que el **orden** de la matriz es $m \times n$, y nos referimos a ella como "matriz $m \times n$ " o, simplemente, como **matriz rectangular**. Una matriz $n \times n$ se llama **matriz cuadrada** y se dice que tiene un **orden** n . La **entrada**, o



elemento, en la i -ésima fila y en la j -ésima columna de una matriz A de orden $m \times n$ se denota como a_{ij} . Así, la entrada en, digamos, la tercera fila y la cuarta columna es a_{34} .

EJEMPLO 1 _____

(a) El orden de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

es 2×3 .

(b) El orden de la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

es 3×1 .

(c) La matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -3 & \pi \end{bmatrix}$$

es una matriz cuadrada de segundo orden.

NOTACION MATRICIAL

Para ahorrar tiempo y espacio al escribir, es conveniente usar una notación especial para una matriz general. Una matriz A de orden $m \times n$ se abrevia frecuentemente como $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

EJEMPLO 2 _____

Determine la matriz

$$A = (a_{ij})_{3 \times 2} \quad \text{si} \quad a_{ij} = i + j$$

para cada i y cada j .

Solución. Para obtener la entrada en la primera fila y la primera columna, tenemos que $i = 1$ y $j = 1$; eso es $a_{11} = 1 + 1 = 2$. El resto de las entradas se obtienen de manera similar:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 1 & 1 + 2 \\ 2 + 1 & 2 + 2 \\ 3 + 1 & 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Se dice que las entradas a_{11}, a_{22}, \dots , en una matriz cuadrada están sobre su **diagonal principal**. Por ejemplo, las diagonales principales de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 4 & 6 \\ 5 & \textcircled{6} & 0 \\ -2 & 7 & \textcircled{9} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} \textcircled{16} & -5 \\ 8 & \textcircled{3} \end{bmatrix}$$

se muestran aquí en círculos.

IGUALDAD

Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo orden y si sus correspondientes **entradas** son iguales.

DEFINICIÓN 2

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$ entonces $A = B$ si y solamente si $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y cada j .

EJEMPLO 3

De la definición 2, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & -3 \\ 0 & -\pi & \sqrt{2} & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100}{100} & 0.5 & \sqrt{4} & -3 \\ 0 & (-1)\pi & \sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$$

pero $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

puesto que las correspondientes entradas en la tercera fila no son iguales. También,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

puesto que las matrices no tienen el mismo orden.

EJEMPLO 4

Halle los valores de x y y si

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución. De la definición 2, igualamos las entradas correspondientes. Se deduce que

$$-1 = 2y + 1 \quad \text{y} \quad x^3 = 8$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos $y = -1$ y $x = 2$.

EJERCICIO 9.1

En los problemas 1 al 10, establezca el orden de la matriz dada.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $[8]$

6. $[0 \ 5 \ -7]$

7. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

9. $(a_{ij})_{5 \times 7}$

10. $(a_{ij})_{6 \times 6}$

En los problemas 11 al 16, suponga que una matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ se define como

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & -9 \\ \frac{1}{4} & 5 & 11 & 27 \end{bmatrix}$$

Encuentre el número indicado.

11. a_{13}

12. a_{32}

13. a_{24}

14. a_{33}

15. $2a_{11} + 5a_{31}$

16. $a_{23} - 4a_{33}$

En los problemas 17 al 22, determine la matriz $(a_{ij})_{22 \times 3}$ que satisfaga la condición dada.

17. $a_{ij} = i - j$

18. $a_{ij} = ij$

19. $a_{ij} = ij^2$

20. $a_{ij} = 2i + 3j$

21. $a_{ij} = 4i/j$

22. $a_{ij} = i^j$

En los problemas 23 al 26, determine si las matrices dadas son iguales.

23. $\begin{bmatrix} -4 & 3^2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1.4 \end{bmatrix}$

24. $[0 \ 0]; [0 \ 0 \ 0]$

25. $\begin{bmatrix} 0 & |4-5| & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & 6 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 3.5 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

En los problemas 27 al 32, halle los valores de las incógnitas.

27. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ x & -y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ x-y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} w+1 & 10+x \\ 3y-2 & x-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2x+1 \\ y-5 & 4z \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & y \\ y & -x \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} x^2-9x & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & x \\ 1 & y^2-1 \end{bmatrix}$

9.2 Algebra de matrices

En álgebra común, damos por sentado el hecho de que cualquier par de números reales pueden sumarse, restarse y multiplicarse. En álgebra de matrices, sin embargo, dos matrices pueden sumarse, restarse y multiplicarse solamente en ciertas condiciones.

ADICION DE MATRICES

Solamente las matrices que tienen el mismo orden pueden sumarse. Si A y B son ambas matrices $m \times n$ su **suma** es la matriz $m \times n$ formada al sumar las correspondientes entradas en cada matriz.

DEFINICION 3

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$, entonces su **suma** es

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

EJEMPLO 1

Para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

su suma es

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 & 0+3 \\ 7+(-5) & 3+0 & -4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Se deduce directamente de las propiedades de los números reales y de la definición 3, que la operación de adición en el conjunto de matrices $m \times n$ satisface las siguientes propiedades:

$$\text{Ley asociativa} \quad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$\text{Ley conmutativa} \quad A + B = B + A$$

ELEMENTO NEUTRO

La **matriz cero** $m \times n$ denotada por O , es la matriz $m \times n$ con cada entrada igual a cero. Puesto que $A + O = A = O + A$ para cada matriz A $m \times n$ la matriz cero es el **elemento neutro** para el conjunto de las matrices $m \times n$. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

PRODUCTO ESCALAR

Definimos el **producto escalar** de una matriz y un número real como la matriz con cada entrada igual al producto del número real y la entrada correspondiente en la matriz dada.

DEFINICION 4

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y k es cualquier número real, entonces el **producto escalar** de A y k es

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n}$$

EJEMPLO 2

Para

$$k = 3 \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

se deduce de la definición 4 que

$$kA = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) \\ 3(3) & 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 3

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

encuentre $(-1)A + 2B$ y $(-1)A + A$.

Solución. Aplicando la definición 4, tenemos

$$(-1)A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad 2B = \begin{bmatrix} 14 & 4 & -2 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Así, de la definición 3,

$$(-1)A + 2B = \begin{bmatrix} -1 + 14 & 0 + 4 & -2 + (-2) \\ 3 + 8 & -4 + 0 & -5 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 4 & -4 \\ 11 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$(-1)A + A = \begin{bmatrix} -1 + 1 & 0 + 0 & -2 + 2 \\ 3 + (-3) & -4 + 4 & -5 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes propiedades del producto escalar se establecen fácilmente usando las definiciones 3 y 4. Si k_1 y k_2 son números reales, entonces

$$k_1(A + B) = k_1A + k_1B$$

$$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$$

$$k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$$

INVERSO ADITIVO

Como muestra el ejemplo 3, el **inverso aditivo** $-A$ de la matriz A es $(-1)A$.

Así,

$$A + (-A) = O = (-A) + A$$

para cualquier matriz A de orden $m \times n$. Usamos el inverso aditivo para definir la resta de dos matrices A y B de orden $m \times n$, como sigue:

$$A - B = A + (-B)$$

EJEMPLO 4

Si $A = [1 \ 2 \ 3]$ y $B = [-2 \ 7 \ 4]$, entonces $-B = [2 \ -7 \ -4]$, tenemos

$$A - B = [1 \ 2 \ 3] + [2 \ -7 \ -4] = [3 \ -5 \ -1]$$

De

$$A + (-B) = (a_{ij} + (-b_{ij}))_{m \times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

vemos que, para restar B de A , necesitamos solamente restar las entradas en B de las correspondientes entradas en A .

EJEMPLO 5

Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 10 & 6 & 8 \\ 9 & -7 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix}$$

encuentre $A - B$ y $B - A$.

Solución

$$A - B = \begin{bmatrix} 4 - 5 & 5 - 1 & -2 - 3 \\ 10 - (-1) & 6 - 2 & 8 - 6 \\ 9 - 4 & -7 - 9 & -1 - (-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 11 & 4 & 2 \\ 5 & -16 & 7 \end{bmatrix}$$

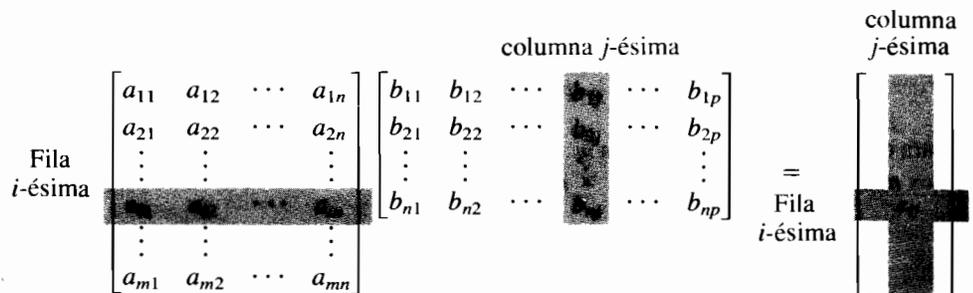
$$B - A = \begin{bmatrix} 5 - 4 & 1 - 5 & 3 - (-2) \\ -1 - 10 & 2 - 6 & 6 - 8 \\ 4 - 9 & 9 - (-7) & -8 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -11 & -4 & -2 \\ -5 & 16 & -7 \end{bmatrix}$$

El ejemplo 5 ilustra que $B - A = -(A - B)$.

MULTIPLICACION DE MATRICES

Para encontrar el producto AB de dos matrices A y B , necesitamos que el número de columnas de A sea igual al número de las filas en B . Suponga que $A = (a_{ij})_{m \times n}$ es una matriz $m \times n$ y $B = (b_{ij})_{n \times p}$ es una matriz $n \times p$. Como se ilustra a continuación, para encontrar la entrada c_{ij} en el producto $C = AB$, hacemos parejas con los números de la fila i -ésima de A con los de la columna j -ésima de B . Luego multiplicamos los pares y sumamos los productos, como sigue:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (3)$$



Se deduce del (3) que el producto AB tiene m filas y p columnas. En otras palabras, el orden del producto $C = AB$ se determina por

$$\underbrace{A_{m \times n} B_{n \times p}} = C_{m \times p}$$